AZTERKETA ARIKETAK – LAPLACE TRANSFORMATUA
2015-2016 IKASTURTEA

1. ARIKETA

A) Kalkula itzazu ondoko alderantzizko Laplace transformatuak:

$$i)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right]\quad,\quad ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2}\right]\quad,\quad iii)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a\cdot s}s}{\left(s^2+16\right)^2}\right]$$

B) Izan bedi ondoko funtzioa: $f\left(t\right)=\begin{cases}\cos\left(4t\right) & 0\le t<\pi\\ 0 & G\text{ainerako kasuetan}\end{cases}$

i) Defini ezazu $f\left(t\right)$, $H\left(t\right)$ maila funtzioa erabiliz.

ii) Kalkulatu $\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]$.

iii) Ebatzi ondoko hastapen baldintzetako problema:

$$y''+16y=f\left(t\right)\ \text{ non }\ y\left(0\right)=0\ ,\ y'\left(0\right)=1$$

Soluzioa:

A)

$$i)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right]=\frac{\sin\left(4t\right)}{4}\quad,\quad ii)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2}\right]=t\cdot\frac{\sin\left(4t\right)}{8}\quad,$$

$$iii)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a\cdot s}s}{\left(s^2+16\right)^2}\right]=H\left(t-a\right)\cdot(t-a)\cdot\frac{\sin\left(4(t-a)\right)}{8}$$

B)

i) $f\left(t\right)=\cos\left(4t\right)\cdot\left(H\left(t\right)-H\left(t-\pi\right)\right)$

ii) $\dfrac{s}{s^2+16}\cdot\left(1-e^{-\pi\cdot s}\right)$

iii) $y\left(t\right)=\dfrac{\sin\left(4t\right)}{4}+t\cdot\dfrac{\sin\left(4t\right)}{8}-H\left(t-\pi\right)\cdot(t-\pi)\cdot\dfrac{\sin\left(4t\right)}{8}$

2. ARIKETA

Hasierako baldintza nuluak dituen sistema baten erantzuna (irteera) $y\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(e^t-1\right)^2$ funtzioa da, sarrera $H\left(t\right)$ maila funtzioa denean. Ondokoak eskatzen dira:

i) Aurki ezazu sistemaren transferentzia funtzioa.

ii) Aurki ezazu sistemaren erantzuna, sarrera $\delta\left(t\right)$ Dirac delta funtzioa denean.

Soluzioa: i) $Q\left(s\right)=\dfrac{1}{(s-1)\cdot(s-2)}$ **,** ii) $h\left(t\right)=e^{2t}-e^t$

3. ARIKETA

A)

i) Kalkulatu $F(s)=\mathcal{L}\left[t\left[\cos(3t)-\cos(2t)\right]\right]$

ii) Aurreko ataleko emaitza erabiliz, kalkula ezazu hurrengo integralaren balioa

$$I=\int_0^{\infty} t\left[\cos(3t)-\cos(2t)\right]\cdot e^{-t}dt$$

B) Ebatz ezazu hurrengo hastapen baldintzetako problema diferentziala Laplace transformatuaren bidez:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=x(t)+y(t)-e^t \\ y'(t)=x(t)-y(t)+e^t \end{array}\right\} \text{ con } \quad x(0)=y(0)=1$$

Soluzioa:

A) i) $\mathcal{L}\left[t\left[\cos(3t)-\cos(2t)\right]\right]=\dfrac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}-\dfrac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}$ ii) $I=\dfrac{1}{25}$

B) $x(t)=e^t \qquad y(t)=e^t$

4. ARIKETA

i) Izan bedi $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$. Ondorioztatu $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right]$-ren adierazpena $F(s)$-ren funtzioaren arabera.

ii) Izan bitez

$$f(t)=1-e^t+2\int_0^t e^{-(t-x)}\cdot g(x)\cdot dx-\int_0^t f(x)\cdot dx$$

eta

$$g(t) \text{ non } \mathcal{L}\left[g(t)\right]=G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

Lortu $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$.

iii) Lortu $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$.

Soluzioa:

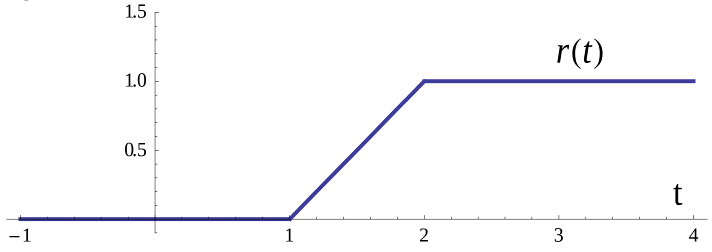
i) Teoria: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right]=\dfrac{F(s)}{s}$

ii) $F(s)=-\dfrac{1}{s^2-1}+\dfrac{2s}{(s+1)^4}$

iii) $f(t)=-\sinh(t)+t^2\cdot e^{-t}-\dfrac{t^3}{3}\cdot e^{-t}$

5. ARIKETA

Izan bedi ondoko grafikoan adierazitako r(t) funtzioa.



i) Defini ezazu r(t) funtzioa maila funtzioa erabiliz.

ii) Lor ezazu $R(s)=\mathcal{L}\left[r(t)\right]$

iii) Ebatz ezazu hurrengo hastapen baldintzetako problema:

$$y''(t)+4y(t)=r\left(t\right) \text{ non } \mathrm{y}\left(0\right)=1\,,\ y'\left(0\right)=0$$

Soluzioa:

i) $r(t)=\left[H_1(t)-H_2(t)\right](t-1)+H_2(t)=H_1(t)(t-1)-H_2(t)(t-2)$

ii) $R(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}-\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

iii) $y(t)=\cos(2t)+\dfrac{1}{4}H_1(t)\left[(t-1)-\dfrac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]-\dfrac{1}{4}H_2(t)\left[(t-2)-\dfrac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]$

6. ARIKETA

Izan bedi $G\left(s\right)=\mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right]$.

i) Lor ezazu $\mathcal{L}^{-1}[G^{n)}\left(s\right)]$ n = 1, 4 eta 7 balioetarako.

ii) Laplace transformatua erabiliz eta g(t) funtziotik abiatuz, aurki ezazu hurrengo ekuazio integrala beteko duen f(t) funtzioa:

$$\int_0^t f\left(x\right)dx=H_a\left(t\right)*t^7\cdot g\left(t\right)$$

Soluzioa:

i) $$\begin{cases} n=1:\mathcal{L}^{-1}[G'\left(s\right)]=-t\cdot g\left(t\right) \\ n=4:\mathcal{L}^{-1}[G^{iv)}\left(s\right)]=t^4\cdot g\left(t\right) \\ n=7:\mathcal{L}^{-1}[G^{7)}\left(s\right)]=-t^7\cdot g\left(t\right) \end{cases}$$

ii) $f\left(t\right)=H\left(t-a\right)\cdot(t-a)^7\cdot g\left(t-a\right)$

7. ARIKETA

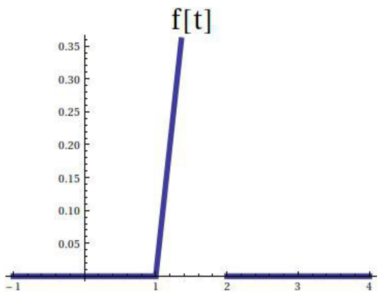
Izan bedi $f(t)=[H_1(t)-H_2(t)](t-1)$ funtzioa.

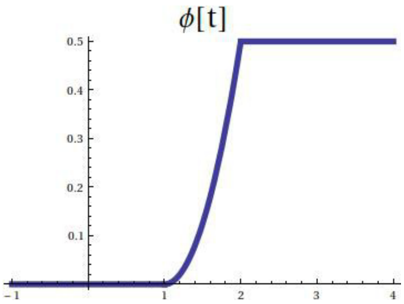
i) $f(t)$ eta $\varphi(t)=\int_0^t f(x)dx$ funtzioen adierazpen grafikoak marraztu

ii) $f(t)$ eta $\varphi(t)$ funtzioen Laplace transformatuak kalkulatu

Soluzioa:

i)





ii)

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{s}\left(\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s}\right)$$

8. ARIKETA

Ebatzi ondoko ekuazio diferentziala: $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=4e^{-2t}$ non $\begin{cases} y(0)=-1 \\ y'(0)=4 \end{cases}$

Soluzioa:

$y(t)=e^{-2t}\cdot(2t^2+2t-1)$

9. ARIKETA

Izan bedi $f(t)=4t+3\int_0^t f(x)\sin(x-t)dx$ funtzioa:

i) Lor ezazu $f(t)$ funtzioaren Laplace transformatua

ii) Ebatz ezazu hurrengo hastapen baldintzetako problema diferentziala:

$$y''(t)+y(t)=H_a(t)f(t-a)+2\cos(t) \text{ non } \begin{cases} a>0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

$f(t)$ aurreko ataleko funtzioa izanik.

Soluzioa:

i) $F(s) = \dfrac{4(s^2+1)}{s^2 \cdot (s^2+4)}$

ii) $y(t) = H(t-a) \cdot \left((t-a) - \dfrac{1}{2}\sin\left(2(t-a)\right) \right) + t \cdot \sin t$

10. ARIKETA

Froga ezazu $\int_0^t \cos(y) \cdot \sin(y-t) \cdot dy = -\dfrac{t \cdot \sin(t)}{2}$ dela, Laplace transformatua erabiliz

11. ARIKETA

Laplace transformatua erabiliz, ebatzi hurrengo hastapen baldintzetako ekuazio sistema:

$$\begin{cases} x' + y = 2 \\ y' + x = t \end{cases} \quad \text{non} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzioa:

$x(t) = t - e^{-t}$ **,** $y(t) = 1 - e^{-t}$

12. ARIKETA

i) Kalkulatu definizioaren bidez ondoko funtzioaren Laplace transformatua.

$$r(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

ii) Definitu $r(t)$, $H(t)$ maila funtzioaren bidez eta kalkulatu bere transformatua. $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$ transformatutik eta transformatuaren propietatetik abiatuz. Enuntziatu erabilitako teoremak eta propietateak.

iii) Ebatzi Laplace transformatuaren bidez ondoko hastapen balioko problema eta adierazi grafikoki lortutako soluzioa.

$$y' + y = r(t) \quad \text{non} \quad y(0) = 0$$

Soluzioa:

i) $\mathcal{L}\left[r(t)\right] = \dfrac{1}{s^2} - e^{-s} \cdot \left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s} \right)$

ii) $r(t) = H(t) \cdot t - H(t-1) \cdot t$ y $\mathcal{L}\left[r(t)\right] = \dfrac{1}{s^2} - e^{-s} \cdot \left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s} \right)$

iii) $y(t) = t - 1 + e^{-t} - H(t-1) \cdot (t-1) = \begin{cases} t - 1 + e^{-t} & 0 < t \le 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$

13. ARIKETA

Ebatzi Laplace transformatuaren bidez ondoko hastapen balioetako problema:

$$y''+2y'+y=e^{-t} \text{ non } \begin{cases} y(1)=\dfrac{3}{2e} \\ y'(1)=\dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

Soluzioa:

$$y(t)=e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)$$

14. ARIKETA

$g(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ e^2\cdot e^{-t}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\sin^2(t-2)\right) & t\geq 2 \end{cases}$ funtzioa emanda, ondokoak eskatzen dira:

i) Definitu $g(t)$ funtzioa maila funtzioaren bidez.

ii) Lortu bere Laplace transformatua.

iii) Lortu sistema fisiko baten erantzuna g(t) sartzen denean, sistema horrek ondoko ekuazio diferentziala betetzen duela jakinda:

$$y''(t)-y(t)=g(t) \quad \text{non} \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Soluzioa:

i) $g(t)=H(t-2)\cdot e^{-(t-2)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\sin^2(t-2)\right)$

ii) $\mathcal{L}\left[g(t)\right]=\dfrac{e^{-2s}}{2}\cdot\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

iii) $y(t)=\dfrac{1}{16}H(t-2)\cdot\left(e^{t-2}-e^{-(t-2)}\cos\left(2(t-2)\right)-e^{-(t-2)}\sin\left(2(t-2)\right)\right)$

15. ARIKETA

Ebatzi ondoko ekuazio diferentziala:

$$y''(t)+y(t)=2e^t \text{ non } \begin{cases} y(\pi/4)=e^{\pi/4} \\ y'(\pi/4)=e^{\pi/4}+\sqrt{2} \end{cases}$$

Soluzioa:

$y(t)=e^t-\cos t+\sin t$