ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – Primer parcial (28 de Junio de 2013)

EJERCICIO 1

1. Sea A una matriz regular de orden n.

a) Demostrar que $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$**.**

b) Si A es una matriz simétrica, entonces A^{-1} **también lo es.** **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Por ser A una matriz regular y $|A|=|A^t| \rightarrow A^t$ también es regular, es decir, existe $\left(A^t\right)^{-1}$. Calculémosla. Como $A \cdot A^{-1} = I \xrightarrow[\text{tomando traspuestas}]{} \left(A \cdot A^{-1}\right)^t = I \Leftrightarrow \left(A^{-1}\right)^t \cdot A^t = I \rightarrow$ La inversa de A^t es la matriz $\left(A^{-1}\right)^t$, es decir, se cumple lo que queríamos probar $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

b) Se trata de demostrar que $\left(A^{-1}\right)^t = A^{-1}$. Para ello tenemos en cuenta que por ser A simétrica $A=A^t$, por lo que tomando inversas y teniendo en cuenta la propiedad que acabamos de demostrar en el apartado a), se tiene: $A^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$, es decir, si A simétrica A^{-1} también lo es.

2. Calcula la matriz inversa de A utilizando matrices por bloques:

$$\mathbf{A=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

Solución:

Particionamos A en la forma:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11_{(2\times 2)}} & A_{12_{(2\times 3)}} \\ \hline (0)_{(3\times 2)} & I_{(3\times 3)} \end{array}\right)$$

. Consideramos A^{-1} dividida en la forma: $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{(2\times 2)} & Y_{(2\times 3)} \\ \hline Z_{(3\times 2)} & T_{(3\times 3)} \end{array}\right)$ y calculamos estos bloques X, Y, Z, T imponiendo que $A \cdot A^{-1} = I$, es decir:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline (0) & I \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I & (0) \\ \hline (0) & I \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} A_{11}\cdot X+A_{12}\cdot Z=I\xrightarrow[\text{por } A_{11} \text{ regular}]{} X=A_{11}^{-1} \\ A_{11}\cdot Y+A_{12}\cdot T=(0)\xrightarrow[\text{por } A_{11} \text{ regular}]{} Y=-A_{11}^{-1}\cdot A_{12} \\ Z=(0) \\ T=I \end{cases}$$

Se trata de calcular por tanto $A_{11}^{-1}=\dfrac{1}{|A_{11}|}\cdot A_{11}^{a}$ siendo

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\to|A_{11}|=2,\ A_{11}^{a}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\to A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}=X \text{ y}$$

$$Y=-A_{11}^{-1}\cdot A_{12}=-\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\to$$

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1/2 & 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Sea V el espacio vectorial $V=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ /\ f \text{ continua}\}$. Estudiar si la aplicación $\begin{array}{l} \|\ \|:V\longrightarrow\mathbb{R} \\ \quad f\ \to\ \|f\|=\int_{-1}^{1}f(x)dx \end{array}$ es norma. En el caso en que no lo sea, indicar las propiedades que fallan mediante un contraejemplo. (1 punto)

<u>Solución:</u>

Se trata de estudiar si se cumplen o no los axiomas para ser norma:

1) $\forall f\in V\ \ \|f\|\geq 0$ y $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

¿$\|f\|=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx\geq 0$? Esto no se cumple siempre; por ejemplo para f(x)=-1, se tiene $\|f\|=\int_{-1}^{1}-1\cdot dx=-x\Big|_{-1}^{1}=-2<0$. En general, si f(x)<0 ∀x∈[-1,1], la integral será negativa.

Además si $f=0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\|f\|=\int_{-1}^{1}0\cdot dx=0$, pero si $\|f\|=0$, esto no implica que f sea la función nula. Por ejemplo, cualquier función impar f(x) cumple $\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx=0$, sin ser f la función nula. ($\int_{-1}^{1}x\cdot dx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0$). Luego este axioma no se cumple.

2) $\forall f\in V$ y $\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad\|\lambda\cdot f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$

$\|\lambda\cdot f\|=\int_{-1}^{1}\lambda\cdot f(x)\cdot dx=\lambda\cdot\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx\neq|\lambda|\cdot\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx$. ($\forall\lambda<0$ no se cumple). Por tanto, tampoco se cumple este axioma.

3) Desigualdad triangular: $\forall f,\ g\in V\quad \|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

$\|f+g\|=\int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))\cdot dx=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx+\int_{-1}^{1}g(x)\cdot dx=\|f\|+\|g\|\Rightarrow$ Este axioma sí se cumple con igualdad.

Esta aplicación, como acabamos de comprobar, no es norma.

EJERCICIO 2

1. Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E, con $E=F\oplus G$. Demostrar que todo vector $\mathbf{z}\in E$ se expresa de forma única como suma de un vector de F y otro de G. (1 punto)

Solución:

Al ser E = F⊕G, F y G son subespacios suplementarios, es decir, $F\cap G=\{\mathbf{0}\}$ y F+G=E, entonces $\forall\ \mathbf{z}\in E$ se puede descomponer de la forma $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ con $x\in F$, $y\in G$.

Supongamos que esta representación no es única, es decir que dado $\mathbf{z}\in E$ admite dos representaciones de la forma: $\mathbf{z}=\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}=\mathbf{x_2}+\mathbf{y_2}$ / $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in F\ \wedge\ \mathbf{y_1},\mathbf{y_2}\in G$.

Por ser $\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}=\mathbf{x_2}+\mathbf{y_2}\ \Rightarrow\ \mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}=\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1}$, donde $\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\in F$, $\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1}\in G$; y por ser iguales $\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}=\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1}\in F\cap G$. Pero como F y G son suplementarios $F\cap G=\{\mathbf{0}\}$, luego $\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}=\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1}=\mathbf{0}$, de donde: $\mathbf{x_1}=\mathbf{x_2}\quad \mathbf{y_1}=\mathbf{y_2}$.

Por tanto, la representación $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es única.

2. Se considera el subespacio V de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=a+c,\ y=b+c,\ z=a+b+2c\quad\text{con}\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

a) Obtener una base de V y sus ecuaciones paramétricas y cartesianas. (1 punto)

b) Hallar los subespacios W de $\mathbb{R}^3$ que sean suplementarios de V. (1 punto)

Solución:

a) Teniendo en cuenta que

$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=a+c,\ y=b+c,\ z=a+b+2c\quad\text{con}\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\ \Rightarrow$

$V=\left\{(a+c,\ b+c,\ a+b+2c)=a\cdot(1,0,1)+b\cdot(0,1,1)+c\cdot(1,1,2)\right\}\Rightarrow$

$V=\text{Span}\left\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)\right\}$.Veamos si estos tres vectores son o no libres:

Para ello estudiamos el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales vectores en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, esto es:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} < C_3 - C_1 >= \text{Rango}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & & {\scriptstyle C_3=C_2}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\end{array} = 2$$

. Es decir, sólo hay dos vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ dim(V)=2 y una base de V es $B=\{(1,0,1),(0,1,1)\} \Rightarrow$ Todo vector de V se puede expresar en la forma $\alpha\cdot(1,0,1)+\beta\cdot(0,1,1) \Rightarrow$ Las **ecuaciones paramétricas** de V son:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases} \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Eliminando los parámetros α,β obtenemos la **ecuación cartesiana** de V: $z=x+y \Leftrightarrow x+y-z=0$.

b) Para que un subespacio W sea suplementario de V, tiene que cumplirse $V\oplus W=\mathbb{R}^3$, esto es: $V\cap W=\{\mathbf{0}\}$ y $V+W=\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ W será suplementario de V si dim(W)=1 siendo $V\cap W = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow W=\text{Span}\{(a,b,c)/a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y para que $V\cap W = \{\mathbf{0}\}$, los tres vectores $\{(1,0,1),(0,1,1),(a,b,c)\}$ deben ser linealmente independientes, es decir, el rango de la matriz que tiene por columnas sus coordenadas debe ser 3

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\1&1&c\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow c-a-b\neq 0 \Leftrightarrow c\neq a+b$$

. Luego, existen infinitos subespacios suplementarios de V y son de la forma $W=\text{Span}\{(a,b,c)/c\neq a+b\}$.

3. Se considera el subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ formado por las matrices $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b+c\\ -b+c & a\end{pmatrix} \;/\; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$**. Obtener una base de M y completarla para obtener una base B' de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ en la que las coordenadas de la matriz** $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ **sean** $\begin{pmatrix}-2\\ 1/2\\ 5/2\\ 7\end{pmatrix}$**.** **(1.5 puntos)**

__**Solución:**__

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}=a\cdot\overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}+b\cdot\overset{A_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}+c\cdot\overset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\right\}=\mathrm{Span}\{A_1,A_2,A_3\}\quad .$$

Veamos si estas tres matrices son libres. Para ello establecemos una relación nula entre ellas: $a\cdot A_1+b\cdot A_2+c\cdot A_3=(0)$, lo que conduce a las ecuaciones:

$\begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases}\Rightarrow a=b=c=0\Rightarrow$ las tres matrices son libres y consecuentemente, $\{A_1,A_2,A_3\}$ es una base M.

Ahora se trata de completar esta base con otra matriz $A_4=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de forma que $B'=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ sea un conjunto de matrices linealmente independientes y que se cumpla, que las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ en esta nueva base de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ sean $\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 5/2 \\ 7 \end{pmatrix}$. La matriz de cambio de base entre la base usual de las matrices de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ y esta nueva base B' es: $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 1 & 1 & a_{12} \\ 0 & -1 & 1 & a_{21} \\ 1 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y la relación entre las coordenadas de una matriz en ambas bases: $C_B(x)=P\cdot C_{B'}(x)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & 1 & 1 & a_{12} \\ 0 & -1 & 1 & a_{21} \\ 1 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 5/2 \\ 7 \end{pmatrix}\Rightarrow$ queda el sistema: $\begin{cases} 5=-2+7\cdot a_{11} \\ 2=1/2+5/2+7\cdot a_{12} \\ 3=-1/2+5/2+7\cdot a_{21} \\ -2=-2+7\cdot a_{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{12}=-1/7 \\ a_{21}=1/7 \\ a_{22}=0 \end{cases}\Rightarrow$ la base buscada es:

$B'=\left\{\overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},\overset{A_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}},\overset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}},\overset{A_4}{\begin{pmatrix} 1 & -1/7 \\ 1/7 & 0 \end{pmatrix}}\right\}$ ya que las 4 matrices son libres por ser $|P|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/7 \\ 0 & -1 & 1 & 1/7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0.$

EJERCICIO 3

De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ se conocen los siguientes datos:

a) **Su rango es 1**

b) **Respecto a la base** $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ **con** $u_1=(1\quad 0\quad 0)^t$ **,** $u_2=(1\quad 1\quad 0)^t$ **,** $u_3=(1\quad 1\quad 1)^t$

su núcleo tiene por ecuaciones implícitas:

$$\begin{array}{l} y_1+y_2=0 \\ ay_1-y_2+(a+1)y_3=0 \end{array}$$

c) $f(u_1+u_2+u_3)=u_1+u_2+u_3$

Se pide:

a) **Calcular, razonadamente, la dimensión de los subespacios núcleo e imagen. Calcular, para los valores de a posibles, las ecuaciones implícitas del núcleo en la base canónica. (1 punto)**

b) **Expresión matricial de f respecto a la base canónica y respecto a la base** B_1**, escribiendo la relación existente entre ambas matrices. (2 puntos)**

Solución:

a) Como nos dicen que el rango de la aplicación es 1, la dimensión del subespacio imagen es $1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f)=1 \Rightarrow$ por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales, $\dim(\mathbb{R}^3)=3=\dim(\mathrm{Im}\, f)+\dim(\mathrm{Ker}\, f)=1+\dim(\mathrm{Ker}\, f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f)=2.$ Por tanto, sólo puede existir una ecuación implícita que defina ese subespacio, es decir, de las dos ecuaciones $\begin{array}{l} y_1+y_2=0 \\ ay_1-y_2+(a+1)y_3=0 \end{array}$ sólo puede haber una linealmente independiente $\Rightarrow \mathrm{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}=1 \Leftrightarrow -1-a=0 \Leftrightarrow a=-1.$ Este es, por tanto, el único valor posible que puede tomar a, quedando como única ecuación implícita del núcleo en la base B_1 , la $y_1+y_2=0 \Leftrightarrow y_1=-y_2 \quad \forall y_3 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f=\{(-y_2\ ,y_2,y_3)\,/\,y_2,y_3\in\mathbb{R}\}$. La base del Ker f referida a B_1 es, consecuentemente, $\{(-1\,,1,0),(0,0,1)\}=\{-u_1+u_2,u_3\}$. Expresando estos vectores en la base canónica, $-u_1+u_2=(0,1,0),\ u_3=(1,1,1)$, obtenemos la base del Ker f referida ya a dicha base canónica: $\{(0,1,0),(1,1,1)\}$. Para hallar, finalmente, su ecuación implícita tenemos en cuenta que para que un vector de coordenadas $(x_1\ ,x_2,x_3)$ pertenezca al Ker f el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$ debe ser 2 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix}=0=-x_3+x_1 \Rightarrow$ La **ecuación implicita del Ker f en la base canónica** es $x_1-x_3=0$.

b) Empezamos hallando la matriz de f respecto a la base $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$. Se trata de hallar las imágenes por f de estos tres vectores $\{f(u_1),f(u_2),f(u_3)\}$. Como según hemos visto una base del Ker f es $\{-u_1+u_2,u_3\}\Rightarrow\begin{cases} f(u_1)=f(u_2) & (1)\\ f(u_3)=\mathbf{0} & (2)\end{cases}$ y de la tercera condición $f(u_1+u_2+u_3)=u_1+u_2+u_3\Rightarrow f(u_1)+f(u_2)=u_1+u_2+u_3$ (3) . De las ecuaciones (1) y (3) obtenemos:

$f(u_1)=f(u_2)=(1/2)\cdot(u_1+u_2+u_3)\Rightarrow C_{B_1}(f(u_1))=C_{B_1}(f(u_2))=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\Rightarrow$ **La matriz asociada a f en la base** $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ es $A_1=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\1/2 & 1/2 & 0\\1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$.

Para calcular la matriz asociada a la aplicación respecto a la base canónica $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ se trata de hallar las imágenes por f de estos tres vectores $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$. Como según hemos visto una base del Ker f respecto a la base canónica es

$$\{(0,1,0),(1,1,1)\}=\{e_2,e_1+e_2+e_3\}\Rightarrow\begin{cases} f(e_2)=\mathbf{0} & (1)\\ f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=\mathbf{0}\to f(e_1)=-f(e_3) & (2)\end{cases}$$

y de la tercera condición que cumple la aplicación:

$$f(u_1+u_2+u_3)=u_1+u_2+u_3\Rightarrow f\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\to$$

$$3\cdot f(e_1)+2\cdot f(e_2)+f(e_3)=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{por (1)-(2)}]{}-2\cdot f(e_3)=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\to f(e_3)=\begin{pmatrix}-3/2\\-1\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$\text{y } f(e_1)=\begin{pmatrix}3/2\\1\\1/2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

La matriz asociada a f en la base canónica $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ es $A=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2 & -3/2\\1 & 1/2 & -1\\1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

Para hallar la relación existente entre estas dos matrices A y A_1 tenemos en cuenta las relaciones del cambio de base:

$$
\begin{array}{ccc}
f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
\text{Base B} & \xrightarrow{A} & \text{Base B} \\
P\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\text{Base } B_1 & \xrightarrow{A_1} & \text{Base } B_1
\end{array}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{cases}
C_B(f(\mathbf{x})) = A\cdot C_B(\mathbf{x}) & (1) \\
C_{B_1}(f(\mathbf{x})) = A_1\cdot C_{B_1}(\mathbf{x}) & (2)
\end{cases}
$$

Además $\begin{cases} C_B(\mathbf{x}) = P\cdot C_{B_1}(\mathbf{x}) \\ C_B(f(\mathbf{x})) = P\cdot C_{B_1}(f(\mathbf{x})) \end{cases}$ donde $P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_B(u_1) & C_B(u_2) & C_B(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sustituyendo estas últimas igualdades en (1), obtenemos que $C_B(f(\mathbf{x})) = A\cdot P\cdot C_{B_1}(\mathbf{x}) = P\cdot C_{B_1}(f(\mathbf{x})) \Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{x})) = P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot C_{B_1}(\mathbf{x})$ y comparando con (2), concluimos que $A_1 = P^{-1}\cdot A\cdot P$. Esta es la relación entre ambas matrices, siendo P la matriz del cambio de base entre las bases B y B_1 anterior.

ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – Segundo parcial (28 de Junio de 2013)

EJERCICIO 1

Deducir la matriz de Jordan de una matriz cuadrada de orden 2. (1.5 puntos)

Solución:

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2. Para que A sea semejante a la matriz triangular de Jordan debe tener un único autovalor λ doble y la dimensión de su subespacio propio correspondiente debe ser uno. Es decir, su polinomio característico, será de la forma $p_A(r)=|A-r\cdot I|=(r-\lambda)^2$ y el espacio de vectores propios asociado:

$$V_1(\lambda)=\left\{\mathbf{v}/(A-\lambda\cdot I)\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\Rightarrow$$

$$a_{21}\cdot v_1+(a_{22}-\lambda)\cdot v_2=0\xrightarrow[\text{si } a_{21}\neq 0]{}v_1=\frac{\lambda-a_{22}}{a_{21}}\cdot v_2\Rightarrow V_1(\lambda)=\text{Span}\left\{\mathbf{v}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda-a_{22}}{a_{21}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Entonces, para hallar la forma canónica de Jordan hay que calcular el subespacio $V_2(\lambda)=\left\{\mathbf{v}/(A-\lambda\cdot I)^2\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}\right\}$. Pero como sabemos que se cumple $V_1(\lambda)\subset V_2(\lambda)\subseteq\mathbb{R}^2$ este subespacio $V_2(\lambda)$ ya va a tener dimensión 2, es decir, va a ser el subespacio maximal y va a coincidir con $\mathbb{R}^2$ (La matriz $(A-\lambda\cdot I)^2$ coincidirá con la matriz nula). Para formar, entonces, la base de Jordan elegimos un vector de $\mathbb{R}^2$ linealmente independiente de **v**, por ejemplo, el vector $\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y se hace:

$$\mathbf{u_1}=(A-\lambda\cdot I)\cdot\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\in V_1(\lambda)$$. Este vector es de $V_1(\lambda)$ porque $(A-\lambda\cdot I)\cdot\mathbf{u_1}=(A-\lambda\cdot I)^2\cdot\mathbf{u_2}=\mathbf{0}$. Por tanto, la base de Jordan es:

$\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}=\left\{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-\lambda \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. En efecto, las imágenes por el endomorfismo f asociado a la matriz A de estos dos vectores son:

$f(\mathbf{u_1})=A\cdot\mathbf{u_1}\underset{\text{por ser } \mathbf{u_1} \text{ vector propio}}{=}\lambda\cdot\mathbf{u_1}$, $f(\mathbf{u_2})=A\cdot\mathbf{u_2}\underset{\text{por ser } \mathbf{u_1}=(A-\lambda I)\mathbf{u_2}}{=}\mathbf{u_1}+\lambda\cdot\mathbf{u_2}\Rightarrow$ La matriz del endomorfismo en esta base es $J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ cumpliéndose la relación de semejanza $J=P^{-1}\cdot A\cdot P$, siendo $P=\begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22}-\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar que, referido a una base $B=\{e_1,e_2,e_3\}$, tiene la siguiente expresión:

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-x_1y_3-x_3y_1$$

siendo $\mathbf{x}_B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t$ e $\mathbf{y}_B=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}^t$ las coordenadas de dos vectores x e y de $\mathbb{R}^3$ en dicha base.

Determinar:

a) Expresión matricial del producto escalar en la base B.

b) Justificar si la base B es ortogonal respecto del producto escalar dado. En caso de no serlo, hallar a partir de ella una base ortogonal empleando el método de Gram-Schmidt.

c) Hallar el producto de los vectores x e y, sabiendo que $\mathbf{x}_{B_1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}^t$ e $\mathbf{y}_{B_1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\end{pmatrix}^t$ siendo B_1 la base siguiente: $B_1=\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3\}$.

(1.5 puntos)

Solución:

a) Sabemos que la matriz asociada a un producto escalar fijada una base B viene dada por:

$$G_B=\begin{pmatrix} <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_3> \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_3> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> & <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3> \end{pmatrix}$$. Se trata de calcular estos productos escalares:

$$\left.\begin{array}{l} <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> = <(1,0,0),(1,0,0)> = 1\cdot 1 = 1; \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_2> = <(1,0,0),(0,1,0)> = 0 = <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1>; \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e}_3> = <(1,0,0),(0,0,1)> = -1\cdot 1 = -1 = <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1>; \\ <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2> = <(0,1,0),(0,1,0)> = 2\cdot 1\cdot 1 = 2; \\ <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> = <(0,1,0),(0,0,1)> = 0 = <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2>; \\ <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3> = <(0,0,1),(0,0,1)> = 2\cdot 1\cdot 1 = 2; \end{array}\right. \rightarrow$$

La matriz que nos piden es: $G_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Hemos visto que $<\mathbf{e_1},\mathbf{e_3}> = -1 \neq 0 \Rightarrow$ La base $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ no es ortogonal. La vamos a ortogonalizar por el método de Gram-Schmidt. Como $<\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> = 0 \Rightarrow$ los vectores $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}$ sí son ortogonales, por lo que elegimos la base ortogonal $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}\}$ /

$\bullet\, \mathbf{w_1} = \mathbf{e_1} = (1,0,0)$

$\bullet\, \mathbf{w_2} = \mathbf{e_2} = (0,1,0)$

$\bullet\, \mathbf{w_3} = \mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2}\ /$

$$\left\{\begin{array}{l} <\mathbf{w_3}, \mathrm{w}_1> = 0 = <\mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2}, \mathbf{e_1}> = <\mathbf{e_3}, \mathrm{e_1}> + \alpha_1 \cdot <\mathrm{e_1}, \mathbf{e_1}> \\ <\mathbf{w_3}, \mathbf{w_2}> = 0 = <\mathbf{e_3} + \alpha_1 \cdot \mathbf{w_1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{w_2}, \mathbf{e_2}> = \overbrace{<\mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}>}^{0} + \alpha_2 \cdot <\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}> \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{-<\mathbf{e}_3, \mathrm{e}_1>}{<\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}>} = \frac{1}{1} = 1;\ \alpha_2 = 0 \rightarrow \mathbf{w_2} = \mathbf{e_3} + \mathbf{e_1} = (1,0,1)$$

Una base ortogonal es por tanto: $\{(1,0,0),\ (0,1,0), (1,0,1)\}$.

c) Los vectores $\mathbf{x}_{\mathrm{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ e $\mathbf{y}_{\mathrm{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t$ siendo B_1 la base $\mathrm{B}_1 = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$, tienen las siguientes coordenadas en la base $\mathrm{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$,

$\mathbf{x}_{\mathrm{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{e_1} \Rightarrow C_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{y}_{\mathrm{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) \rightarrow C_B(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, luego su producto escalar es:

$<\mathbf{x}, \mathbf{y}> = (2,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = (2,0,-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ estos vectores son ortogonales.

2. **Marcar $\boxed{V}$ si se considera que la frase es verdadera o $\boxed{F}$ si se considera falsa**
   Respuesta correcta: 0.25 Respuesta en blanco: 0

   Respuesta errónea: - 0.25

   a.- En un problema mal condicionado, los problemas ocasionados por un pequeño error inicial se resuelven si se utiliza el algoritmo adecuado. $\boxed{V}\boxed{F}$ x

   b.- Si una matriz no es estrictamente diagonal dominante, el método de Gauss-Seidel no es convergente . $\boxed{V}\boxed{F}$ x

   c.- Si $|\mathrm{A}| \neq 0$ y se utiliza aritmética exacta, no es necesario acudir a las técnicas de pivotaje para resolver el sistema $\mathrm{A}\vec{x} = \vec{b}$ $\boxed{V}\boxed{F}$ x

   d.- La factorización LU que se obtiene mediante el método de Gauss y el de Doolittle es la misma. $\boxed{V}\boxed{F}$ x **(1 punto)**

3. ¿Qué debe verificar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Cuando lo sea hallar su forma diagonal, una matriz de paso y la expresión de A^n para $n \in \mathbb{N}$. (1.5 puntos)

__Solución:__

Comenzamos hallando el polinomio característico de A y sus autovalores:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) - a - a \cdot (1-\lambda) + a(2-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ doble con multiplicidad algebraica } m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \text{ simple con multiplicidad algebraica } m_2 = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz será diagonalizable cuando al autovalor doble $\lambda_1 = 1$ le correspondan 2 vectores propios linealmente independientes. Hallemos el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$:

$$V_1(1) = \{\mathbf{v} / (A - I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Este subespacio debe tener dimensión 2 por lo que el rango de esta matriz $(A - I)$ debe ser uno. Es decir, todos sus menores de orden 2 tienen que ser 0, lo cual se cumple si **a=0**. Por tanto, este es el **valor** de a **que hace que la matriz A sea diagonalizable**. Para este valor a=0, nos quedamos con la única ecuación que define al subespacio propio:

$$v_1 = -v_3 \Rightarrow V_1(1) = \left\{ \begin{pmatrix} -v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} / v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculamos ahora el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 2$:

$$V_1(2) = \{\mathbf{v} / (A - 2 \cdot I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ -v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_1(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} / v_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

. Una base de vectores propios es:

$\left\{ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y la matriz diagonal semejante a A es

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, cumpliéndose la relación de semejanza $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ siendo P la matriz

que tiene por columnas las coordenadas de los vectores propios: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallamos ahora A^n. Teniendo en cuenta la igualdad anterior:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow A^n = P \cdot D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdots \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

EJERCICIO 3

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ **y** $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$**. Se pide:**

a) Estudiar, aplicando un algoritmo numérico, si A es una matriz definida positiva.

(1 punto)

b) ¿Sería necesario usar técnicas de pivotaje para resolver el sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$**? Justificar la respuesta. (0.25 puntos)**

c) ¿Sería convergente el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema? Justificar la respuesta. (0.25 puntos)

d) Resolver, mediante el método de factorización compacta más adecuado, el sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$**. (1 punto)**

Solución:

a) Sabemos que existe un teorema que establece el siguiente resultado:

Una matriz A es simétrica definida positiva $\Longleftrightarrow$ A se puede factorizar de forma única como $A = L \cdot L^T$, siendo L triangular inferior con los términos diagonales estrictamente positivos. Esta factorización recibe el nombre de *factorización de Cholesky*.

Entonces, una forma de comprobar si una matriz simétrica A es definida positiva es ver si es posible factorizarla por el método de Cholesky. Es decir, aplicaremos el algoritmo de Cholesky a la matriz A y si no falla tal algoritmo A será definida positiva. Se trata, por tanto de factorizar A como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

El algoritmo que se obtiene multiplicando las filas de L por las columnas de L^T, es el siguiente:

<u>Paso k=1</u>: Se comienza obteniendo el elemento l_{11}: $a_{11} = 1 \underset{F1L\,x\,C1L^T}{=} l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = 1$

A continuación se obtiene la <u>1ª columna de L</u>, es decir, los elementos l_{21}, l_{31}:

$$a_{21} = 0 \underset{F2L\,x\,C1L^T}{=} l_{21} \; ; \; a_{31} = 1 \underset{F3L\,x\,C1L^T}{=} l_{31}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 1 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

<u>Paso k=2</u>: Se comienza obteniendo el elemento l_{22}:

$$a_{22} = 9 \underset{F2L\,x\,C2L^T}{=} l_{22}^2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{9} = 3$$

A continuación se obtiene la <u>2ª columna de L</u>, es decir el elemento l_{32}:

$$a_{32} = -6 \underset{F3L\,x\,C2L^T}{=} 1 \cdot 0 + 3 \cdot l_{32} \rightarrow l_{32} = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

<u>Paso k=3</u>: Se finaliza obteniendo el elemento l_{33}:

$$a_{33} = 6 \underset{F3L\,x\,C3L^T}{=} 1 + 4 + l_{33}^2 \rightarrow l_{33} = \sqrt{1} = 1 \; .$$

Por tanto, la matriz A es definida positiva, siendo su factorización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) No es necesario usar técnicas de pivotaje porque al ser la matriz simétrica definida positiva los métodos directos utilizados para resolver el sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ son numéricamente estables y funcionan sin necesidad de efectuar pivotaje.

c) Sí, el método iterativo de Gauss-Seidel va a ser convergente por ser la matriz A del sistema simétrica definida positiva.

d) Cuando A es simétrica definida positiva el método directo más adecuado para resolver el sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ es la factorización de Cholesky porque, el coste operativo para factorizar una matriz A por Cholesky, es la mitad del coste de las otras factorizaciones compactas, ya que sólo se necesita calcular L. Para una matriz A de dimensión n, el número de multiplicaciones y divisiones de este método es del orden de $\frac{n^3}{6}$. Entonces, como se trata de resolver el sistema $L \cdot L^T \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ hacemos 1) $L^T \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ y 2) $L \cdot \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b}$. Comenzamos resolviendo este sistema 2) por sustitución progresiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

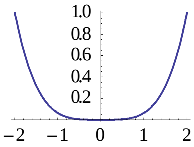
. Finalmente resolvemos el sistema 1) por sustitución regresiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -1 \Rightarrow \text{Solución: } \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}. \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

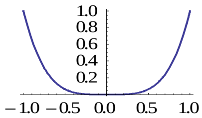
2. Hallar la mejor aproximación polinómica de grado menor o igual que 3 por mínimos cuadrados de la función $f(x) = \frac{x^4}{16}$ en $[-2, 2]$ utilizando polinomios de Legendre. (2 puntos)

<u>Nota:</u> $\| p_n \|^2 = \frac{2}{2n+1}$; $p_0(x)=1$; $p_1(x)=x$; $p_2(x)=\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2}$;
$p_3(x)=\frac{5}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x$; $p_4(x)=\frac{35}{8} \cdot x^4 - \frac{15}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{8}$; $p_5(x)=\frac{63}{8} \cdot x^5 - \frac{35}{4} \cdot x^3 + \frac{15}{8} \cdot x$

<u>Solución:</u> Los polinomios de Legendre son los polinomios ortogonales respecto al producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \cdot dt$.

Como nos piden aproximar la función $f(x)=x^4/16$ en el intervalo [-2, 2], 

hay que hacer un cambio de variable de la forma $x = a \cdot t + b$ que traslade el intervalo $x \in [-2,2]$ a $t \in [-1,1] \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -a+b \\ 2 = a+b \end{cases} \xrightarrow[\text{Sumando y Restando}]{} a = 2,\ b = 0 \rightarrow$ El cambio a realizar es $x = 2 \cdot t$ y la función a aproximar: $f(t) = \dfrac{(2\cdot t)^4}{16} = t^4$ en el intervalo [-1,1],



.

Entonces el polinomio de grado menor o igual que tres mejor aproximación mínimo cuadrática de f(t) será de la forma:

$f(t) = t^4 = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot t + \lambda_2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\cdot t^2 - \dfrac{1}{2}\right) + \lambda_3 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\cdot t^3 - \dfrac{3}{2}\cdot t\right)$ siendo los

$\lambda_j = \dfrac{< f(t), p_j(t) >}{\| p_j(t) \|^2}$ $j = 0,1,2,3$. Esto es:

$$\lambda_0 = \frac{< f(t),1 >}{\|1\|^2} \underset{\text{por ser } \|p_0(t)\|^2=2}{=} \frac{\int_{-1}^{1} t^4 \cdot 1 \cdot dt}{2} \underset{\text{por ser } t^4 \text{ par}}{=} \frac{2}{2}\cdot\int_0^1 t^4 \cdot dt = \left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\lambda_1 = \frac{< f(t), t >}{\| t \|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} t^4 \cdot t \cdot dt}{\| t \|^2} \underset{\text{por ser } t^5 \text{ impar}}{=} 0$$

$$\lambda_2 = \frac{< f(t), 3/2\cdot t^2 - 1/2 >}{\| p_2(t) \|^2} \underset{\text{por ser } \|p_2(t)\|^2=2/5}{=} \frac{\int_{-1}^{1} t^4 \cdot (3/2 \cdot t^2 - 1/2)\cdot dt}{2/5} \underset{\text{por ser } t^4 \text{ y } t^6 \text{ pares}}{=}$$

$$= \frac{2}{2/5}\cdot\left(\int_0^1 \frac{3}{2}\cdot t^6 \cdot dt - \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot t^4\right) = 5\cdot\frac{3}{2}\cdot\left.\frac{t^7}{7}\right|_0^1 - 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{4}{7}$$

$$\lambda_3 = \frac{< f(t), 5/2\cdot t^3 - 3/2\cdot t >}{\| p_3(t) \|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} t^4 \cdot (5/2\cdot t^3 - 3/2\cdot t)\cdot dt}{\| p_3(t) \|^2} \underset{\text{por ser } t^7 \text{ y } t^5 \text{ impares}}{=} 0$$

Por tanto, el polinomio de grado 3 mejor aproximación a f(t) es:

$$f(t) = t^4 = \frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot t^2 - \frac{1}{2}\right) \underset{\text{deshaciendo el cambio } t=x/2}{\rightarrow} f(x) = \frac{x^4}{16} = \frac{1}{5} + \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{14}\cdot x^2 - \frac{3}{35}.$$