AMPLIACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

3º de Grado en Tecnología Industrial – 3 de julio de 2013

PRIMERA PARTE

• Tiempo: 1 hora y 45 minutos. (Tras un breve descanso se hará la 2ª parte.)

EJERCICIO 1:

A) Demuestra que el polinomio de interpolación de grado menor o igual que 3 con 4 nodos distintos existe y es único. (3 puntos)

B) Calcular la tabla de diferencias correspondiente a las siguientes condiciones:

$f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = -6$, $f'(3) = 10$ 2.5 puntos)

C) Aproximar $f'''(x)$, sin obtener previamente ninguna derivada, *enunciando* el resultado utilizado para ello. (1.5 puntos)

D) Calcular el correspondiente polinomio osculador $p(x)$ y evaluar $p(0.25)$ de forma óptima.

(2.5 puntos)

E) ¿Existirá algún otro polinomio del mismo grado que $p(x)$, o de grado inferior, que también cumpla las condiciones de arriba? Justifica la respuesta. (1 punto)

F) Dado el siguiente polinomio:

$$p_7(x) = x^7 - 11x^6 + 48x^5 - 106x^4 + 127x^3 - 84x^2 + 28x + 1$$

Sin hacer ninguna operación: ¿se puede descartar que cumpla las condiciones anteriores del apartado B? En caso afirmativo explicar por qué, y en caso negativo describir cómo sería posible encontrar otros polinomios de grado 7 que también las cumplan. (1.5 puntos)

EJERCICIO 2: (Operar todo con 4 dígitos significativos)

A) A partir del polinomio de Legendre

$$\varphi_4(x) = (35/8)\,x^4 - (15/4)\,x^2 + 3/8,$$

calcular los nodos de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre de cuatro puntos, indicando hasta qué grado integrará polinomios de forma exacta. (1.5 puntos)

B) Plantear, sin resolver, un sistema lineal de ecuaciones para obtener los coeficientes de la fórmula y localiza en el Apéndice la solución a dicho sistema. (1.5 puntos)

C) Calcular el término de error de la fórmula. (2 puntos)

Se quiere aproximar $I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$ sin evaluar $f(x)$ más de 8 veces. Se pide:

D) Usando sólo los resultados anteriores, ¿qué nodos elegirías en $[-1,3]$, y con qué coeficientes? (Nota: usar la fórmula compuesta sumando la fórmula simple en $[-1,1]$ y la fórmula simple en $[1,3]$)

(2 puntos)

E) Acotar el error de la fórmula del apartado anterior para $f(x) = e^{x/2}$. Sabiendo que la aplicación de la fórmula da como resultado 7.750316817, comprobar si se cumple la acotación del error.

(2 puntos)

F) Si fuera posible usar ahora toda la información del Apéndice, ¿qué nodos, y qué coeficientes, serían los más adecuados en el intervalo $[-1,3]$?

(1 punto)

Apéndice

Cuadratura de Gauss-Legendre

n	Nodos	Coeficientes	Término de error
0	0	2	$(1/3)\, f''(\xi)$
1	±0.57735 02692	1.00000 00000	$(1/135)\, f^{4)}(\xi)$
2	0.00000 00000 ±0.77459 66692	0.88888 88889 0.55555 55556	$\dfrac{1}{15750}\, f^{6)}(\xi)$
3	±0.33998 10436 ±0.86113 63116	0.65214 51549 0.34785 48451	$\dfrac{1}{3472875}\, f^{8)}(\xi)$
4	0.00000 00000 ±0.53846 93101 ±0.90617 98459	0.56888 88889 0.47862 86705 0.23692 68851	$\dfrac{2^{11}\times 5!^4}{11\times 10!^3}\, f^{10)}(\xi)$
5	±0.23861 91861 ±0.66120 93865 ±0.93246 95142	0.46791 39346 0.36076 15730 0.17132 44924	$\dfrac{2^{13}\times 6!^4}{13\times 12!^3}\, f^{12)}(\xi)$
6	0.00000 00000 ±0.40584 51514 ±0.74153 11856 ±0.94910 79123	0.41795 91837 0.38183 00505 0.27970 53915 0.12948 49662	$\dfrac{2^{15}\times 7!^4}{15\times 14!^3}\, f^{14)}(\xi)$
7	±0.18343 46425 ±0.52553 24099 ±0.79666 64774 ±0.96028 98565	0.36268 37834 0.31370 66458 0.22238 10345 0.10122 85363	$\dfrac{2^{17}\times 8!^4}{17\times 16!^3}\, f^{16)}(\xi)$
8	0.00000 00000 ±0.32425 34234 ±0.61337 14327 ±0.83603 11073 ±0.96816 02395	0.33023 93550 0.31234 70770 0.26061 06964 0.18064 81607 0.08127 43884	$\dfrac{2^{19}\times 9!^4}{19\times 18!^3}\, f^{18)}(\xi)$

AMPLIACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

3º de Grado en Tecnología Industrial – 3 de julio de 2013

SEGUNDA PARTE

• Tiempo: 1 hora y 15 minutos.

EJERCICIO 3:

A) Dar la expresión general del error de truncatura de una fórmula de derivación numérica (primera derivada). Analizando dicha expresión, decir en qué casos sencillos se pueden obtener diferentes fórmulas de derivación numérica. (2 puntos)

B) Para $n = 1$, indicar tres posibles ubicaciones de z respecto a los dos nodos, y **deducir**, de entre las tres fórmulas correspondientes, **la de mayor orden**. (2 puntos)

C) Escribir una función MATLAB que implemente la fórmula anterior (las explicaciones se pueden dar como breves comentarios dentro del propio código.) (2 puntos)

EJERCICIO 4:

A) Hallar A_0, A_1, A_2 para que la siguiente fórmula de derivación numérica sea de tipo interpolatorio:

$$f'(1) = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1) + R(f)$$ (2 puntos)

B) Obtener la expresión del error de truncatura. (2 puntos)

EJERCICIO 5:

Sea la ecuación diferencial ordinaria

$$y'' + 42y' + 40y = 0$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

A) Transformar la ecuación en un sistema de orden uno. (1 punto)

B) Aplicar el método de Runge-Kutta de orden 2 (Euler Mejorado) con tamaño de paso $h = 0.1$ para hallar las aproximaciones de $y(0.2)$, $y'(0.2)$. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

Resolver mediante el método predictor-corrector de Milne el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 4\cdot \mathrm{sen}(0.8x) - 0.5\cdot\cos(y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,2] \qquad h = 0.5$$

usando como aproximaciones $y(0.5) \simeq 1.27442$, $y(1) \simeq 2.44526$ e $y(1.5) \simeq 4.32615$, operando con redondeo a 6 dígitos significativos y usando un esquema $P(EC)^2E$. Estimar el error relativo cometido.

Predictor: $$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}[2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}] \qquad n = 3,4,\ldots,N-1$$

Corrector: $$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f_{n+1} + 4\cdot f_n + f_{n-1}] \qquad n = 1,2,\ldots,N-1$$ (4 puntos)