Aljebra.
Globala

2013-14 ikasturtea

Ekaina

1. (**2 puntu**) Kalkula ezazu ondoko determinantearen balioa:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

2. (**2 puntu**) Izan bedi $E = \{x + y\sqrt{2} \ / \text{ non } x, y \in \mathbb{Q}\}$ multzoa. Aztertu $(E, +)$ eta $(E, \cdot)$ talde diren eta $(E, +, \cdot)$ eraztun den.

3. (**2 puntu**) Aurkitu A matrizearen LU faktorizazioa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   Ebatzi ondoko sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ aurreko faktorizazioa erabiliz.

4. (**2 puntu**) Izan bedi A, f aplikazioari elkartutako matrizea $\mathbb{R}^3$ espazioaren oinarri kanonikoarekiko:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

   Kalkula itzazu oinarri honekiko transformazio matrizea : $B = \{(2, 3, 1), (3, 4, 1), (1, 2, 2)\}$

   Ebazpena:

$$\mathbb{R}^3_B \xrightarrow{M_B^{Bc}} \mathbb{R}^3_{Bc} \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3_{Bc} \xrightarrow{M_{Bc}^{B}} \mathbb{R}^3_B$$

```
> # 4.Ariketa
>
> A <-  matrix(c(15,-11,5,20,-15,8,8,-7,6),nrow = 3, ncol = 3, byrow = T)
> A # f aplikazioari elkartutako matrizea

     [,1] [,2] [,3]
[1,]   15  -11    5
[2,]   20  -15    8
[3,]    8   -7    6

> B <-  matrix(c(2,3,1,3,4,1,1,2,2),nrow = 3, ncol = 3, byrow = F)
> B # oinarri berria, B -> Bc matrizea

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    3    1
[2,]    3    4    2
[3,]    1    1    2

> det_B <- det(B)
> det_B # B matrizearen determinantea

[1] -1

> B_inv <- solve(B)
> B_inv # B matrizearen alderantzizkoa

     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -6    5   -2
[2,]    4   -3    1
[3,]    1   -1    1

> P <- B_inv%*%A%*%B
> round(P, digits = 2) # P matrizea, transformazio lineala oinarri berriarekiko

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    3

>
```

5. (**2 puntu**) Erabaki ezazu ea ondorengo A matrizea diagonalizagarria den. Hala bada, kalkula ezazu bere D forma diagonala, eta P matrize alderantzikagarria non $P^{-1}AP = D$ den. Egiazta ezazu.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> # 5.Ariketa
> # A matrizearen balio propioak eta bektore propioak
>
> A <- matrix(c(2,0,3,0,2,0,0,0,1),nrow = 3, ncol = 3, byrow = T)
> A

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    0    3
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    1

> s <- eigen(A)
> s

$values
[1] 2 2 1

$vectors
     [,1] [,2]       [,3]
[1,]    1    0 -0.9486833
[2,]    0    1  0.0000000
[3,]    0    0  0.3162278

> balio_prp <- unique(round(s$values))
> balio_prp # balio propio ezberdinak

[1] 2 1

> D <- diag(s$values)
> D # D matrize diagonala lortutako balio propioekin

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    1

> P <- round(s$vectors, digits = 2)
> P #  bektore propioekin osatutako P matrizea.

     [,1] [,2]  [,3]
[1,]    1    0 -0.95
[2,]    0    1  0.00
[3,]    0    0  0.32

>
>
```

Balio propioei elkartutako azpiespazioak:

(a) $\lambda_1 = 2$ lehenengo balio propioari elkartutako azpiespazioa, $N(A - 2 \cdot I)$

```
> # 5.Ariketa
> # lehenengo balio propioaren elkartutako azpiespazioa
>
> # Bi era ezberdinak Gaussen ezabapena kalkulatzeko:
>   # Sortutako pakete berezian aurkitutako funtzioa:
> A1 <- A - diag(round(balio_prp[1]),3)
> A1

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    3
[2,]    0    0    0
[3,]    0    0   -1

> U1 <- GaussianElimination(A1)
> U1

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    1
[2,]    0    0    0
[3,]    0    0    0

> # R project "pracma" paketean aurkitutako funtzioa
> library("pracma")
> # rref funtzioa, (matrize baten "Reduced Row Echelon Form")
> rref(A1) # reduced row echelon

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    3
[2,]    0    0    0
[3,]    0    0   -1

>
```

Aurreko U_1 matrizea ikusita ekuazio sistema homogeneoaren soluzioak honela geratuko dira: $S_H = x_1 * (1,0,0) + x_2 * (0,1,0)$ eta balio propioari elkartutako azpiespazioaren oinarri bat: $B_{N(A-2\cdot I)} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$. Beraz, azpiespazioaren dimentsioa bi da anizkoiztasun aljebraikoaren berdina.

(b) $\lambda_2 = 1$ bigarren balio propioari elkartutako azpiespazioa.

```
> # 5.Ariketa
> # bigarren balio propioaren elkartutako azpiespazioa
>
> # Bi era ezberdinak Gaussen ezabapena kalkulatzeko:
>   # Sortutako pakete berezian aurkitutako funtzioa:
> A2 <- A - diag(round(balio_prp[2]),3)
> A2

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    3
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    0

> U2 <- GaussianElimination(A2)
> U2

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    3
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    0

> library("pracma")
> # R project "pracma" paketean aurkitutako funtzioa
> rref(A2) # reduced row echelon

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    3
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    0

> # rref funtzioa, (matrize baten "Reduced Row Echelon Form")
```

Aurreko U_2 matrizea ikusita ekuazio sistema homogeneoaren soluzioak honela geratuko dira: $S_H = x_3 * (-3, 0, 1)$ eta balio propioari elkartutako azpiespazioaren oinarri bat $B_{N(A-(1)\cdot I)} = \{(-3, 0, 1)\}$ izango da. Beraz, azpiespazioaren dimentsioa bat da anizkoiztasun aljebraikoaren berdina.

```
> # 4.Ariketa
> # A eta D matrizeak antzekoak direla frogatuz
> P <- matrix(c(1,0,0,0,1,0,-3,0,1),nrow = 3, ncol = 3, byrow = F)
> P
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0   -3
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> P_det <- det(P)
> P_det
[1] 1
> P_inv <- solve(P)
> round(P_det*P_inv,digits = 2)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    3
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> D2 <- round(P_inv%*%A%*%P)
> D2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    0    0
[2,]    0    2    0
[3,]    0    0    1
```