

Advanced Numerical Methods – 7/03/2013 EXAM RESOLUTION

N.B. The following is a scan of the original resolution written by hand in Spanish. The answers should mostly correspond to the actual exam, except for a few minor last-minute changes made to it.

Nota: Lo que sigue es un escaneo de la resolución original escrita a mano en español. Las respuestas deberían corresponderse en su gran mayoría con las preguntas realmente hechas en el examen, excepto por algunos pequeños cambios de última hora hechos a éste.

A) La existencia la demuestro por construcción:

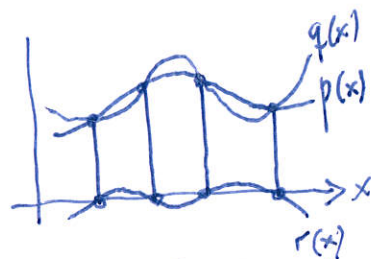
$$p_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

donde se ve que es un polinomio de grado ≤ 3 (pues es combinación lineal de cuatro polinomios de grado 3) y que además pasa por los nodos (por simple sustitución).

La unicidad la demuestro por reducción al absurdo.

Sean p y q dos polinomios de grado ≤ 3 que pasan por los nodos, y sea $r(x) = p(x) - q(x)$ su diferencia.



$r(x)$ debe ser de grado ≤ 3 y anularse en los 4 nodos (ver figura). Por el Teorema Fundamental del Álgebra, el único polinomio de grado ≤ 3 con más de 3 raíces es el idénticamente nulo $\Rightarrow p \equiv q$ c.g.d.

B)

x_i	f_i	$f_{i,1}$	$f_{i,2}$	$f_{i,3}$			
0	1						
1	4	3					
1	4	-2	-5				
1	4	-2	-3	2			
2	1	-3	-1	2	0		
3	4	3	3	2	0	0	
3	4	10	7	2	0	0	0

He calculado todo de la forma habitual salvo cuando ésta daba $\frac{0}{0}$, en cuyo caso he usado las derivadas proporcionadas. Concretamente, $f_{2,1} = f_{3,1} = -2 = p'(1)$; $f_{0,1} = 10 = p'(3)$; $f_{3,2} = -3 = p''(1)/2!$ (números marcados con un círculo).

Ésta se llama una tabla de diferencias divididas con repeticiones.

No se puede usar diferencias finitas porque, aunque aparentemente los nodos están igualmente espaciados, no es así: hay nodos múltiples ("infinitamente juntos"), con lo que no podríamos incorporar a la tabla la información sobre las derivadas.

C) De la tabla: $p_3(x) = 1 + 3(x-0) - 5(x-0)(x-1) + 2(x-0)(x-1)^2 + 0 + 0 + 0 =$

$$p_3(x) = 1 + 3x - 5x(x-1) + 2x(x-1)^2$$

Es de grado 3 porque los tres últimos coeficientes son 0 (los correspondientes a términos de grado 4, 5 y 6). También se ve en que la columna de diferencias divididas de orden 3 es constante (igual a 2), con lo que la 3ª derivada es constante ≠ 0, y sólo los polinomios de grado 3 tienen 3ª derivada cte ≠ 0.

D) $f_{i,3} = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \Rightarrow f^{(3)}(\xi) = f_{i,3} \cdot 3! = 2 \cdot 3! = 12 = p^{(3)}(x)$ (constante como sabíamos)

Lo puedo verificar fácilmente. El término de grado 3 de $p_3(x)$ es $2x^3 \Rightarrow p' = 6x^2 + \dots \Rightarrow p'' = 12x + \dots \Rightarrow p''' = 12$ OK.
Falta enunciar el resultado utilizado (pregunta que añadiré a posteriori).

E) No y no. La unicidad del polinomio oscilador también se puede demostrar; en lugar de "número de nodos distintos" tendremos ahora "número de condiciones de interpolación". Como nos dan 7 condiciones, el único polinomio de grado ≤ 6 que las cumpla será $p(x)$.
Nota: de hecho, el $p_3(x)$ proporcionado cumple las condiciones (por si alguien quiere comprobarlo).

F) No puedo descartarlo, porque el grado es superior a 6. Para obtener otros polinomios de grado 7 que también cumplan las condiciones de interpolación, basta añadir una condición más a las condiciones originales (otro nodo, u otra derivada) y calcular el nuevo polinomio oscilador. Salvo mucha casualidad, será de grado 7.

G) Reorganizando en forma análoga a la de Hörner:

-3-

$$p_3(x) = \{ [2(x-4) - 5] (x-1) + 3 \} x + 1$$

$$p_3(0.25) = \{ \underbrace{[\underbrace{2(-0.75) - 5}_{-1.5}] (-0.75) + 3}_{-6.5} \} \cdot 0.25 + 1 = \boxed{2.96875}$$
$$\underbrace{4.875}_{7.875}_{1.96875}$$

La evaluación es óptima en coste computacional (mínimo número de multiplicaciones), en almacenamiento en memoria (si se programa adecuadamente), y en la propagación de los errores de redondeo (que es menos amplificada que mediante la evaluación "directa" del polinomio).

H) El polinomio $p(x)$ de grado ≤ 6 es único, luego con aritmética exacta habría obtenido el mismo valor de $p(\pi)$.

Sin embargo, con aritmética de precisión finita probablemente no. (porque los errores de redondeo se propagarían de forma diferente).
Esperaría que fuera mejor este último valor de $p(\pi)$, porque las cuatro primeras filas de la tabla usan sólo información de los nodos $x_0=0, x_1=1$, que se encuentran más alejados de $x=\pi=3.14\dots$. En cambio las 4 últimas filas usan información de los nodos $x_i = \{1, 2, 3, 4\}$, más próximos a π . Normalmente, cuanto más alejado está x de los nodos, más se amplifican los errores de redondeo.

A) Los nodos serán las raíces de $\psi_4(x)$: $\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} = 0$.

llamando $z = x^2$ y multiplicando por 8: $35z^2 - 30z + 3 = 0$

$$\Rightarrow z = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 35 \cdot 3}}{2 \cdot 35} = \begin{cases} 0.116 \\ 0.744 \end{cases} \Rightarrow x_i = \{-\sqrt{0.744}, -\sqrt{0.116}, \sqrt{0.116}, \sqrt{0.744}\}$$

$$= \boxed{\text{Nodos } \{-0.861, -0.340, 0.340, 0.861\}} \quad (\text{que coinciden con los del Apéndice}).$$

Con 4 nodos ($n=3$) integrará exactamente polinomios de

hasta grado $2n+1 = 7$. Esto es fácil de recordar así: con 4 nodos puedo elegir 8 parámetros (4 nodos y 4 coeficientes), así que puedo aspirar a imponer 8 condiciones (la integración exacta de $1, x, x^2, \dots, x^7$, y por tanto de cualquier combinación lineal de ellos).

B) Bastará imponer la integración exacta de $1, x, x^2, x^3$ en $[-1, 1]$:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dx &= 2 = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 1 \\ \int_{-1}^1 x dx &= 0 = A_0(-0.861) + A_1(-0.340) + A_2(0.340) + A_3(0.861) \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= 2 \frac{1^3}{3} = A_0(-0.861)^2 + A_1(-0.340)^2 + A_2(0.340)^2 + A_3(0.861)^2 \\ \int_{-1}^1 x^3 dx &= 0 = A_0(-0.861)^3 + A_1(-0.340)^3 + A_2(0.340)^3 + A_3(0.861)^3 \end{aligned} \right.$$

Este sistema lineal 4×4 nos daría los 4 coeficientes. Su solución son los coeficientes de la regla correspondiente a $n=3$, que en el Apéndice se ve que son:

$$\boxed{A_1 = A_2 = 0.652; A_0 = A_3 = 0.348}$$

C) El término de error debe ser de la forma $E = K f^{(8)}(\xi)$ con $\xi \in (-1, 1)$, porque la regla integra exactamente polinomios de hasta grado 7, cuya derivada 8ª es la primera nula (\Rightarrow error nulo \Rightarrow integración exacta). Eligiendo $f(x) = x^8$ y aplicando la regla:

$$f(x) = x^8, f'(x) = 8x^7, f''(x) = 56x^6, \dots, f^{(8)}(x) = 8! \quad -2!$$

$I = Q + E$ donde $I = \int_{-1}^1 x^8 dx$, $Q =$ regla de cuadratura, $E =$ error.

$$I = \left. \frac{x^9}{9} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{9} = \underbrace{0.348(-0.861)^8 + 0.652(-0.340)^8 + 0.652(0.340)^8 + 0.348(0.861)^8}_{Q} + K \cdot 8!$$

$$\frac{2}{9} = 0.210 + K \cdot 8! \Rightarrow K = \frac{0.222 - 0.210}{40320} \Rightarrow \boxed{E = 2.98 \cdot 10^{-7} f^{(8)}(\xi)}$$

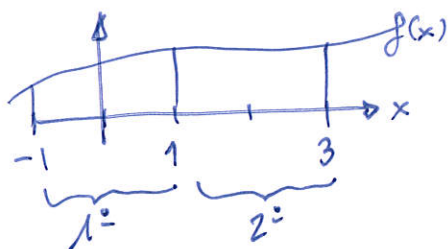
$$\text{con } \xi \in (-1, 1)$$

que, incluso con esta aritmética tan poco precisa,

coincide muy bien con el término de error del

Aprendizaje, cuya constante K es $1/3472875 = 2.88 \cdot 10^{-7}$ OK.

- D) Usaría las 8 evaluaciones de $f(x)$ dividiendo el intervalo $[-1, 3]$ en dos subintervalos iguales y aplicando la regla anterior (de 4 nodos) a cada uno:



El 1º subintervalo sería el $[-1, 1]$, con lo que me valen los mismos nodos y pesos de los apartados A) y B). Para el subintervalo $[1, 3]$ basta desplazar los cuatro nodos 2 unidades hacia la derecha, y usar los mismos pesos:

$$\text{Nodos} = \{-0.861, -0.34, 0.34, 0.861, -0.861+2, -0.34+2, 0.34+2, 0.861+2\}$$

$$\text{Nodos} = \{-0.861, -0.34, 0.34, 0.861, 1.139, 1.66, 2.34, 2.861\}$$

$$\text{Coeficientes} = \{0.348, 0.652, 0.652, 0.348, 0.348, 0.652, 0.652, 0.348\}$$

$$E) E = E_1 + E_2 \quad \text{con } \begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases} = \text{error en } \begin{cases} [-1, 1] \\ [1, 3] \end{cases}$$

$$f = e^{x/2}, f' = e^{x/2} / 2, f'' = e^{x/2} / 4, \dots, f^{(8)} = e^{x/2} / 2^8 = e^{x/2} / 256$$

Todas son funciones monótonas (crecientes) en $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$E_1 \approx 3 \cdot 10^{-7} \frac{e^{3/2}}{256} \in \left(\frac{3 \cdot 10^{-7} e^{-1/2}}{256}, \frac{3 \cdot 10^{-7} e^{1/2}}{256} \right) = (7 \cdot 10^{-10}, 1.9 \cdot 10^{-9})$$

$$E_2 \approx 3 \times 10^{-7} \frac{e^{3/2}}{256} \in \left(\frac{3 \times 10^{-7} e^{1/2}}{256}, \frac{3 \times 10^{-7} e^{3/2}}{256} \right) \approx (1.9 \times 10^{-9}, 5.2 \times 10^{-9})$$

Por tanto $E \in (7 \times 10^{-10} + 1.9 \times 10^{-9}, 1.9 \times 10^{-9} + 5.2 \times 10^{-9})$; $E \in (2.6 \times 10^{-9}, 7.1 \times 10^{-9})$

El error será por defecto, pues es positivo.

La integral exacta vale $I = \int_{-1}^3 e^{x/2} dx = 2 \left[e^{x/2} \right]_{-1}^3 = 2(e^{3/2} - e^{-1/2}) = 7.750316821$

El error cometido: $E = 7.750316821 - 7.750316817 = 4 \times 10^{-9}$ que sí pertenece a

F) Elegiría la regla simple de 8 nodos en $[-1, 3]$, porque la regla compuesta usada "óptimista" la posición de los nodos en $[-1, 1]$ y en $[1, 3]$ por separado, pero no en todo $[-1, 3]$. Por ello ahora espero menores cotas del error (y menor error).

Lo primero llevo la integral a $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{f(1+2t)}_{\substack{x=1+2t \\ dx=2dt}} 2 dt = \int_{-1}^1 g(t) dt \text{ donde } g(t) = 2f(1+2t)$$

$$\approx \sum_{k=0}^7 A_k g(x_k)$$

coeficientes \uparrow pesos \uparrow de la regla de 8 nodos del Apéndice.

Los nodos serían, por tanto,

las imágenes de los del Apéndice según la transformación $x=1+2t$; y los pesos, los dobles (pues $dx=2dt$):

$$\text{Nodos} = 1 + 2 \times \{-0.96, -0.80, -0.53, -0.18, 0.18, 0.53, 0.80, 0.96\}$$

$$\text{Coeficientes} = 2 \times \{0.10, 0.22, 0.31, 0.36, 0.36, 0.31, 0.22, 0.10\}$$

G) Esperaría de nuevo error por defecto, porque la K del término de error, según el Apéndice, es positiva, y todas las derivadas de $f(x) = e^{x/2}$ también lo son $\Rightarrow E > 0$. Lo esperaba con seguridad (siempre que la asimétrica fuera suficientemente precisa).

Además esperaba que el error fuera menor que el anterior (menor que 4×10^{-9}) por lo dicho al principio del apartado F). Pero sólo como algo probable (habría que estudiar el término de error para estar seguros).

H) Tras las dos líneas proporcionadas tendremos:

$$x_i = [-0.86114 \quad -0.33998 \quad 0.33998 \quad 0.86114]$$

que, como se ve, son los 4 nodos en $[-1, 1]$ de izquierda a derecha.

Así que puedo continuar así por ejemplo:

$$A_i = [0.3478548451 \quad 0.6521451549]; \quad \% \text{ tomados del Apéndice}$$

$$A_i = [A_i \quad A_i([2 \ 1])]; \quad \% \text{ mismo orden que los nodos}$$

$$Q_1 = \text{sum}(A_i .* \exp(x_i/2)); \quad \% \text{ regla simple en } [-1, 1]$$

$$x_i = x_i + 2; \quad \% \text{ desplazo nodos 2 a la dcha.}$$

$$Q_2 = \text{sum}(A_i .* \exp(x_i/2)); \quad \% \text{ regla simple en } [1, 3]$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \% \text{ regla compuesta en } [-1, 3]$$

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3

c) Función Matlab:

Una posibilidad sería (También se podrían usar "handles" a funciones, funciones "inline", etc.)

$$y_{prima} = \text{function}(fun, z, h)$$

% fun p.ej. como lenguaje Matlab entrecuillado tipo 'sin(x)'

$$fun = \text{inline}(fun);$$

$$y_{prima} = (fun(z+h) / fun(z-h)) / 2 / h;$$
