Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

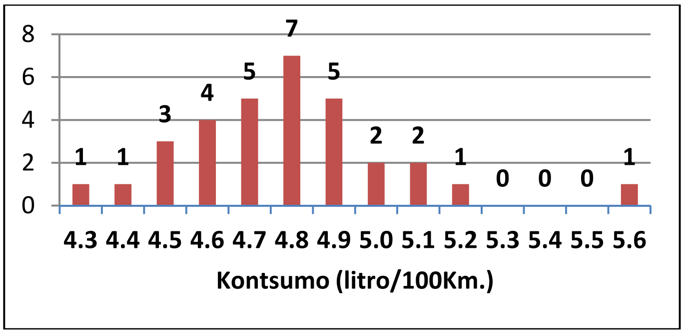
2012-2013 LEHEN DEIALDIA
EBAZPENA

***Noten argitalpena**: 2013ko ekainak 14, 18:00etan Moodle plataforman.*
***Azterketaren berrikuspena**: 2013ko ekainak 18, 11:00etan Matematika Aplikatutako Laborategian (7I1).*

---

1. ARIKETA

Automobil-enpresa batek bere ibilgailu baten motorra gutxiago kontsumitzen duen beste motor batengatik aldatu nahi du. Horretarako ondorengo barra diagraman motor berri hauen lagin baten kontsumoak adierazten dira (litro/100 km):



(a) Zehaztu ondoko estatistikoak: batez bestekoa, desbiderapen tipikoa, mediana eta moda. (4 puntu)

Ebazpena

Lagineko estatistikoak ondorengoak dira:

- Laginaren tamaina: $n=\sum_{i=1}^{i=14} n_i = 32$
- Batez bestekoa: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=14} n_i \cdot x_i = 4.7875$
- Mediana: $Me = 4.8$
- Moda: $Mo = 4.8$
- Bariantza: $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})^2 = 0.0623$
- Desbiderapen tipikoa: $s = 0.2537$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

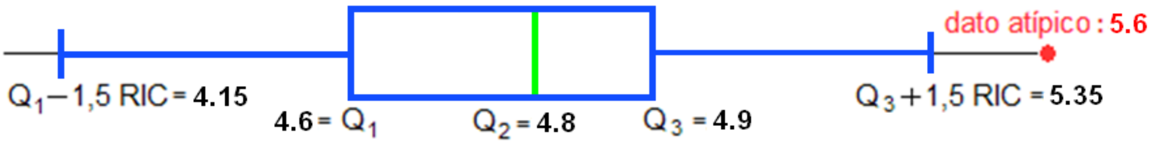
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

(b) Kutxa-diagrama egin (4 puntu).

Ebazpena:

Zenbaki garrantzitsuen laburpena:

- Balio txikiena: $L = 4.3$
- Balio handiena: $H = 5.6$
- Mediana: $Me = 4.8$
- Lehenengo kuartila: $Q_1 = 4.6$
- Hirugarren kuartila: $Q_3 = 4.9$
- Kuartilarteko heina: $RIC = Q_3 - Q_1 = 4.9 - 4.6 = 0.3$
- Behe-muga: $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot RIC = 4.15$
- Goi-muga: $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot RIC = 5.35$



(c) Enpresak laginetik datu atipiko **guztiak** kentzea erabaki du, akats mekanikoengatik edota gidatzeko era deserangikor batengatik izan direlakoan. **Lagin zuzendu** honetarako, kalkulatu batez bestekoa eta desbiderapen tipikoa (2 puntu).

Ebazpena

Lagin zuzenduaren estatistikoak:

- Balio atipikoa (arraroa): $x_{32} = 5.6 \notin [4.15, 5.35]$
- Laginaren tamaina: $n = \sum_{i=1}^{i=10} n_i = 31$
- Batez bestekoa: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=10} n_i \cdot x_i = 4.7613$
- Bariantza: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=10} (x_i - \bar{x})^2 = 0.0424$
- Desbiderapen tipikoa: $s = 0.2058$

2. ARIKETA

Automobil-enpresak merkatutik kendu nahi duen motorrak 100 km-ko batez beste 4,9 litroko kontsumoa ematen du. Erabaki bat hartzeko aurreko **lagin zuzendua** erabiliko da, hots, histograman agertzen dena (5,6) datu atipikoa kenduz.

(a) Motor zaharra kenduko da, %99 konfiantza-mailaz eredu berriak kontsumoa jaisten duela bermatzen bada. Zein izango da hartutako erabakia? (6 puntu)

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

Ebazpena

Datuak:

- Laginaren tamaina: $n = 31$
- Populazioaren batez bestekoa: $\mu = 4{,}9 \;\; l./100km$
- Laginaren batez bestekoa: $\bar{x} = 4.7613 \;\; l./100km$
- Laginaren desbiderapen tipikoa: $s = 0.2058 \;\; l./100km$
- Laginaren kuasidesbiderazioa: $S = 0.2092 \;\; l./100km$
- Askatasun graduak: $gl = \nu = 31 - 1 = 30$
- Konfiantza-maila: $1 - \alpha = 0.99$
- Adierazgarritasun maila: $\alpha = 0.01$

Hipotesia

- Nulua: $H_0 : \mu \geq 4.9 \; litros / 100km$
- Alternatiboa: $H_1 : \mu < 4.9 \; litros / 100km$

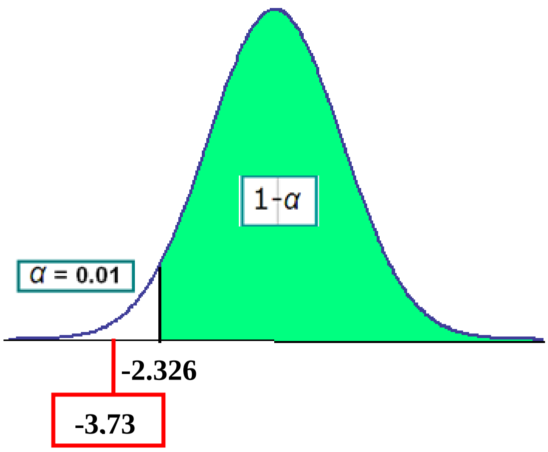
Probarako estatistikoaren balioa: $\boxed{z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{4.76 - 4.9}{0.209/\sqrt{31}} = -3.73}$

Onarpen eremua: $S_0 = [-z_\alpha, \infty)$

- $-z_\alpha = -z_{0.01} = -2.326$
- **SPSS:** =IDF.NORMAL(0.99,0,1)=2.326

$$\boxed{S_0 = [-2.326, \infty)}$$

Kontrastea. $z = -3.73 \notin S_0 \Rightarrow$ **Hipotesi nulua errefusatzen da** $\Rightarrow$ **Hipotesi alternatiboa onartzen da.** Beraz, motor zaharra kentzea erabakitzen da, 100km-ko motor berriaren batez besteko kontsumoa $\mu < 4.9$ litro baita.



(b) Kalkulatu hipotesi nulua onartzea (ez errefusatzea) baimentzen duen adierazgarritasun maila maximoa. Justifikatu emandako emaitza egindako erroarearn bidez. (4 puntu).

p-balioaren kalkulua:

$$p = \max\{\alpha / T(x_1, x_2, ..., x_n) \in S_0\}$$

Hipotesi nulua onartzeko $z = -3.73 \in S_0 = [-z_\alpha, \infty) \Rightarrow -z_\alpha = -3.73$

- ***SPSS*:** =IDF.NORMAL (-3.73,0,1)=0.000097

Beraz: $\boxed{p = 0.000097 \xrightarrow{\times 100} 0.0097\%}$

Adierazgarritasun maila handiena: $p = 0.000097 = \alpha_{\max}$

I motako errorea txikitzen da (hipotesi nulua egia izanik, hipotesi nulua errefusatzeko probabilitatea txikitzen da).

3. ARIKETA

Automobil-enpresak bere azterketan 4,9 batez besteko kontsumoa baino gutxiago kontsumitzen duten motor berrien proportzioa ere estimatu nahi du. Aurreko **lagin zuzendua** erabiliz:

(a) %99 konfiantzaz tarte hori eraiki (5 puntu).

Ebazpena

Datuak:

- Laginaren tamaina: $n = 31$
- Proportzioaren puntu estimazioa: $\hat{p} = \frac{21}{31} = 0.6774$
- $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.5758$
- ***Excel*:** =IDF.NORMAL(0.995,0,1)=2.5758

Konfiantza-tartea:

$$I_p^{1-\alpha} = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \, , \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

$$\boxed{I_p^{0.99} = [0.4612 \, , \, 0.8937]}$$

(b) Zein izan behar da laginaren tamaina, konfiantza maila berdina edukiz, tartearen zabalera 0.20 izateko? (5 puntu)

Ebazpena

Aurreko datuak erabiliz:

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0.1 \Rightarrow 2.5758 \cdot \sqrt{\frac{0.2185}{n}} = 0.1 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.2185}{n}} = 0.0388$$

$$\boxed{n = 144.98 \Rightarrow n = 145}$$

4. ARIKETA

(a) Kutxa batean bi bola gorri daude, beste kutxa batean bi bola zuri daude eta hirugarren kutxa batean bola gorri bat eta bola zuri bat daude. Zoriz kutxa bat aukeratzen da eta bola bat ateratzen da, ateratako bola gorria izanez. Zein da kutxa honen beste bola gorria izateko probabilitatea? (6 puntu)

Ebazpena

Izan bitez hurrengo oinarrizko gertaerak:

- $\boxed{U_i}$: i. kutxa aukeratzen da (i=1,2,3) $\rightarrow P(U_i) = \frac{1}{3}$
- $\boxed{B_i}$: i. bola zuria da (i=1,2)
- $\boxed{R_i}$: *i.* bola gorria da (i=1,2)

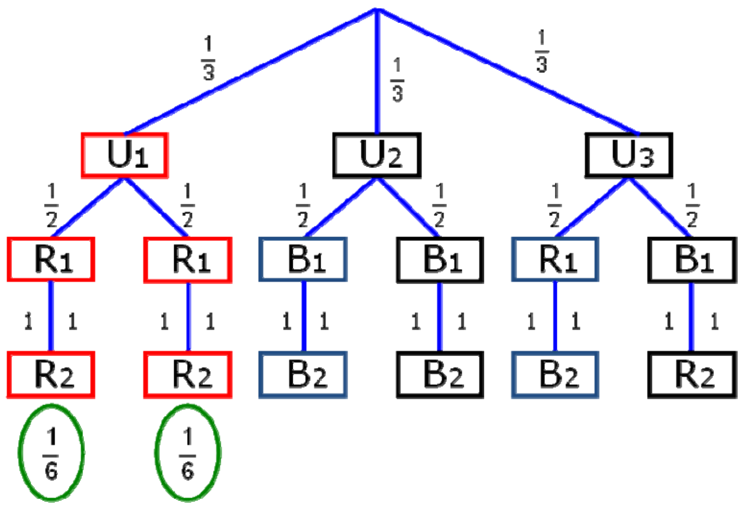
Eskatutako probabilitatea hurrengoa da:

$$P(R_1) = \sum_{i=1}^{i=3} P(U_i)\cdot P(R_1 \mid U_i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{i=3} P(R_1 \mid U_i) = \frac{1}{3}\left(1+0+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P(R_2 \mid R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}}$$

Problema zuhaitza eta lagin-espazioa adierazteko notazio egokia erabiliz intuitiboki ebatz daiteke.

Lehenengo esperimentu aleatorioa hiru kutxetatik zoriz bat aukeratzen datza, kutxa hauek hurrengo bolez osatuta egonik: 1 kutxa (GORRIA, GORRIA), 2 kutxa (ZURIA, ZURIA) eta 3 kutxa (GORRIA, ZURIA). Bigarren zorizko esperimentuan kutxa batetik bola bat ateratzen da, esperimentu honetako kasuak zuhaitzaren bigarren adarretan adierazita daude. Hirugarren esperimentua (azken adarra) lehenengo bola kutxatik ateratzean kutxan geratzen den bola mota da.



Enuntziatuan baldintza bat ezarrita dago (bola bat gorria da), hortaz probabilitate baldintza bat kalkulatu behar dugu. Beraz, hiru posibilitate ekiprobable daude (zuhaitzeko azken adarretan ikus daitekeen bezalaxe):

- 3 kutxan (GORRIA, ZURIA) zegoen bola gorri bakarra hartzea; kasu honetan, kutxan geratzen den bola zuria da
- 1 kutxatik (GORRIA, GORRIA) lehenengo bola gorria hartzea; kasu honetan, beste bola gorria da.
- 1 kutxatik (GORRIA, GORRIA) bigarren bola gorria hartzea; kasu honetan ere, beste bola gorria da.

Beste era batera esanda, aztertutako bola gorria bada, bi kasu daude non aukeratutako kutxa lehenengoa (GORRIA, GORRIA) den eta kasu bakarra non aukeratutako kutxa hirugarrena (GORRIA, ZURIA) den. Ondorioz, bola gorria dela jakinik, beste bola gorria izateko probabilitatea bikoitza da (2/3) eta zuria izateko probabilitatea (1/3).

(b) Maletetarako konbinazio basikoko giltzarrapo batek hiru disko ditu, non disko bakoitzean 0tik 9ra arte dauden 10 digituak agertzen diren. Aireportu bateko handling enpresa bateko langile batek giltzarrapo honen bidez itxita dagoen maleta bat, apurtu gabe, irekitzeko asmoa du. Hau egiteko, 5 minutu dituela eta giltzarrapoko konbinazio bakoitza edukitzeko 4 segundo behar dituela suposatzen da. Zein da langileak maleta irekitzeko probabilitatea? (4 puntu)

Ebazpena

Laplace-ren erregela aplikatuz:

- Kasu posibleak. Giltzarrapoko konbinazioetan digituen ordena garrantzitsua da eta digituak errepikatuta egon daitezke, hortaz, aldakuntzak errepikapenekin dira. Gainera, 10 elementuak hirunaka hartzen direnez:

$$\boxed{VR_{10,3} = 10^3 = 1000}$$

- Aldeko kasuak. Langileak minuturo 15 konbinazio eraikitzen ditu, ondorioz, bost minututan 75 konbinazio proba ditzake.

Beraz, A gertaera "giltzarrapokoa irekitzea" bada:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{aldeko kasuak}}{\text{kasu posibleak}} = \frac{75}{1000} = 0,075}$$

5. ARIKETA

(a) Izan bedi bi dadoen aldibereko jaurtiketaren zorizko esperimentua. Zenbat jaurtiketa egin behar dira sei bikoitz bat (bi sei) behin gutxienez lortzeko probabilitatea 0.5 baino handiago izateko? Deskribatu dagokion zorizko aldagaia (5 puntu).

Ebazpena

Zorizko esperimentuko arrakastaren, porrotaren eta aldagai aleatorioaren deskribapena:

- $\boxed{\mathrm{S}(\text{arrakasta})}$: "jaurtiketa batean sei bikoitza lortzea" $\rightarrow P(S) = \frac{1}{36} = p$
- $\boxed{\mathrm{F}(\text{porrota})}$: "jaurtiketa batean sei bikoitza EZ lortzea" $\rightarrow P(F) = \frac{35}{36} = q$
- $\boxed{X}$: "lortutako sei bikoitz kopurua" $\rightarrow X \approx B\left(n; \frac{1}{36}\right)$

Beraz:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Logaritmo nepertarrak aplikatuz:

$$n \cdot \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\frac{1}{2} \Rightarrow n < \frac{-0.69314718}{-0.02817088} = 24.6050977$$

Ondorioz: $\boxed{n = 25}$

(b) Ixteko zorian dagoen etxetresna elektrikoko enpresa batek 1000 telebistako azken stocka hotel-kate bati oso merke saltzen dizkio, zeren eta 20 telebistek akats larriak dauzkate. Zoriz telebista hauetariko 25 aukeratzen dira eta kateak zabalduko duen hotel berrira bidaltzen dira. Zenbat telebista akastun egon daitezke bidalketan? Interpretatu emaitza. Zein da bidalitako telebista guztiak akats gabeak izateko probabilitatea? (5 puntu)

Ebazpena:

Zorizko esperimentuko arrakastaren, porrotaren eta aldagai aleatorioaren deskribapena:

- $\boxed{\mathrm{S}(\text{arrakasta})}$: "Akats larria duen telebista" $\rightarrow P(S) = \frac{20}{1000} = 0.02 = p$
- $\boxed{\mathrm{F}(\text{porrota})}$: "Akats larririk EZ duen telebista" $\rightarrow P(F) = 0.98 = 1 - p = q$
- $\boxed{X}$: "Bidalitako telebista akastun kopurua" $\rightarrow X \approx H(1000; 25; 0.02)$

euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

Itxaropen matematikoa: $\boxed{E\left[X\right] = n \cdot p = 25 \cdot 0.02 = 0.5}$

Akastuna den telebista erdia bidaltzea ezinezkoa denez, lortutako emaitza emandako baldintzetan egindako bidalketa ugarien emaitzen batez bestekoa bezala interpretatu behar da.

Izan bitez:

- Telebista kopuru totala: $N = 1000$
- Laginaren tamaina: $n = 25$
- Lagineko "arrakasta" kopurua: $i = 0$
- "arrakasta" kopuru totala: $r = 20$

Beraz:

$$P\left(X = i\right) = \frac{\binom{r}{i} \cdot \binom{N-r}{n-i}}{\binom{N}{n}} \Rightarrow P\left(X = 0\right) = \frac{\binom{20}{0} \cdot \binom{980}{25}}{\binom{1000}{25}} = \frac{\frac{980\,!}{25\,! \cdot 955\,!}}{\frac{1000\,!}{25\,! \cdot 975\,!}}$$

$$\boxed{P\left(X = 0\right) = \frac{980\,! \cdot 25\,! \cdot 975\,!}{1000\,! \cdot 25\,! \cdot 955\,!} = 0.5997196}$$

Kasu honetan, banaketa hipergeometrikoa banaketa binomialaren berdintsua da:

$$H\left(N\,;n\,;\frac{r}{N}\right) \xrightarrow[\frac{n}{N} < 0.1]{N \to \infty} B\left(n;p = \frac{r}{N}\right)$$

Ondorioz: $\boxed{P\left(X = 0\right) = \binom{25}{0} \cdot p^{0} \cdot q^{25} = \left(0.98\right)^{25} = 0.60346473}$

- ***SPSS*:** =CDF.HYPER(0,1000,25,20)= 0,5997

Ariketaren ebazpena egiteko SPSS-ren proposatutako funtzioak::

CDF.Poisson(0,0.625)=0.53526
CDF.Hyper(0,1000,25,20)=0.5997
CDF.Normal(0.995,0,1)=0.8401
CDF:Binom(0,25,0.025)=0.5310
IDF:Normal(0.99,0,1)=2.326
CDF.Normal(0.99,0,1)=0.8389
IDF.Normal(-3.73,0,1)=0.000097
IDF.Normal(0.995,0,1)=2.5758