Tiempo total: dos horas y media

Primera parte

1.- Estudiar para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1+a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Calcular la matriz D y la matriz P en todos los casos posibles de diagonalización.

3 Puntos

2.- Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$, y resolverlo en el caso en que sea compatible:

$$\begin{cases} -x+y-2z-at=-6 \\ -2x+y+z+5t=2(1-a) \\ 2x+y-2z-2at=a \\ 3x-z-4t=8 \end{cases}$$

2 Puntos

3.- a) Se define una aplicación $f: P_1(x) \to P_2(x)$:

$p(x)=a+b\cdot x \quad / \quad f\left(p(x)=a+b\cdot x\right)=p(x)\cdot p(x)=a^2+2ab\cdot x+b^2\cdot x^2$

¿Es una aplicación lineal? Razonar la respuesta.

b) Dada una aplicación lineal f del conjunto de las matrices diagonales 4x4 sobre $P_2(x)$

$$f: D_{4x4} \to P_2(x)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}\right) \to (a+b)+(b+c)\cdot x+(c+d)\cdot x^2$$

Calcular el núcleo de la aplicación.

2 Puntos

4.- Se considera el espacio vectorial de las matrices de orden 2x2, $E_{2x2}(\mathbb{R})$, y el subespacio $U = Span\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

a) Obtener la dimensión de U, una base y sus ecuaciones.

b) ¿El vector $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ pertenece al subespacio U? Razonar la respuesta.

2 Puntos

5.- Se considera el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos y los subespacios:

$W=\{p(x)\in P_2(x) / p(x)=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)x+(\gamma-\alpha)x^2\}$

$H=\{p(x)\in P_2(x) / p(1)=0\}$

Se pide calcular la dimensión y una base de la intersección de ambos subespacios $W \cap H$ y de la suma de ellos $W+H$.

2 Puntos

Segunda parte

6.- Se considera el espacio vectorial de las matrices de orden 2x2, $E_{2x2}(\mathbb{R})$. Se sabe que en la base B_1 una matriz A tiene las coordenadas $C_{B_1}(A)$:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad C_{B_1}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son las coordenadas de la matriz A en B_2?

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad C_{B_2}(A) = ?$$

b) ¿Cuál es la matriz A?

2 Puntos

7.- En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se define una aplicación:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

a) Demostrar que dicha aplicación es producto escalar.

b) Calcular la expresión matricial del producto escalar.

c) Obtener una base ortogonal.

2 Puntos

8.- Se conocen las siguientes matrices J (matrices más sencillas semejantes a A, donde A es la matriz de una aplicación lineal):

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Se pide: decir razonadamente para cada caso cuáles son los valores propios y las dimensiones de cada subespacio asociado a esos valores propios.

2 Puntos

9.- Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son matrices semejantes.

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable porque es singular.

Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 & 7 \\ 6 & -1 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ son equivalentes, puesto que tienen el mismo rango.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ define un producto escalar de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

2 Puntos