9.3. EJE INSTANTANEO DE ROTACIÓN Y DESLIZAMIENTO. AXOIDES

El lugar geometrico de los puntos del solido cuya velocidad, en un instante determinado, es igual a la velocidad de deslizamiento (V_{min}) es una recta denominada eje instantaneo de rotación y deslizamiento (E.I.R.D). Su equivalente en un sistema de vectores es el eje central.

$$V_A = V_d + \omega \times IA$$

$$\omega \times V_A = \omega \times V_d + \omega \times (\omega \times IA) = (\omega IA)\omega - |\omega|^2 \cdot IA$$

$\rightarrow$ ω y V_d colineales.

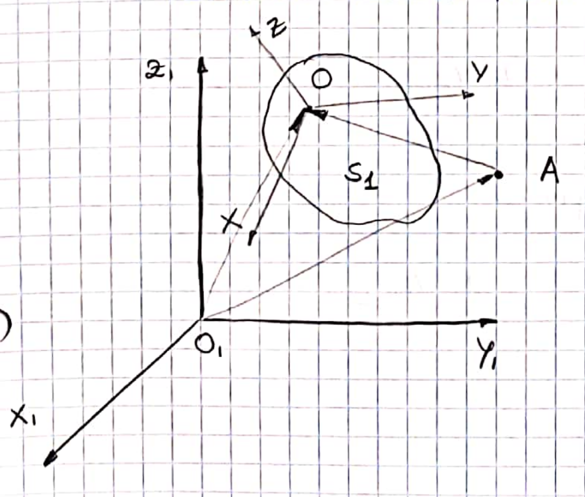
Como el vector IA puede tener cualesquiera dirección y modulo, sustituimos $\omega \cdot IA \longrightarrow \lambda \quad \in (-\infty, \infty)$

$$AI = \frac{\omega \times V_A}{|\omega|^2} + \lambda \omega$$

Cuando la velocidad de deslizamiento es nula, el eje instantaneo de rotación y deslizamiento se convierte en eje instantaneo de rotación.

A lo largo del movimiento el eje instantaneo de rotación y deslizamiento engendra dos superficies regladas denominadas axoides, una en el solido y otra en el sistema fijo de referencia. Las rectas del solido que han ido coincidiendo con el eje instantaneo de rotación y deslizamiento definen el axoide movil. Las diferentes posiciones ocupadas en el espacio fijo por el eje instantaneo de rotación y deslizamiento configuran el axoide fijo.

9.6. MOVIMIENTO RELATIVO DEL PUNTO MATERIAL



El triedro fijo (O_1, Z_1, Y_1, X_1) es el sistema absoluto y el movil (O, X, Y, Z) se denomina sistema de arrastre. El observador situado en el sistema fijo es el observador absoluto, y el que se encuentra en el sistema de arrastre se conoce como observador movil o relativo.

9.6.1 VELOCIDADES ABSOLUTA, DE ARRASTRE Y RELATIVA

Cualquier instante: $O_1A = O_1O + OA$

observador absoluto:

$$V_A = V_O + \left.\frac{dOA}{dt}\right|_F$$

OA está en base móvil, aplicamos la regla de derivación de vectores expresados en base dependientes de escalar:

$$\left.\frac{dOA}{dt}\right|_F = \left.\frac{dOA}{dt}\right|_M + \omega \times OA = V_{A_{r/1}} + \omega \times OA$$

ω la velocidad angular del sólido y $V_{A_{r/1}}$ la velocidad relativa del punto A respecto S_1.

Sustituyendo en la fórmula del observador absoluto:

$$V_A = V_O + \omega \times OA + V_{A_{r/1}}$$

Ahora denominaremos velocidad de arrastre $V_{A_{a/1}}$ a la velocidad absoluta que tendría el punto A si perteneciera al sólido:

$$V_{A_{a/1}} = V_O + \omega \times OA$$

La velocidad absoluta por tanto: $V_A = V_{A_{a/1}} + V_{A_{r/1}}$

9.6.2. ACELERACIONES ABSOLUTA, DE ARRATRE, RELATIVA Y COMPLEMENTARIA

Derivando la ecuación de campo de velocidades, el observador absoluto llega a la siguiente expresión:

$$a_A = a_O + \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_F \times OA + \omega \wedge \left.\frac{dOA}{dt}\right|_F + \left.\frac{dV_{A_{r/1}}}{dt}\right|_F$$

$$\longrightarrow \left.\frac{dV_{A_{r/1}}}{dt}\right|_F = \left.\frac{dV_{A_{r/1}}}{dt}\right|_M + \omega \times V_{A_{r/1}} = a_{A_{r/1}} + \omega \times V_{A_{r/1}}$$

$a_{A_{r/1}}$ la aceleración relativa del pto A.

$$\longrightarrow a_A = a_O + \alpha \times OA + \omega \times (\omega \times OA) + a_{A_{r/1}} + 2\omega \times V_{A_{r/1}}$$

Esta expresión puede considerarse la suma de tres componentes:

1.- ACELERACION DE ARRASTRE: Aceleracion abs que tendría A si perteneciese al solido

$$a_{A_{a/1}} = a_O + \alpha \times OA + \omega \times (\omega \times OA)$$

2.- ACELERACIO RELATIVA: El observador situado en ejes moviles

$$a_{A_{r/1}} = \left.\frac{d V_{A_{r/1}}}{dt}\right|_M$$

3.- ACELERACIÓN COMPLEMENTARIA: o de CORIOLIS

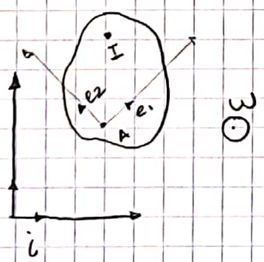
$$a_{A_{C/1}} = 2\omega \wedge V_{A_{r/1}}$$

10.4. CENTRO INSTANTANEO DE ROTACIÓN. BASE Y RULETA.

El punto de corte del eje instantaneo de rotación y deslizamiento con el plano movil es el centro instantaneo de rotación.

Los distintos puntos del solido que, a lo largo del movimiento, pasan a ser centro instantaneo de rotación, definen una curva denominada ruleta. A su vez, determinados puntos matematicos del plano fijo van coincidiendo con los puntos materiales del plano movil que son CIR. Los sucesivos puntos del plano fijo que tiene esta propiedad dibujan un lugar geometrico conocido como base.

$\vec{V_I} = \vec{0}$ $\qquad \omega \perp \square$



$$\vec{V_A} = \underbrace{\cancel{\vec{V_I}}}_{0} + \vec{\omega} \wedge \vec{IA}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V_A} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{IA})$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V_A} = \underbrace{\cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{IA})\vec{\omega}}}_{0} - (\vec{\omega}\vec{\omega})\, \vec{IA}$$

$$\boxed{AI = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{V_A}}{\omega^2}}$$

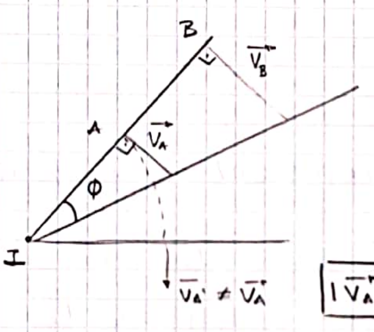
10.5. CALCULO GRAFICO DE VELOCIDADES

En los solidos en un movimiento plano siempre hay un punto de velocidad nula, denominado CIR y representado por la letra I. Solo cuando esté dotado de traslación pura esta situación degenera pudiendo considerarse que dicho punto se situa en el infinito. $I = \infty$

Velocidad en un punto: $V_A = \omega \times IA$

La velocidad de un punto es siempre perpendicular a la recta que une dicho punto con el CIR. Y $\vec{\omega}$ y $\vec{IA}$ son $\perp$

$$V_A = \omega \vec{IA} \sin 90 \longrightarrow \omega = \frac{V_A}{IA} = tg\,\phi$$

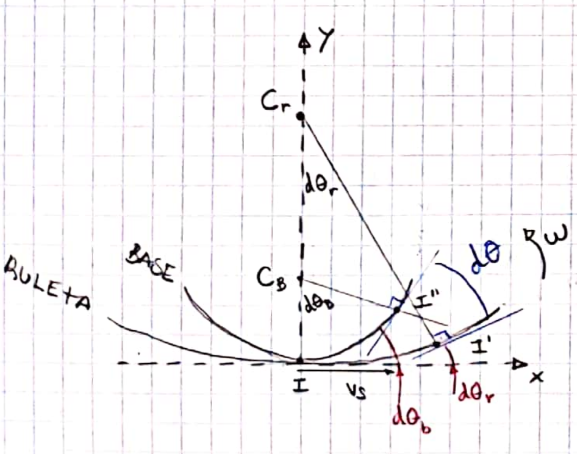


$$\boxed{|\vec{V_A}| = |\vec{V_A'}|}$$

10.6. VELOCIDAD DE SUCESION DEL CIR.

En cada instante del movimiento un punto de la ruleta coincide con otro de la base. El primero es el CIR y el segundo un pto del plano fijo. Durante el movimiento este ultimo sucede como si se tratara de un punto que recorre dicha curva.

La velocidad con la que ese punto matematico se desplaza a lo largo de la base denominase velocidad de sucesión del CIR. [V_S]



$$d\theta = d\theta_b - d\theta_r$$

SISTEMA DE REFERENCIA

- CENTRO: PUNTO I (CIR)
- EJE Y: UNE LOS CENTROS DE CURVATURA Y EL CIR. MISMO SENTIDO QUE RADIO DE BASE
- EJE X: TG A BASE Y RULETA. SE DEDUCE EL SENTIDO PARA DEFININIR Δ
- EJE Z: $\perp$ AL PLANO DE MOVIMIENTO. MISMO SENTIDO QUE LA ω

RULETA RUEDA RESPECTO A LA BASE

$\widehat{II'} = \widehat{II''}$

- GEOMETRICAMENTE ⇒ $ds = R_r\, d\theta_r = R_b\, d\theta_b$
- CINEMATICAMENTE ⇒ $V_s = \frac{ds}{d\tau} \rightarrow ds = II'' = II' = V_s\, d\tau$

⇒ $R_r\, d\theta_r = R_b\, d\theta_b = V_s\, d\tau$

- $d\theta_r = \frac{V_s\, d\tau}{R_r}$
- $d\theta_b = \frac{V_s\, d\tau}{R_b}$

- $d\theta = d\theta_b - d\theta_r$
- $\omega = \frac{d\theta}{d\tau}$

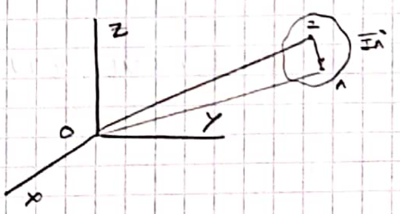
$$\boxed{V_s = \frac{\omega}{\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_r}}}$$

10.8. ACELERACIÓN DEL CIR.

$$\vec{a_A} = \frac{d\vec{V_A}}{d\tau} = \frac{d\vec{\omega}}{d\tau} \wedge \vec{IA} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{IA}}{d\tau}$$

$$\vec{a_A} = \vec{\alpha} \wedge \vec{IA} + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{d\tau}(\vec{OA} - \vec{OI})$$

I debe representar el punto matemático del plano fijo que coincide en cada instante con el centro instantáneo de rotación y recorre la base con la velocidad de sucesión.



$$\frac{d\vec{OI}}{d\tau} = \vec{V_s}$$

$$\vec{a_A} = \vec{\alpha} \wedge \vec{IA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{V_A} - \vec{V_s})$$

Finalmente, aplicamos la expresión al pto material que en un instante sea CIR : $I \equiv A$

$$\boxed{\vec{a_I} = \vec{V_s} \wedge \vec{\omega}}$$

10.9. POLO DE ACELERACIONES

Se denomina polo de aceleraciones al punto del plano movil cuya aceleración es nula. $[C,\ \vec{a_C} = \vec{0}]$

$$a_C = a_A + \alpha \wedge AC - \omega^2 AC = 0$$

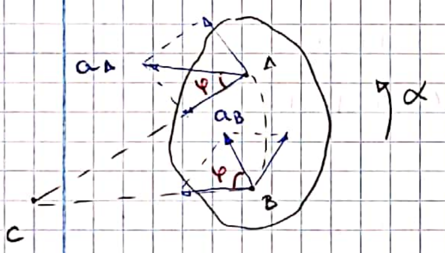
$$\boxed{a_A = \underbrace{\alpha \wedge CA}_{a_{tg}} \underbrace{- \omega^2 CA}_{a_N}}$$

$$\begin{cases} \vec{a_{tg}} = \alpha\, \vec{CA} \sin 90 \\ \vec{a_N} = -\omega^2 \vec{CA} \end{cases} \Rightarrow a_A = \sqrt{\alpha^2 \vec{CA}^2 + \omega^4 \vec{CA}^2} = \vec{CA}\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\frac{a_A}{\vec{CA}} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = kte$$

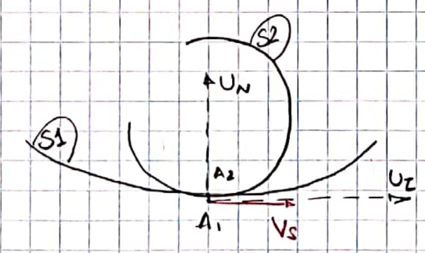
Se concluye que en un instante dado, la relación entre el modulo de la aceleración de un punto y su distancia al polo de aceleraciones es kte para todos los puntos del plano movil. Así, puntos equidistantes al polo, como A y B, tendrán aceleraciones de modulos iguales.

$$|a_B| = |a_A|$$



$$tg\,\varphi = \frac{\alpha\, CA}{\omega^2 CA} = \frac{\alpha}{\omega^2} = kte$$

10.10 ESTUDIO DE ACELERACIONES EN EL MOVIMIENTO DE RODADURA



$$V_{A_2} = V_{A_1} \rightarrow V_{A_{2r/1}} = 0$$

$$a_{A_2} = a_{A_1} + a_{A_{2r/1}} + \underbrace{a_{A_{2\,cor/1}}}_{0}$$

- $a_{A_{2r/1}} = V_{s_{2r/1}} \wedge \omega_{2r/1} = V_s \cdot \omega_{2r/1} \cdot \vec{U_n}$
- $\vec{a_{A_2}} = \vec{a_{A_1}} + V_s \cdot \omega_{2r/1} \cdot \vec{U_n}$

$$\boxed{\vec{a_{A_2}} \neq \vec{a_{A_1}} \quad \cup \quad a_{tg_{A_1}} = a_{tg_{A_2}}}$$