

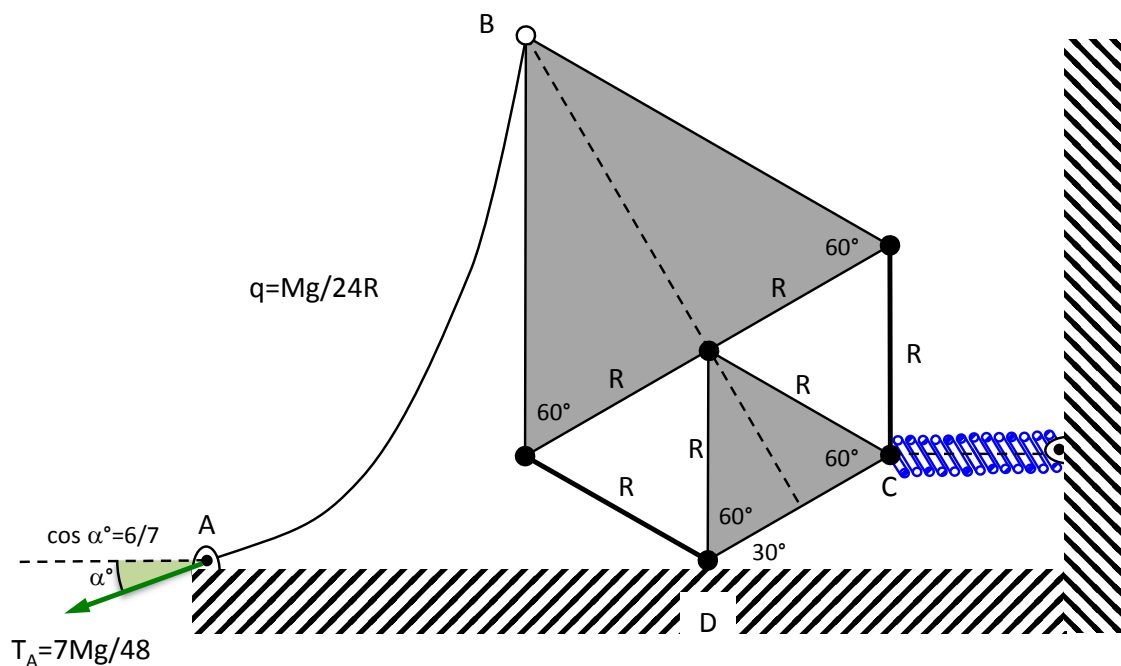
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ESTÁTICA. 8-11-2014.**  
**EJERCICIO 1 TIEMPO: 50'**

El sistema mecánico de la figura está formado por un triángulo equilátero de base  $2R$  y masa  $\sqrt{3}M$ , articulado en el centro de su base al vértice de otro triángulo equilátero de base  $R$  y del mismo material. Ambos triángulos están articulados a dos barras de longitud  $R$  y masa despreciable, tal y como se indica en la figura. El sólido resultante está apoyado en un suelo rugoso en  $D$ , articulado en  $C$  a un muelle horizontal, y en  $B$  a un cable. Este cable tiene un peso por unidad de longitud conocido de valor  $q=Mg/24R$ , y está articulado en su extremo  $A$  al suelo. Se sabe que la tensión en  $A$  es  $7Mg/48$  y que su inclinación con la horizontal es tal que el coseno de ese ángulo es  $6/7$ .

Se pide obtener, detallando todos los cálculos,

- el parámetro de la catenaria. (1 punto)
- la tensión del cable en  $B$ . (1 punto)
- la longitud de catenaria. (2 puntos)
- la fuerza necesaria en el muelle. (3 puntos)
- el coeficiente de rozamiento mínimo necesario en el suelo. (3 puntos)



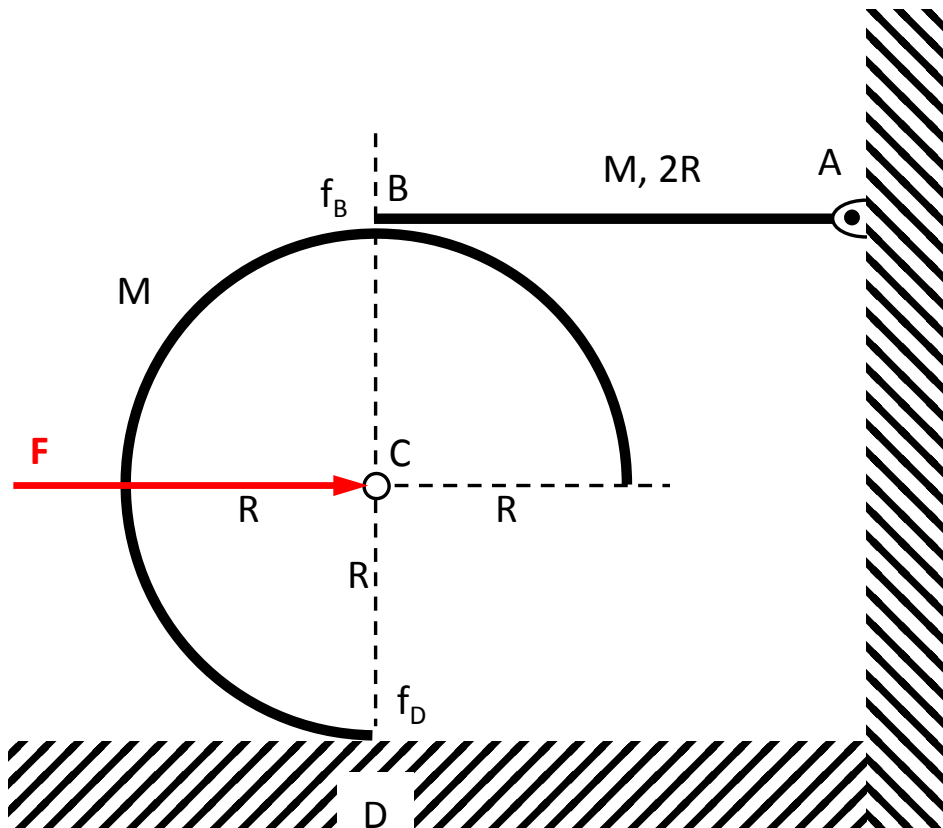
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ESTÁTICA. 8-11-2014.**  
**EJERCICIO 2 TIEMPO: 45'**

El sistema mecánico de la figura consta de un sólido de masa  $M$  y con la forma de  $\frac{3}{4}$  de aro, apoyado en el punto  $D$  sobre un suelo rugoso, sometido a una fuerza aplicada  $F$  en el centro geométrico  $C$  (que estaría unido al aro por radios de masa despreciable), y sobre el que contacta en  $B$  una barra de masa  $M$  y longitud  $2R$ , articulada en  $A$  al elemento fijo. En el contacto  $B$  entre barra y aro el coeficiente de rozamiento es conocido y de valor  $\frac{2}{3\pi}$ .

Obtener:

- entre qué valores puede encontrarse la fuerza  $F$  estando el sistema en equilibrio. (5 puntos)
- qué valor mínimo de coeficiente de rozamiento sería necesario en el contacto entre aro y suelo. (5 puntos)





1. deitura / 1er apellido

Titulazioa / Titulación

2. deitura / 2º apellido

Ikasgaia / Asignatura

Izena / Nombre

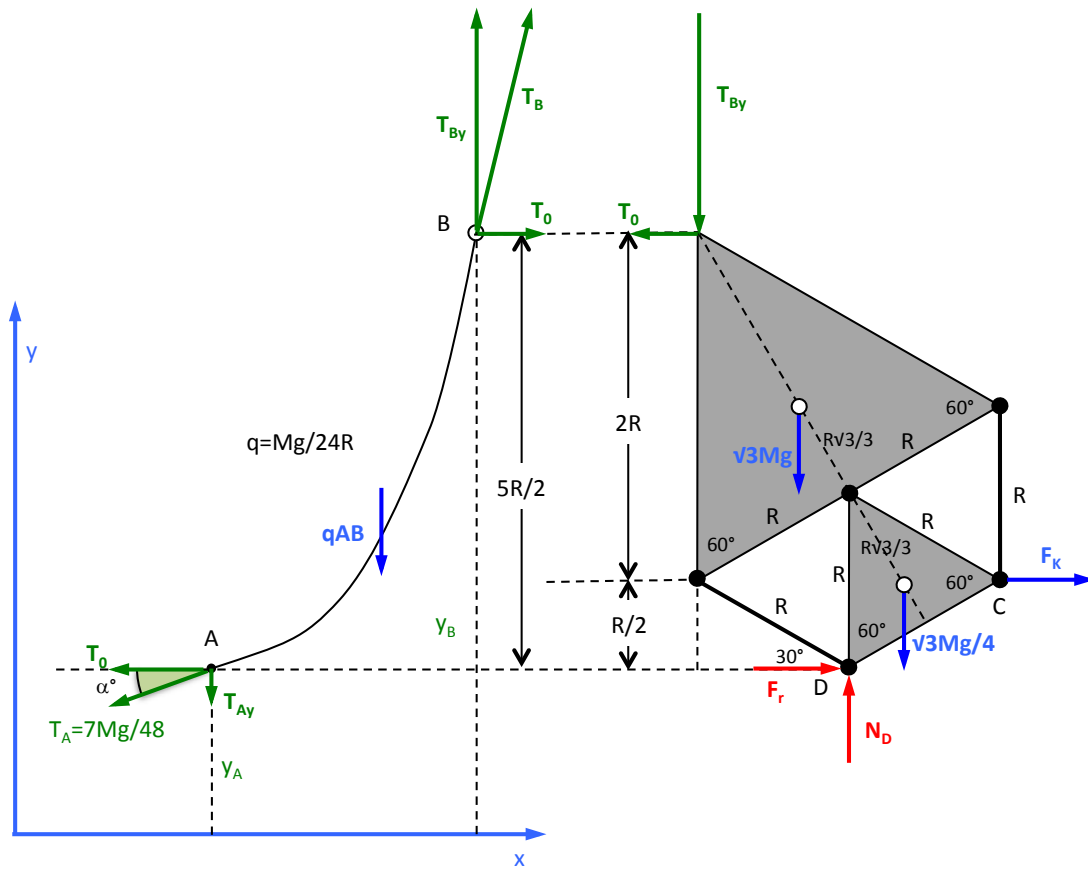
Data / Fecha

Ikasturtea / Curso

Taldea / Grupo

Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ESTÁTICA. 8-11-2014.**  
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 1**



$$T_0 = T_A \cos \alpha = \frac{7Mg}{48} \cdot \frac{6}{7} = \frac{Mg}{8}$$

$$\alpha = \frac{T_0}{q} = \frac{Mg/8}{Mg/24R} = 3R$$

$$y_A = \frac{T_A}{q} = \frac{7Mg/48}{Mg/24R} = \frac{7R}{2}$$

$$y_B = y_A + \frac{5R}{2} = 6R$$

$$T_B = q y_B = \frac{Mg}{4}$$

$$T_{By} = \sqrt{T_B^2 - T_0^2} = \frac{\sqrt{3}Mg}{8}$$

$$s_B = \sqrt{y_B^2 - \alpha^2} = 3\sqrt{3}R$$

$$s_A = \sqrt{y_A^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} R$$

$$s_{AB} = s_B - s_A = 3\sqrt{3}R - \frac{\sqrt{13}}{2} R$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

Balance de fuerzas:

$$F_K + F_r - T_0 = 0$$

$$N_D - \sqrt{3}Mg - \frac{\sqrt{3}}{4}Mg - T_{By} = 0$$

Balance de momentos en D:

$$\sqrt{3}Mg \frac{R\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}Mg \frac{R\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} - F_K \frac{R}{2} + T_0 \frac{5R}{2} + T_{By} \frac{R\sqrt{3}}{2} = 0$$

Sustituyendo los valores de las componentes de la tensión en B obtenidos anteriormente:

$$F_K = \frac{7Mg}{4}$$

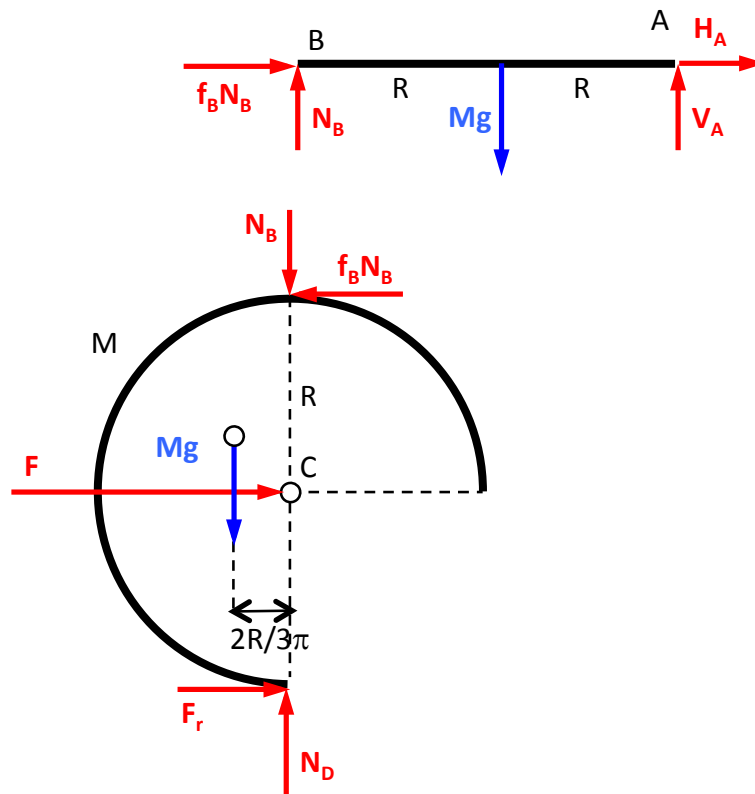
$$F_r = -\frac{13Mg}{8}$$

$$N_D = \frac{11\sqrt{3}Mg}{8}$$

$$f_D = \frac{13}{11\sqrt{3}}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ESTÁTICA. 8-11-2014.  
RESOLUCIÓN EJERCICIO 2**



El balance de momentos en el punto A de la barra:

$$-N_B 2R + MgR = 0 \quad N_B = \frac{Mg}{2}$$

El centro de masas de la sección de aro se puede calcular a partir de los 3 cuartos de aro de masas  $M/3$  y de centro de masas a  $2R/\pi$  en cada eje. Desde C:

$$x_G M = \frac{M}{3} \frac{2R}{\pi} - 2 \frac{M}{3} \frac{2R}{\pi} = -M \frac{2R}{3\pi}$$

$$y_G M = 2 \frac{M}{3} \frac{2R}{\pi} - \frac{M}{3} \frac{2R}{\pi} = M \frac{2R}{3\pi}$$

El balance de fuerzas verticales en el aro:

$$N_D - N_B - Mg = 0 \quad N_D = \frac{3Mg}{2}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

El balance de fuerzas horizontales en el aro:

$$F + F_r - \frac{2}{3\pi} \frac{Mg}{2} = 0$$

El balance de momentos en el punto D:

$$-FR + \frac{2}{3\pi} \frac{Mg}{2} 2R + Mg \frac{2R}{3\pi} = 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{F = \frac{4Mg}{3\pi}} \quad F_r = -\frac{Mg}{\pi} \quad f_D = \frac{|F_r|}{N_D} = \frac{2}{3\pi}$$

Si consideramos la fuerza de rozamiento en B en el sentido contrario obtenemos los valores de la otra situación límite:

$$\begin{aligned}
 F + F_r + \frac{2}{3\pi} \frac{Mg}{2} &= 0 \\
 -FR - \frac{2}{3\pi} \frac{Mg}{2} 2R + Mg \frac{2R}{3\pi} &= 0
 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\boxed{F = 0} \quad F_r = -\frac{Mg}{3\pi} \quad f_D = \frac{|F_r|}{N_D} = \frac{2}{9\pi}$$

El coeficiente de rozamiento mínimo necesario en D debe ser el mayor de los dos:

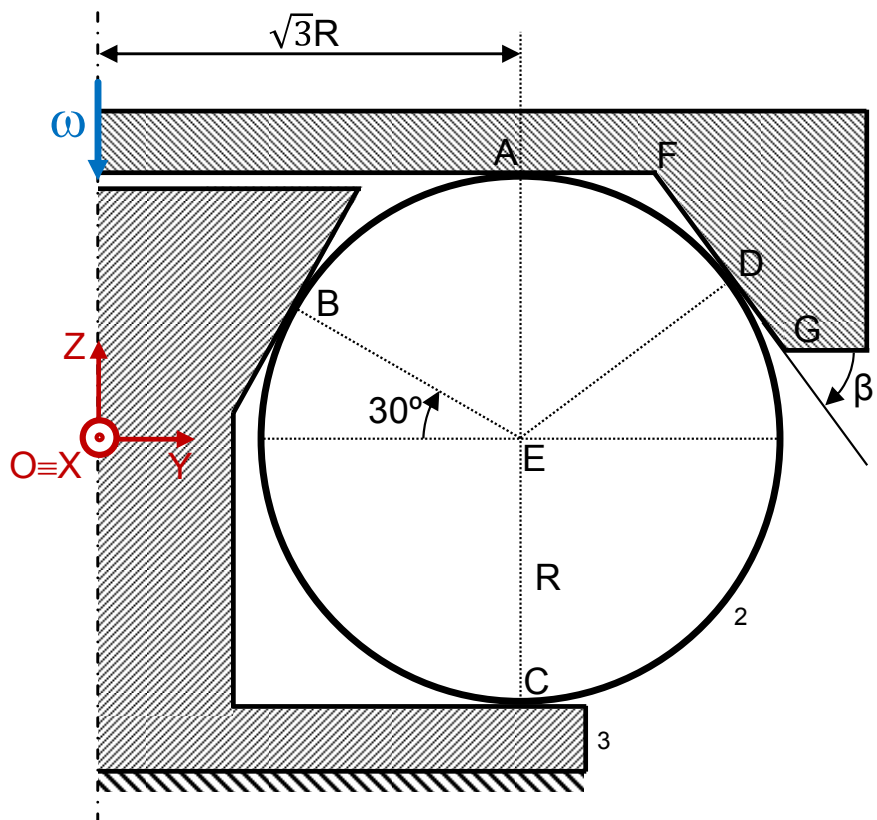
$$\boxed{f_D = \frac{2}{3\pi}}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**EJERCICIO 1 TIEMPO: 45'**

En la figura se muestra la sección de un rodamiento en el cual el sólido 1 gira en el sentido indicado con velocidad angular  $\omega$  constante. El sólido 3 permanece fijo. Entre ambos, se muestra la sección central de una esfera 2 de radio  $R$  que contacta con los sólidos 1 y 3 en los puntos A, B, C y D. Se sabe que en los contactos en A, B y C no existe deslizamiento. Se pide:

1. Obtener el eje instantáneo de rotación y deslizamiento de la esfera en su movimiento absoluto. (1 punto)
2. Obtener la velocidad angular absoluta de la esfera. (2,5 puntos)
3. Obtener la aceleración angular absoluta de la esfera. (4 puntos)
4. Calcular  $\beta$  para que no exista deslizamiento en el punto D de contacto de la esfera con el sólido 1. (2,5 puntos)



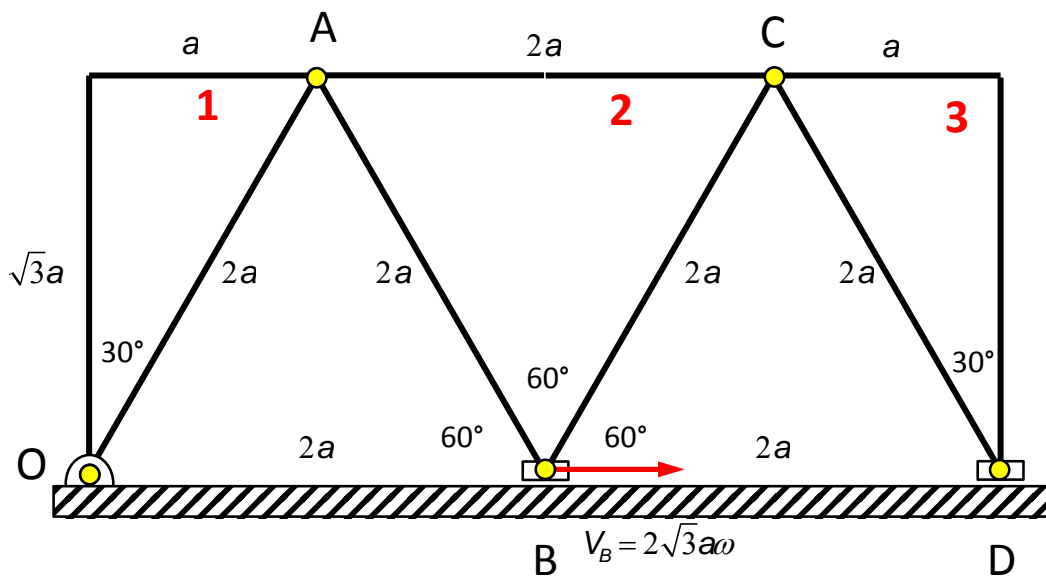
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**EJERCICIO 2 TIEMPO: 40'**

El mecanismo de la figura está formado por tres triángulos articulados entre sí en los vértices A y C como se muestra en la figura. El vértice O del triángulo 1 está articulado al elemento fijo, el vértice B del triángulo 2 desliza por el suelo horizontal con velocidad de módulo constante, y el vértice D del triángulo 3 desliza por el mismo suelo.

Obtener:

1. Centros instantáneos de rotación de los tres sólidos. (2 puntos)
2. Velocidades angulares de los tres sólidos. (2 puntos)
3. Aceleraciones angulares de los tres sólidos. (6 puntos)

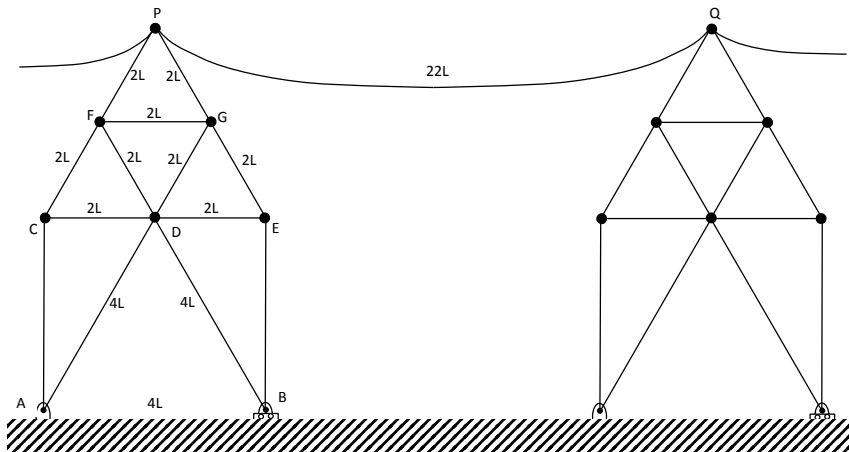




**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**EJERCICIO 3 TIEMPO: 40'**

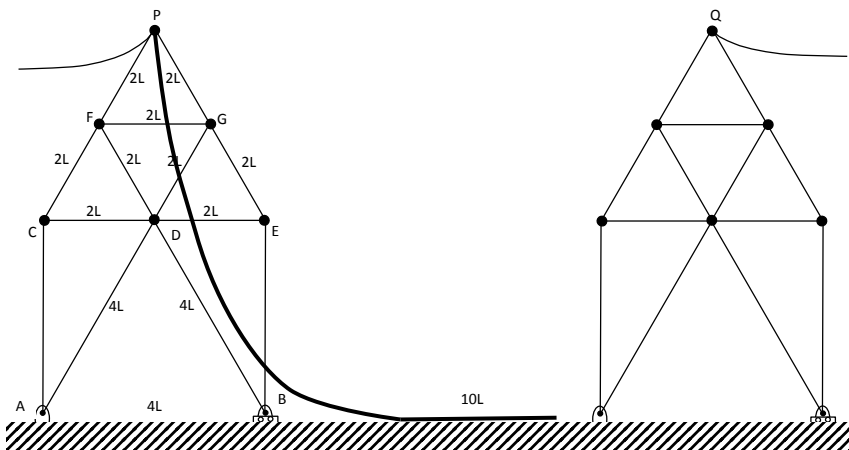
El cable de un tendido eléctrico, de peso por unidad de longitud  $q$ , se soporta mediante torres en celosía como las dibujadas en la figura, todas ellas de la misma altura, de modo que entre cada dos de ellas la longitud de cable es de  $22L$ . La tensión soportada por el cable en el punto P vale  $13qL$ . Calcular:

1. Parámetro de la catenaria del cable (1 punto).
2. Esfuerzo soportado por las barras FP, BD y AD (3 puntos).



En un momento dado, se rompe el cable en el extremo de una de las torres, de modo que una parte del mismo, de longitud  $10L$ , queda tendida sobre el suelo. Para esta nueva situación, determinar:

1. Parámetro de la nueva catenaria (4 puntos)
2. Coeficiente de rozamiento mínimo entre cable y suelo para que se mantenga el equilibrio (2 puntos)

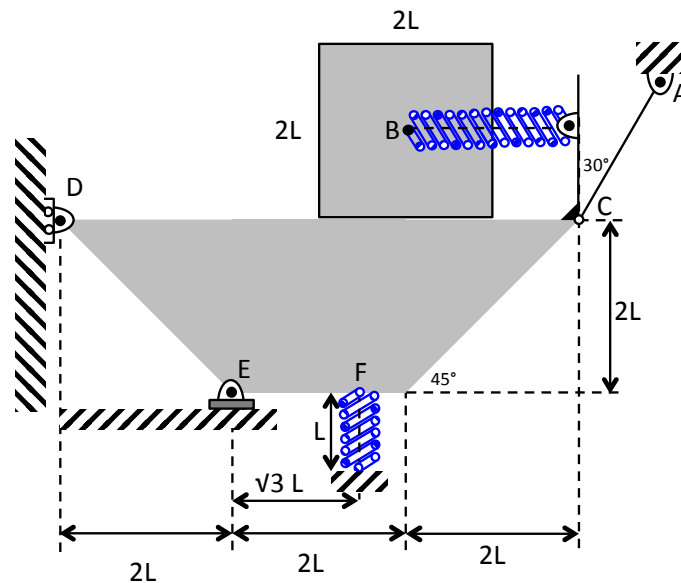


1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**EJERCICIO 4 TIEMPO: 40'**

Una placa trapezoidal CDEF de densidad  $\sigma = Mg/2L^2$  está sujeta en C a un cable que forma  $30^\circ$  con la vertical, cuya tensión es conocida  $T_{AC} = 4\sqrt{3}/3 Mg$ , en D se desliza sin rozamiento por una guía vertical, en E está apoyada sobre un suelo rugoso y en F está apoyada sobre un muelle de constante elástica  $K = Mg/L$ , de longitud natural  $L_0 = 2L$  y longitud final  $L_F = L$ . Sobre ella hay una placa cuadrada de  $2L \times 2L$ , de la misma densidad, sujeta en su centro B a un muelle ideal de constante elástica  $K = 2Mg/3L$ , y éste a la pértiga sin peso colocada en la vertical del extremo C. Se sabe que en el contacto entre las dos placas el coeficiente de rozamiento es  $f = 2/3$  y que el muelle horizontal está deformado al límite sin que se produzca el deslizamiento de la placa cuadrada. Se pide:

1. Encontrar la posición en la que se encuentra la placa cuadrada, medido desde el extremo C. (4 puntos)
2. El coeficiente de rozamiento mínimo entre la placa trapezoidal y el suelo en E para que esté en equilibrio estricto. (4 puntos)
3. Comprobar si en las mencionadas condiciones se produce el vuelco de la placa cuadrada (hallar el punto de aplicación de la reacción en la placa). (2 puntos)

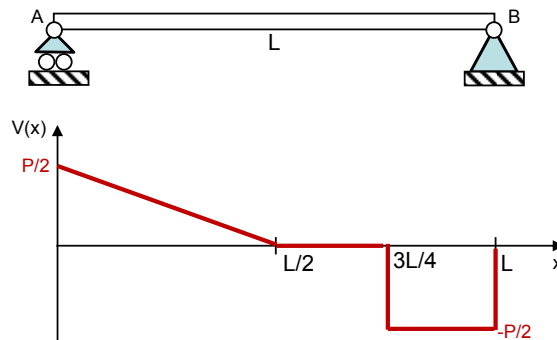


1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

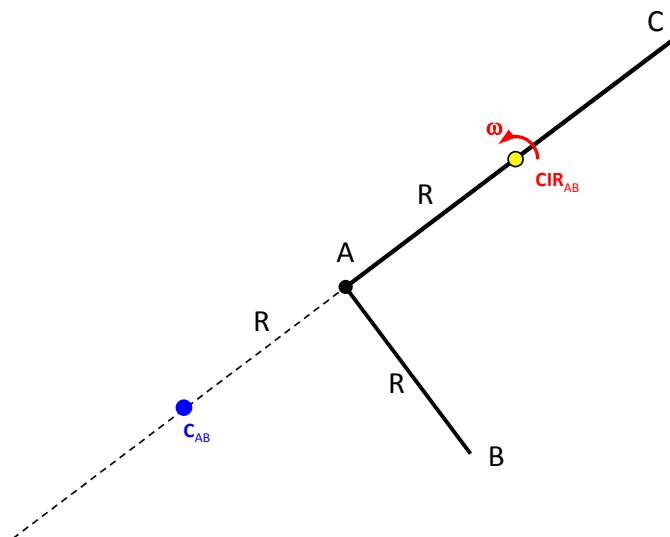
**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**

**EJERCICIO 5 TIEMPO: 40'**

1. Relación entre carga, esfuerzo cortante y momento flector. Por utilización exclusiva de las relaciones planteadas en la pregunta anterior, obtener las cargas actuantes sobre la viga AB de la figura y el diagrama de momento flector a partir de su diagrama de esfuerzo cortante. (5 puntos)



2. Definir las circunferencias notables a partir de la construcción gráfica de velocidades y aceleraciones. El sólido ABC consta de dos barras rígidamente unidas a  $90^\circ$  en A. Se mueve de tal forma que en el instante de la figura son conocidos el polo de velocidades y aceleraciones y que su aceleración angular es nula. Obtener gráficamente la velocidad y aceleración de B en la posición de la figura, Deducir, por aplicación exclusiva de la construcción gráfica anterior, la circunferencia de las inflexiones del sólido ABC. (5 puntos)



1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.  
RESOLUCIÓN EJERCICIO 1**

1. Obtener el eje instantáneo de rotación y deslizamiento de la esfera en su movimiento absoluto. (1 punto)

Recta que pasa por B y C

2. Obtener la velocidad angular absoluta de la esfera. (2,5 puntos)

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\sqrt{3}\omega}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{3\omega}{2} \mathbf{e}_3$$

3. Obtener la aceleración angular absoluta de la esfera. (4 puntos)

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{\sqrt{3}\omega^2}{4} \mathbf{e}_1$$

4. Calcular  $\beta$  para que no exista deslizamiento en el punto D de contacto de la esfera con el sólido 1. (2,5 puntos)

El punto D debe encontrarse sobre el eje instantáneo de rotación de la esfera en su movimiento relativo al sólido 1. Dicho eje pasa por A y es paralelo a la velocidad angular de la esfera en dicho movimiento.

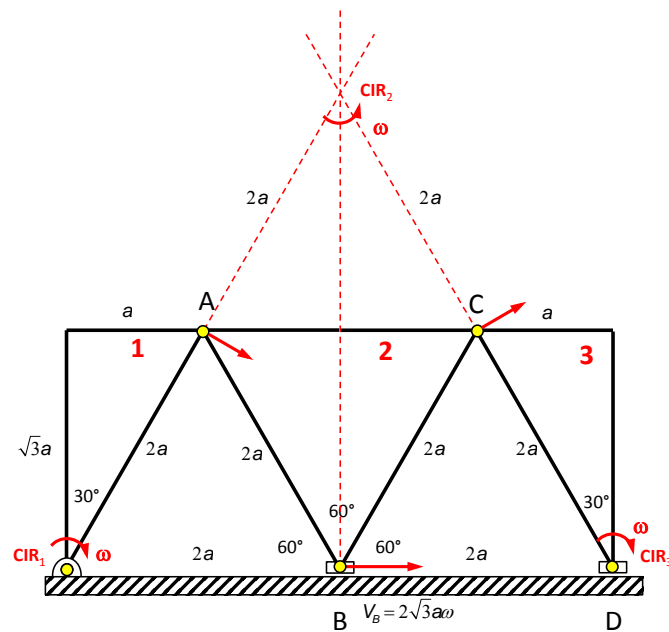
$$\boldsymbol{\omega}_{2r1} = \frac{\sqrt{3}\omega}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{\omega}{2} \mathbf{e}_3$$

Como la velocidad angular relativa forma  $30^\circ$  con la horizontal, y la superficie cónica de generatriz FG debe ser tangente a la esfera,  $\beta=60^\circ$ .

Alternativamente, puede plantearse la igualdad de la velocidad del punto D de la esfera y del sólido 1.

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 2**



Obteniendo la aceleración de A en el sólido 1 y 2 e igualando:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \times \overline{OA} - \Omega_1^2 \overline{OA} = -a\sqrt{3}\alpha_1 \vec{i} + a\alpha_1 \vec{j} - \omega^2 (a\vec{i} + a\sqrt{3}\vec{j})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \times \overline{BA} - \Omega_2^2 \overline{BA} = -a\sqrt{3}\alpha_2 \vec{i} - a\alpha_2 \vec{j} - \omega^2 (-a\vec{i} + a\sqrt{3}\vec{j})$$

despejamos:

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = -\vec{\alpha}_1 = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}} \vec{k}}$$

Obteniendo la aceleración de C en el sólido 2 y 3 e igualando:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \times \overline{BC} - \Omega_2^2 \overline{BC} = -a\sqrt{3}\alpha_2 \vec{i} + a\alpha_2 \vec{j} - \omega^2 (a\vec{i} + a\sqrt{3}\vec{j}) = \omega^2 a \left( -2\vec{i} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \vec{j} \right)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_3 \times \overline{DC} - \Omega_3^2 \overline{DC} = a_D \vec{i} - a\sqrt{3}\alpha_3 \vec{i} - a\alpha_3 \vec{j} - \omega^2 (-a\vec{i} + a\sqrt{3}\vec{j})$$

despejamos:

$$\boxed{\vec{\alpha}_3 = -\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 = -\frac{\omega^2}{\sqrt{3}} \vec{k}}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**

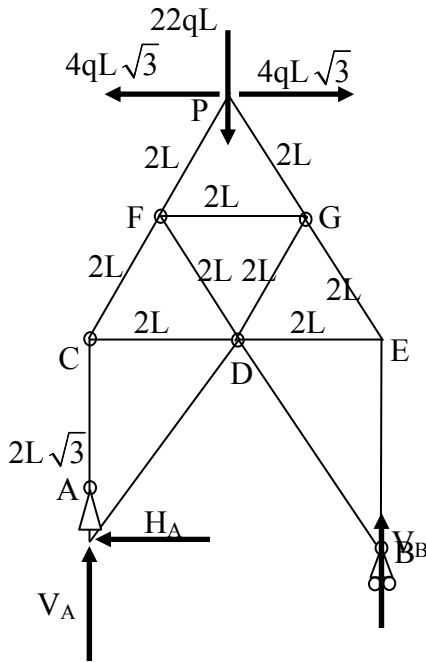
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 3**

1. La tensión soportada en P,  $T_p = 13qL = qy_p \Rightarrow y_p = 13L$

Por otro lado, dada la simetría de la catenaria, la longitud del arco en el punto P será de  $11L$ . Por tanto,

$$11L = \sqrt{y_p^2 - \alpha^2} \Rightarrow 121L^2 = 169L^2 - \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 4L\sqrt{3}$$

2.



Las fuerzas que actúan sobre la torre son las dibujadas. Aplicando las ecuaciones de equilibrio:

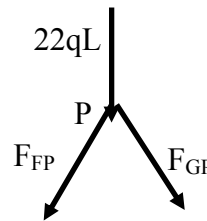
$$H_A = 0$$

$$V_A + V_B = 22qL$$

$$4L \cdot V_B - 22qL \cdot 2L = 0 \Rightarrow V_B = 11qL$$

$$V_A = 11qL$$

Aislando el nudo P



$$F_{FP} \frac{\sqrt{3}}{2} + F_{GP} \frac{\sqrt{3}}{2} + 22qL = 0$$

$$F_{GP} = F_{FP} = -\frac{22qL\sqrt{3}}{3}$$

Aislando el nudo B,  $F_{BD}=0$ , ya que no existe ninguna fuerza en dirección horizontal.

Aislando el nudo A,  $F_{AD}=0$ , ya que no existe ninguna fuerza en dirección horizontal.

3. Puesto que el cable se apoya sobre el suelo en una longitud  $10L$ , la longitud entre el punto más bajo de la nueva catenaria y el punto P es  $12L$ . Además, la ordenada del punto P será  $\alpha + 4L\sqrt{3}$ . Por tanto:

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

$$s_p = \sqrt{y_p^2 - \alpha^2} \Rightarrow 144L^2 = (\alpha + 4L\sqrt{3})^2 - \alpha^2 = 48L^2 + 8\alpha L\sqrt{3}$$

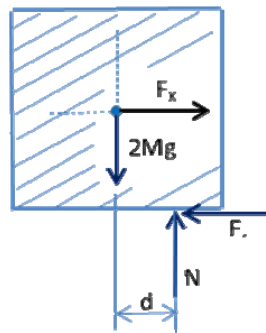
$$\alpha = 4L\sqrt{3}$$

4. Aislando la parte de cable apoyada en el suelo:

$$T_0 = q\alpha = 4qL\sqrt{3} = f_{\min} q \cdot 10L \Rightarrow f_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

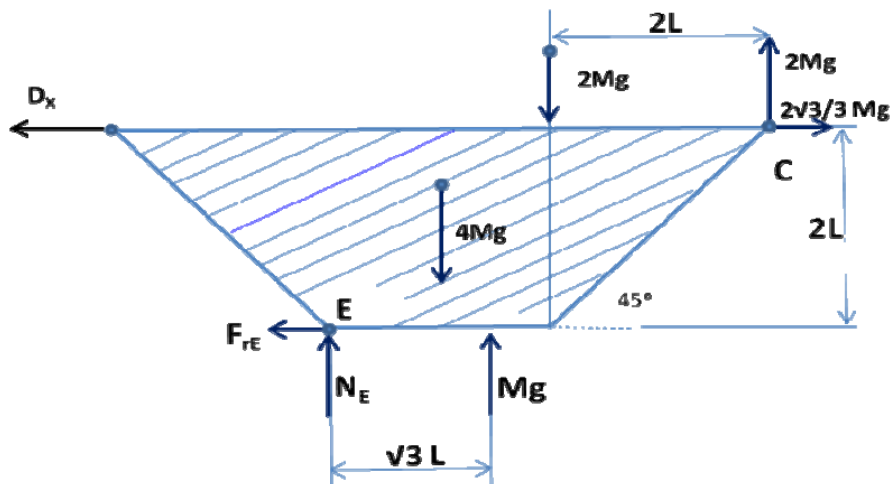
**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 4**



$$F_K = F_r = \frac{2}{3} \cdot 2Mg = \frac{4}{3} Mg \longrightarrow F_K = \frac{2}{3} \frac{Mg}{L} \cdot \Delta \longrightarrow \underline{\Delta = BC_x = 2L}$$

$$N = 2Mg$$

$$\sum M_p = 0 \rightarrow 2Mg \cdot d - \frac{4}{3} Mg = 0 \longrightarrow \underline{d = \frac{2}{3} L}$$







Ingeniarien Goi Eskola  
Escuela Superior de Ingenieros  
Bilbao



Euskal Herriko Unibertsitatea  
Universidad del País Vasco

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

$$-D_x - F_{rE} + \frac{2\sqrt{3}}{3}Mg = 0$$

$$N_E - 4Mg + Mg - 2Mg + 2Mg = 0 \longrightarrow N_E = 3Mg$$

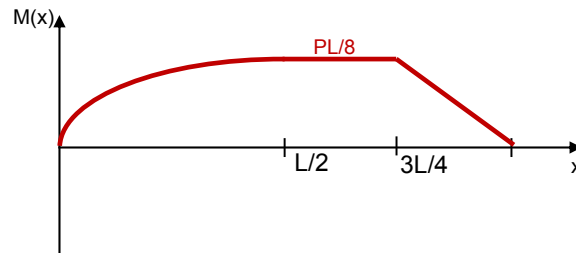
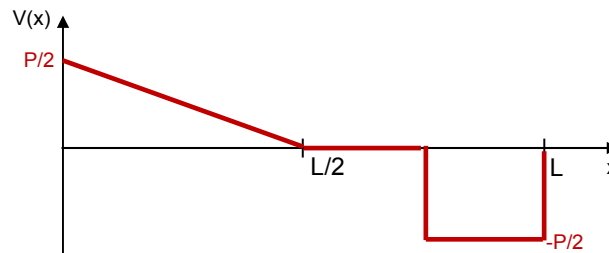
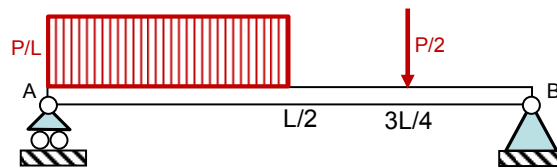
$$\sum M_E = 0 \rightarrow D_x \cdot 2L - 4Mg \cdot L + Mg \cdot \sqrt{3}L - 2Mg \cdot 2L + 2Mg \cdot 4L - \frac{2\sqrt{3}}{3}Mg \cdot 2L = 0 \longrightarrow D_x = \frac{\sqrt{3}}{6}Mg$$

$$F_{rE} = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg \longrightarrow f_E = \frac{F_{rE}}{N_E} = \frac{\sqrt{3}/2Mg}{3Mg} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN ORDINARIO. 17-1-2015.**  
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 5**

1. *Página 188-190. Libro “Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática”.*



$$0 < x < L/2$$

$$V(x) = \frac{P}{2} - \frac{Px}{L}$$

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \frac{P}{L}$$

$$M(x) = \int_0^x V(x) dx = \frac{Px}{2} - \frac{Px^2}{2L}$$

$$L/2 < x < 3L/4$$

$$V(x) = 0$$

$$q(x) = 0$$

$$M(x) = \int_{L/2}^x V(x) dx = \frac{PL}{8}$$

$$3L/4 < x < L$$

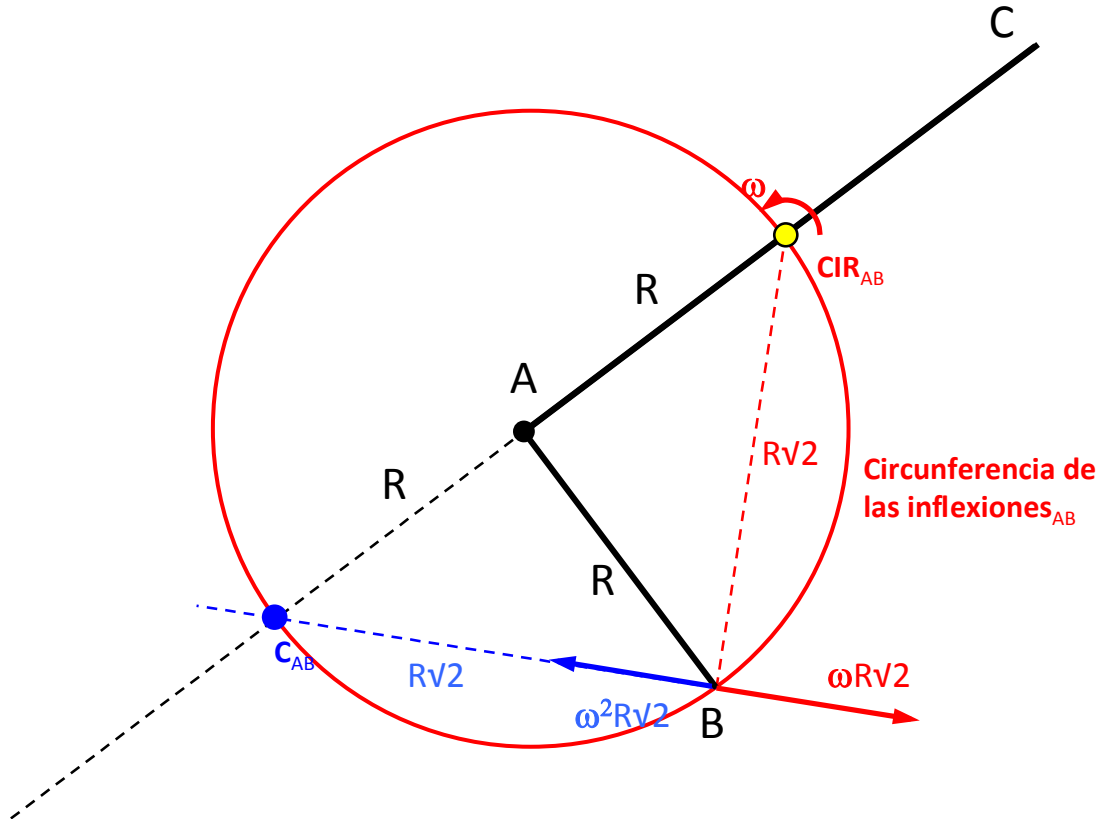
$$V(x) = -P/2$$

$$q(x) = 0$$

$$M(x) = \int_{3L/4}^x V(x) dx = \frac{PL}{8} - \frac{P(x-3L/4)}{2}$$

2. *Página 368-369. Libro “Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática”.*

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación



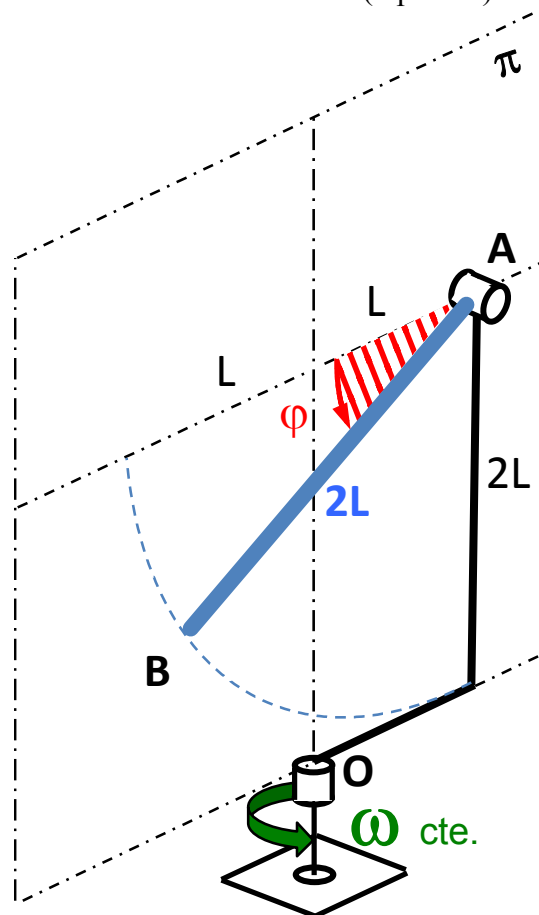
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**EJERCICIO 1 TIEMPO: 45'**

La barra **AB** de la figura gira dentro de un plano  $\pi$  según un ángulo  $\varphi = \omega t$ , siendo su extremo **A** un punto del plano  $\pi$ . El plano  $\pi$  gira a su vez alrededor de un eje vertical fijo con una velocidad angular  $\omega$  constante en el sentido que se indica en la figura.

Determinar:

1. Velocidad angular de la barra **AB** y velocidad de **B** en el instante inicial. (2 puntos)
2. Ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento de la barra **AB** en ese instante (2 puntos).
3. Aceleración angular de la barra en el instante inicial. (3 puntos)
4. Aceleración de **B** en ese instante inicial. (3 puntos)

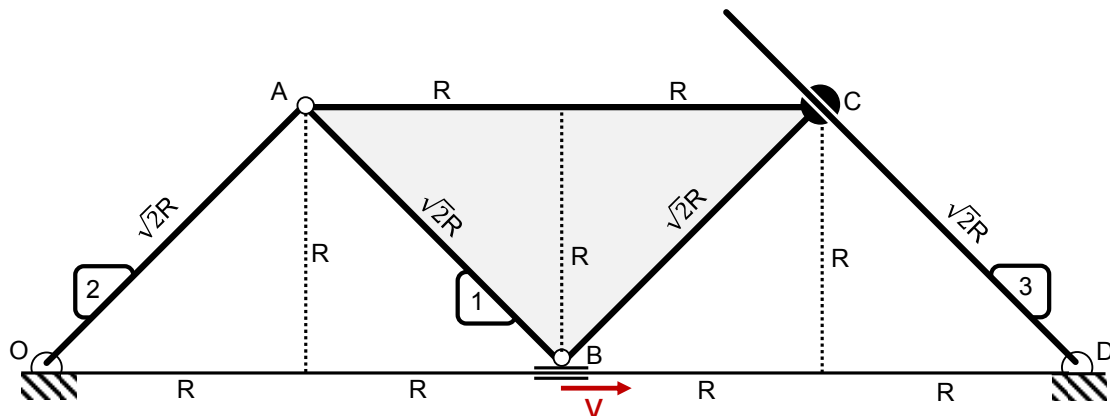


1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**EJERCICIO 2 TIEMPO: 45'**

El sólido 1 del sistema mecánico de la figura es un triángulo ABC que en B está articulado a una deslizadera que se desplaza horizontalmente con velocidad  $v = \omega 2R$  constante. En A está articulado al sólido 2 que es una barra de longitud  $\sqrt{2}R$  que gira alrededor del punto O. Por otra parte, el triángulo está articulado en C a una rótula a través de la cual pasa la barra 3, la cual gira alrededor del punto D. Para la posición de la figura se pide:

1. Centros Instantáneos de Rotación de los tres sólidos. (1 punto)
2. Velocidad angular absoluta de los tres sólidos. (3 puntos)
3. Polos de aceleraciones de los tres sólidos. (1 punto)
4. Aceleración angular absoluta de los sólidos 1 y 2. (2 puntos)
5. Aceleración angular absoluta de la barra 3. (3 puntos)



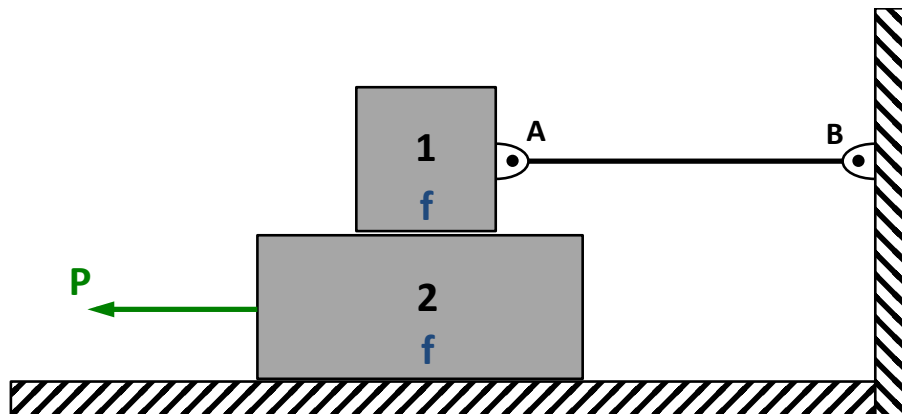
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**EJERCICIO 3 TIEMPO: 30'**

Sean dos bloques 1 y 2, donde 1 apoya sobre 2 y a su vez está sujeto a la pared vertical por el cable horizontal AB. Entre todas las superficies de contacto existe un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,4$ . La masa del bloque 1 es 20 Kg. y la masa del bloque 2 es 30 Kg. Sobre el bloque 2 se aplica una fuerza P, tal como se indica en la figura. Considérense dimensiones de los bloques despreciables.

Calcular:

- 1) Diagrama de sólido rígido de los bloques 1 y 2. (3 puntos)
- 2) El valor de P más pequeño para iniciar el movimiento del bloque 2. (4 puntos)
- 3) El valor de P más pequeño para iniciar el movimiento del bloque 2 si se retira el cable AB. (3 puntos)



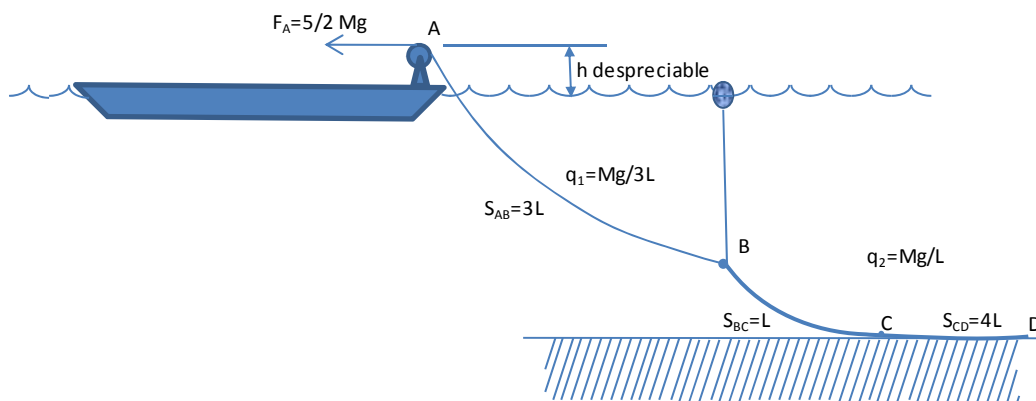
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**EJERCICIO 4 TIEMPO: 45'**

La barcaza flotante de la figura se encuentra en equilibrio sujeta al fondo del mar a través de una polea mediante dos tramos de catenaria. Los tramos **AB** y **BD** tienen un peso por unidad de longitud  $q_1 = \frac{Mg}{3L}$  y  $q_2 = \frac{Mg}{L}$  respectivamente, el punto **B** tiene sujeta una boya de masa despreciable sobre la que el agua ejerce una fuerza de empuje de  $\frac{Mg}{2}$ . Se sabe que la fuerza en **A** es  $\frac{5}{2}Mg$ , las longitudes de los tramos **AB=3L**, **BC=L** y **CD=4L** son conocidas y que en el punto **C** la tangente es horizontal.

Se pide calcular:

- La tensión horizontal  $T_0$ . (3 puntos)
- El coeficiente de rozamiento  $f_{\min}$  entre el cable y el fondo. (3 puntos)
- La altura de la barcaza al fondo. (4 puntos)



1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

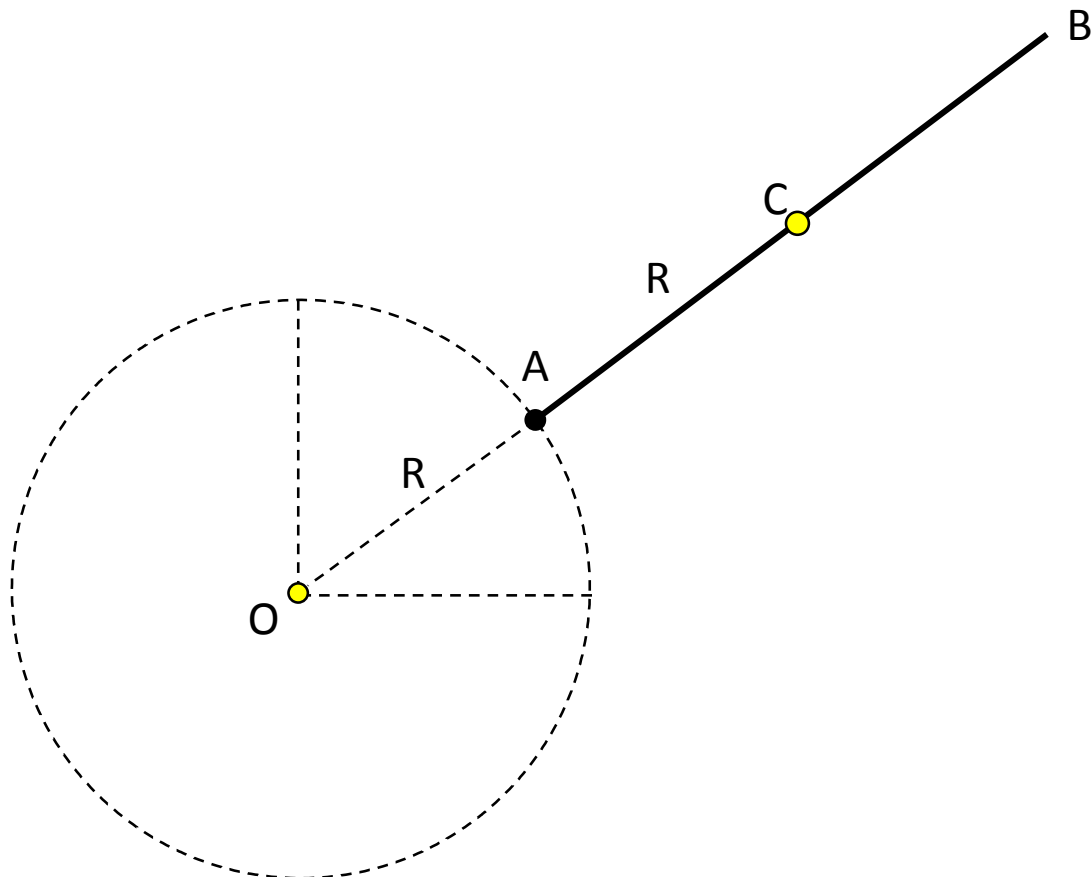
**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**EJERCICIO 5 TIEMPO: 40'**

1. Celosías: Definir, demostrar la forma de trabajo de sus elementos, Clasificación de las Celosías, Isostaticidad de las celosías. (5 puntos)

2. La barra AB se mueve de tal forma que el punto A traza una trayectoria circular de centro O con velocidad constante, y la barra pasa permanente por C.

Obtener, el polo de velocidades, la velocidad angular de la barra AB, y el polo de aceleraciones de la barra AB en el instante en que O, A y C están alineados, sabiendo que la aceleración angular de AB es nula. (3 puntos)

Obtener la aceleración del punto de la barra que está en C usando la construcción gráfica de aceleraciones. (2 puntos)





1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**  
**RESOLUCIÓN EJERCICIO 1**

$$\vec{\Omega}_{AB} = \dot{\varphi} \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3 = \omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3$$

$$\vec{\Omega}_{\Pi} = \vec{\Omega}_{xyz} = \omega \vec{e}_3$$

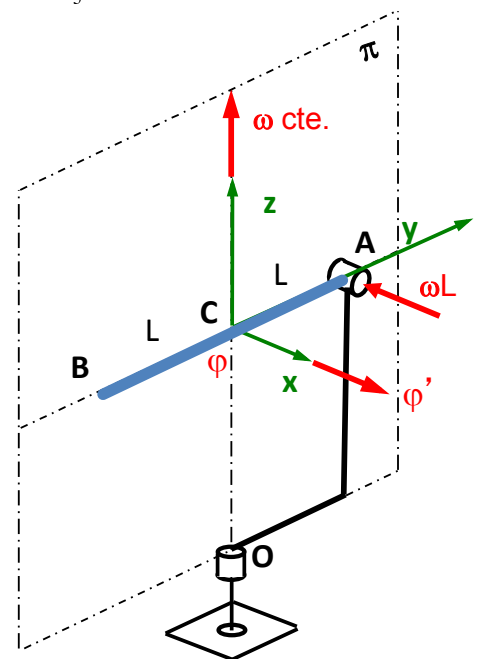
$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{\Omega}_{\Pi} \times \vec{CA} = \vec{0} + \omega \vec{e}_3 \times L \vec{e}_2 = -\omega L \vec{e}_1$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega}_{AB} \times \vec{AB} = -\omega L \vec{e}_1 + (\omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3) \times -2L \vec{e}_2 = \omega L \vec{e}_1 - 2\omega L \vec{e}_3$$

$$\vec{AI} = \lambda \vec{\Omega}_{AB} + \frac{\vec{\Omega}_{AB} \times \vec{V}_A}{\Omega_{AB}^2} = \lambda (\omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3) + \frac{1}{2\omega^2} (-\omega^2 L \vec{e}_2)$$

$$\begin{cases} x - 0 = \lambda \omega \\ y - L = -\frac{L}{2} \\ z - 0 = \lambda \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = \frac{L}{2} \end{cases}$$



$$\vec{\alpha}_{AB} = \frac{d}{dt} [\omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3] = \vec{0} + \vec{\Omega}_{xyz} \times \vec{\Omega}_{AB} = \omega^2 \vec{e}_2$$

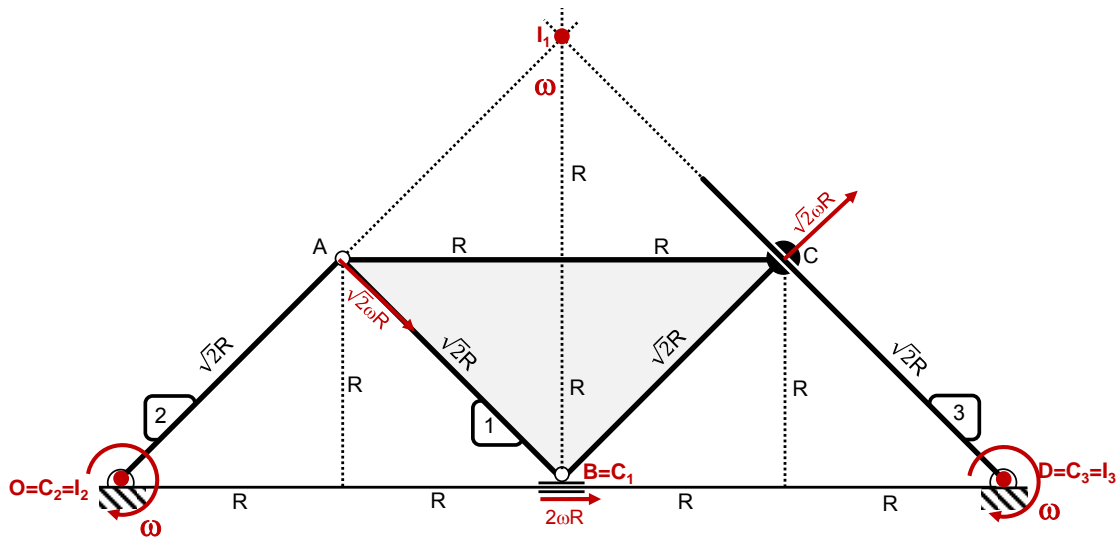
$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{\Pi} \times \vec{CA} + \vec{\Omega}_{\Pi} \times (\vec{\Omega}_{\Pi} \times \vec{CA}) = \vec{0} + \vec{0} + \omega \vec{e}_3 \times (\omega \vec{e}_3 \times L \vec{e}_2) = -\omega^2 L \vec{e}_2$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\Omega}_{AB} \times (\vec{\Omega}_{AB} \times \vec{AB}) =$$

$$= -\omega^2 L \vec{e}_2 + \omega^2 \vec{e}_2 \times -2L \vec{e}_2 + (\omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3) \times [(\omega \vec{e}_1 + \omega \vec{e}_3) \times -2L \vec{e}_2] = 3\omega^2 L \vec{e}_2$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.  
RESOLUCIÓN EJERCICIO 2**



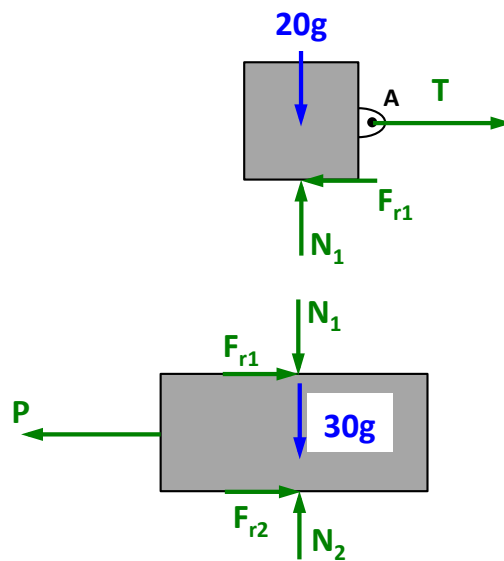
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \alpha_1 \mathbf{k} \wedge (-R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) - \omega^2 (-R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_O + \alpha_2 \mathbf{k} \wedge (R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) - \omega^2 (R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega^2 \mathbf{k} \\ \alpha_2 &= -\omega^2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \alpha_1 \mathbf{k} \wedge (R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) - \omega^2 (R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_{Ca3} + \mathbf{a}_{Cr3} + \mathbf{a}_{Cc3} \\ \mathbf{a}_{Ca3} &= \mathbf{a}_D + \alpha_3 \mathbf{k} \wedge (-R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) - \omega^2 (-R\mathbf{i} + R\mathbf{j}) \\ \mathbf{a}_{Cr3} &= a_r \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) \\ \mathbf{a}_{Cc3} &= 2\omega_3 \wedge \mathbf{v}_{Cr3} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_3 &= \omega^2 \mathbf{k} \\ \mathbf{a}_r &= 2\omega^2 R (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \end{aligned}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.**

**RESOLUCIÓN EJERCICIO 3**



$$\begin{cases} F_{r1} - T = 0 \\ N_1 - 20g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P - F_{r1} - F_{r2} = 0 \\ -N_1 + N_2 - 30g = 0 \end{cases}$$

En 2.)  $F_{r1} = 0,4N_1$   
 $F_{r2} = 0,4N_2$

$$N_1 = 20g$$

$$F_{r1} = T = 8g$$

$$N_2 = 50g$$

$$F_{r2} = 20g$$

$$P = 28g$$

En 3.)  $T = 0$   
 $F_{r2} = 0,4N_2$

$$N_1 = 20g$$

$$F_{r1} = T = 0$$

$$N_2 = 50g$$

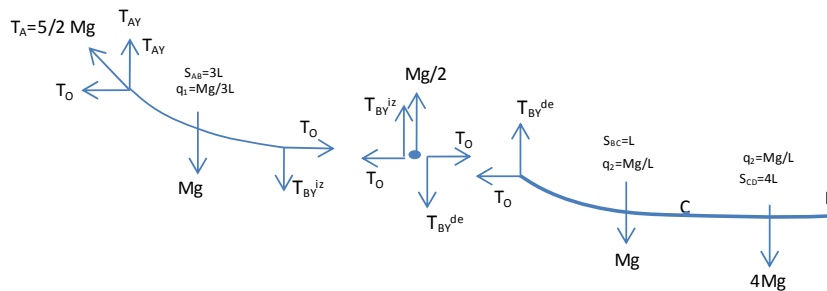
$$F_{r2} = 20g$$

$$P = 20g$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

## MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.

### RESOLUCIÓN EJERCICIO 4



$$T_{BY}^{de} = \frac{Mg}{L} \cdot L = Mg$$

$$T_{BY}^{iz} = Mg - Mg/2 = \frac{Mg}{2}$$

$$T_{AY} = \frac{Mg}{3L} \cdot 3L + \frac{Mg}{2} = \frac{3}{2} Mg$$

$$T_O = \sqrt{T_A^2 - T_{AY}^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} Mg = \underline{\underline{2Mg}}$$

$$\underline{\underline{f_{\min}}} \geq \frac{T_O}{N} = \frac{2Mg}{Mg/L \cdot 4L} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$T_B^{iz} = \sqrt{(1/2 Mg)^2 + (2Mg)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2} Mg$$

$$h_{AB} = y_A - y_B^{iz} = \frac{5/2 Mg - \sqrt{17}/2 Mg}{Mg/3L} = \frac{15 - 3\sqrt{17}}{2} L$$

$$T_B^{de} = \sqrt{(Mg)^2 + (2Mg)^2} = \sqrt{5} Mg$$

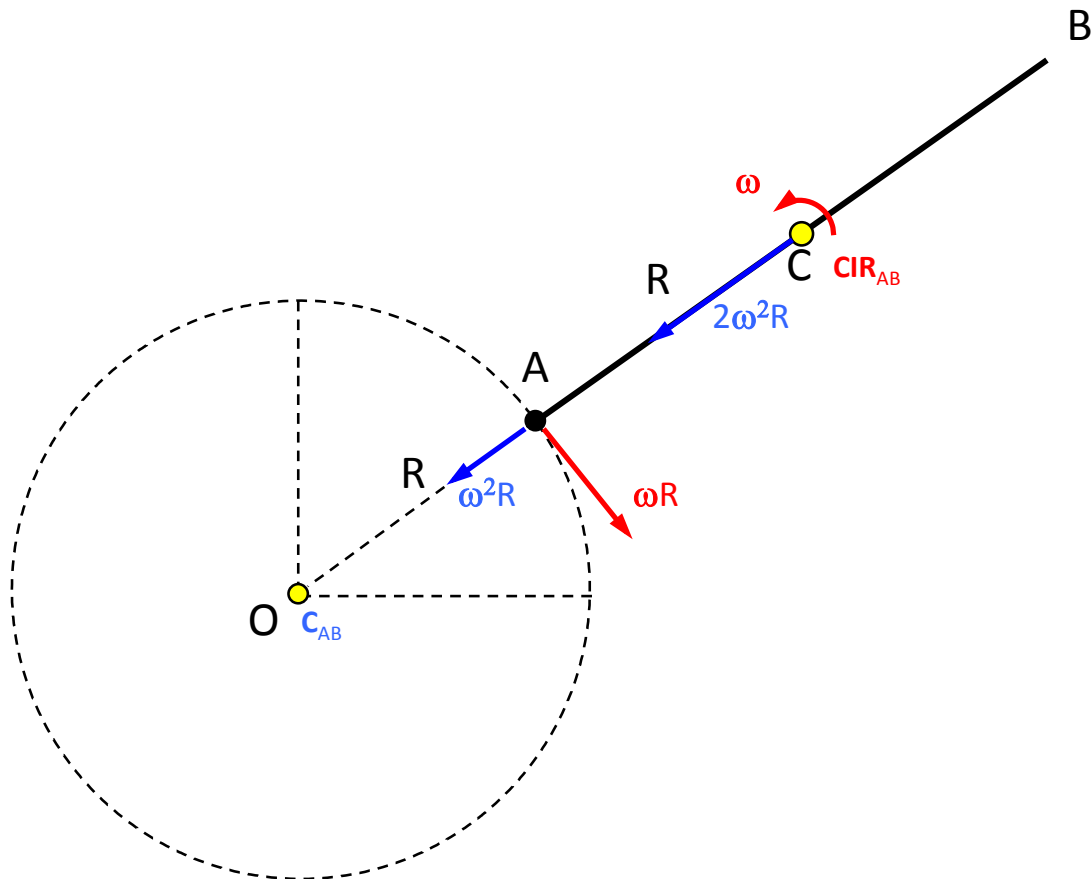
$$h_{BC} = y_B^{de} - \alpha = \frac{\sqrt{5} Mg - 2Mg}{Mg/L} = (\sqrt{5} - 2) L$$

$$\underline{\underline{h_{TOTAL}}} = h_{AB} + h_{BC} = \underline{\underline{\left( \frac{11}{2} + \sqrt{5} - \frac{3\sqrt{17}}{2} \right) L}}$$

1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MECANICA. EXAMEN EXTRAORDINARIO. 17-6-2015.  
RESOLUCIÓN EJERCICIO 5**

1. Páginas 151-165 Libro “Mecánica Aplicada: Estática y Cinemática”.
- 2.

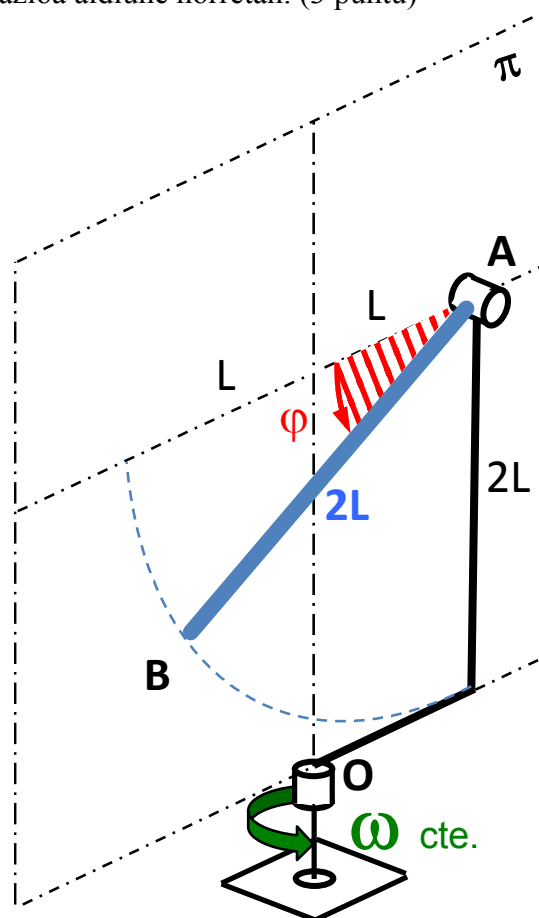


1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MEKANIKA. EZ OHIKO AZTERKETA. 2015-6-17.**  
**LEHEN ARIKETA. DENBORA: 45'**

Irudiko **AB** barrak  $\pi$  planoaren barnean bira egiten du  $\varphi = \omega t$  angeluarekin, bere **A** muturra  $\pi$  planoaren puntu bat izanda.  $\pi$  planoak ardatz bertikal finko baten inguruan baita bira egiten du ere  $\omega$  abiadura angeluar konstantearekin, irudian ikusten den bezala. Lortu:

1. **AB** barraren abiadura angeluarra eta hasierako aldiunean **B**-ren abiadura. (2 puntu)
2. **AB** barraren aldiuneko biraketa eta labainketako ardatzaren ekuazioa aldiune horretan (2 puntu).
3. Barraren azelerazio angeluarra hasierako aldiunean. (3 puntu)
4. **B**-ren azelerazioa aldiune horretan. (3 puntu)

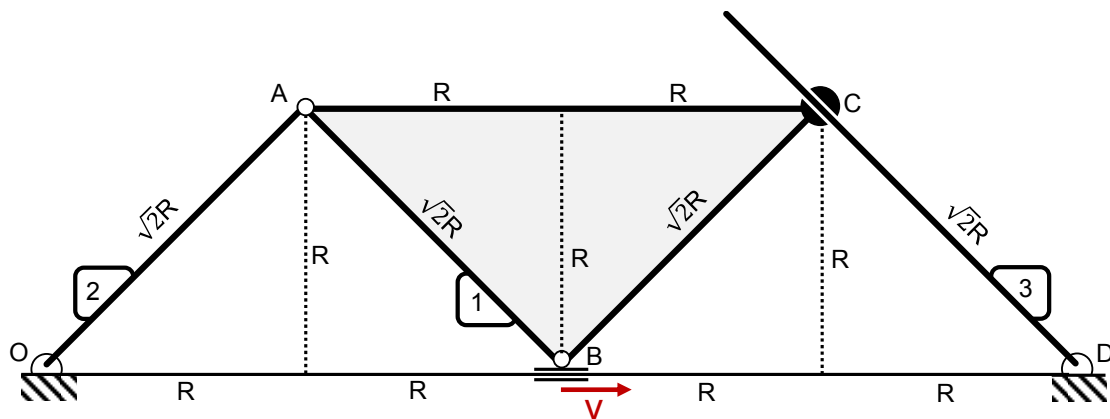


1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MEKANIKA. EZ OHIKO AZTERKETA. 2015-6-17.**  
**BIGARREN ARIKETA. DENBORA: 45'**

Irudiko sistema mekanikoaren **1** solidoa **ABC** triangelu bat da non **B**-n giltzatuta dago labainkari bati, horizontalki  $v = \omega 2R$  abiadura konstantearekin mugitzen dena. **A**-n giltzatuta dago  $\sqrt{2}R$  luzerako **2** barrari, hau **O** puntuaren inguruan biratzen duena. Triangeluaren beste aldetik **C**-n giltzatuta dago errotula bati nori **3** barra zeharkatzen zaion, barra honek **D**-ren inguruan bira egiten du. Irudikapenaren aldiunerako eskatzen da:

1. Hiru solidoen Aldiuneko Biraketa Zentroak. (Puntu 1)
2. Hiru solidoen abiadura angeluar absolutuak. (3 puntu)
3. Hiru solidoen azelerazioen poloak. (Puntu 1)
4. **1** eta **2** solidoen azelerazio angeluar absolutuak. (2 puntu)
5. **3** barraren azelerazio angeluar absolutua. (3 puntu)



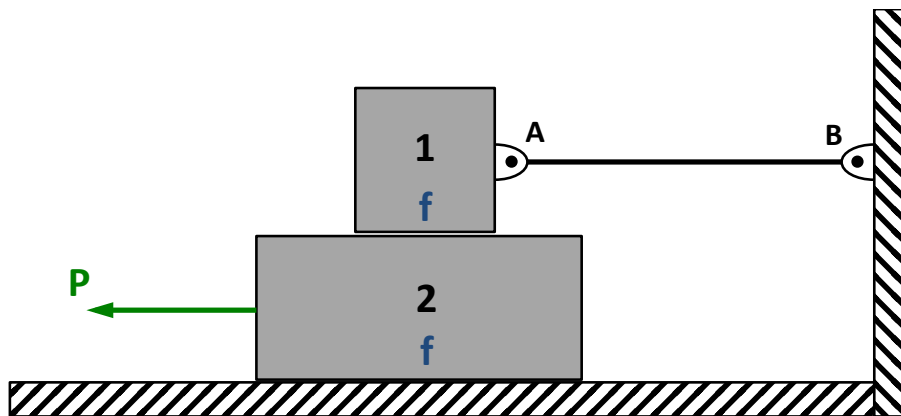
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MEKANIKA. EZ OHIKO AZTERKETA. 2015-6-17.**  
**HIRUGARREN ARIKETA. DENBORA: 30'**

**1** eta **2** bloke izan bedi, non **1** **2**-ren gainean utzita dago eta paret bertikalari **AB** kablearen bidez lotzen den. Ukipeneko gainazal guztien artean marruskadura koefizientea  $\mu=0,4$  bera dago. **1** blokearen masa **20 Kg**-koa eta **2** blokearena **30 Kg**-koa dira. **2** blokean **P** indar bat aplikatzen da, irudian ikusten den bezala. Kotsideratu blokeek dimentsiorik ez dutela.

Kalkulatu:

- 1) **1** eta **2** blokeen solido zurrunen diagrama. (3 puntu)
- 2) **P** indarraren balio txikiena **2** blokea mugimenduan hasteko. (4 puntu)
- 3) **P** indarraren balio txikiena **2** blokea mugimenduan hasteko **AB** kablea kentzen bada. (3 puntu)





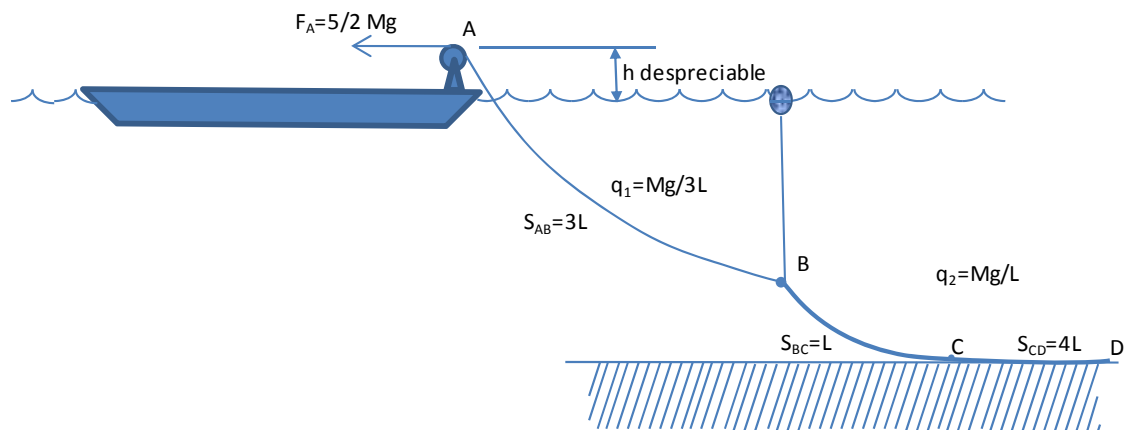
1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MEKANIKA. EZ OHIKO AZTERKETA. 2015-6-17.**  
**LAUGARREN ARIKETA. DENBORA: 45'**

Irudiko gabarra flotatzailea orekan aurkitzen da polea baten zehar itsas hondoari lotuta dauden bi katenaria-tarteren bidez. **AB** eta **BD** tarteeak  $q_1 = \frac{Mg}{3L}$  eta  $q_2 = \frac{Mg}{L}$  luzera unitateko pisua dute hurrenez hurren eta **B** puntuak masa mesprezagarriko buia du noren gainean urak  $\frac{Mg}{2}$  bulkada indar bat egiten duen. Jakinda **A**-n indarra  $\frac{5}{2}Mg$ -koa eta zatien luzerak **AB**= $3L$ , **BC**= $L$  eta **CD**= $4L$ -koa eta **C**-n ukitzaila horizontala ezagunak direla.

Eskatzen da kalkulatzeara:

- $T_O$  tentsio horizontala. (3 puntu)
- Kablea eta hondoaren arteko  $f_{\min}$  marruskadura koefiziente minimoa. (3 puntu)
- Gabarra eta hondoaren arteko altuera. (4 puntu)



1. deitura / 1er apellido		Titulazioa / Titulación
2. deitura / 2º apellido		Ikasgaia / Asignatura
Izena / Nombre		Data / Fecha
Ikasturtea / Curso	Taldea / Grupo	Kalifikazioa / Calificación

**MEKANIKA. EZ OHIKO AZTERKETA. 2015-6-17.**  
**BOSTGARREN ARIKETA. DENBORA: 40'**

1. Barrasareak: Definitu eta frogatu bere elementuen lan egiteko modua. Barrasareen sailkapena, isostatikotasuna. (5 puntu)

2. **AB** barra mugitzen da, **A** puntuak **O** puntuaren inguruan abiadura konstante duen ibilbide zirkular bat eginez eta barra **C** puntutik pasaziz beti.

Eskatzen da lortzea, **AB** barraren abiaduren poloa, barraren abiadura angeluarra, eta azelerazioen poloa **O**, **A** eta **C** lerrokatuta dauden aldiunean, jakinda **AB**-ren azelerazio angeluarra nulua dela aldiune horretan. (3 puntu)

Azelerazioen eraikuntza grafikoa erabiliz lortu barraren **C** puntuaren azelerazioa. (2 puntu)

