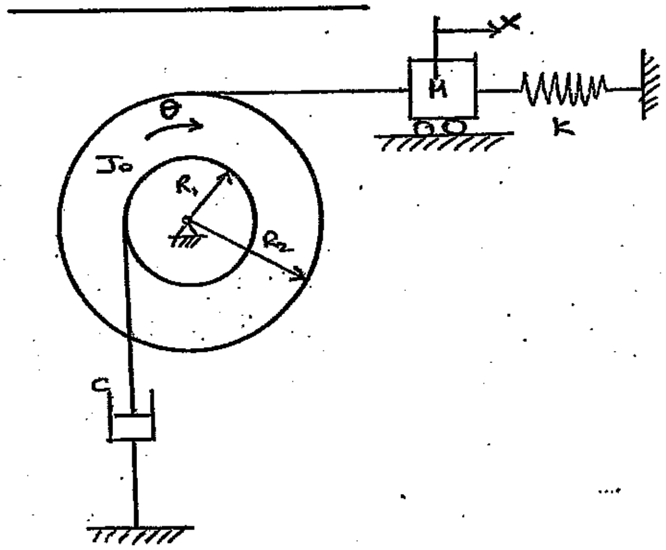
VIBRACIONES

OK

EJERCICIO 3 - LIBRO



1) Ecuación diferencial en función de x.

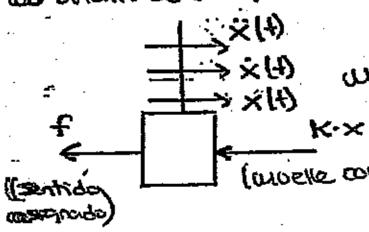
El número de ecuaciones diferenciales es el mismo que el de grados de libertad. Para obtener las ecuaciones diferenciales, estudiamos el sistema dinámicamente.

En el movimiento vibratorio, las posiciones alrededor de la posición de equilibrio son cercanas a cero, pequeñas oscilaciones alrededor de ésta. Por ello, podemos utilizar las siguientes expresiones:

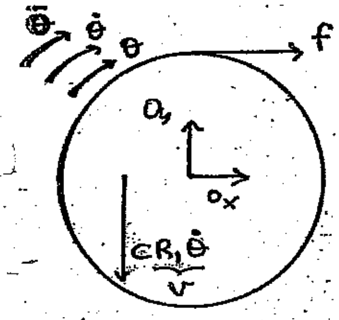
$$\theta \simeq 0 \begin{cases} \cos\theta \simeq 1 \\ \sin\theta \simeq \theta \\ tg\,\theta \simeq \theta \end{cases}$$

Para estudiar el sistema dinámicamente, observamos que tiene dos elementos, por lo que analizaremos el movimiento de cada uno de ellos de forma independiente y las acciones que actúan sobre ellos.

Lo analizamos para un instante genérico de la vibración:



Nos interesa hacer el estudio dinámico en la dirección del movimiento, en el caso de la masa, por tanto, en la horizontal.



La fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad relativa entre los dos topes de éste según una constante c, y en dirección contraria a esa velocidad relativa.

A continuación aplicamos las ecuaciones de la dinámica para cada uno de los elementos en la dirección de su movimiento:

- En la masa: $-Kx - f = M\cdot\ddot{x}$ (tomando positivo hacia la derecha)
- En la polea: $R_2\cdot f - R_1^2 C\cdot\dot{\theta} = J_0\cdot\ddot{\theta}$ (tomando positivo el sentido horario)

momento de inercia   aceleración angular

Estas dos ecuaciones son una sola ecuación real, ya que θ y x son función una de la otra. Según pongamos $x=x(\theta)$ ó $\theta=\theta(x)$ y para obtener velocidades y aceleraciones derivamos, obtendremos la ecuación diferencial en función de x o de θ.

$$f = -M\ddot{x} - Kx$$

$$R_2(-M\ddot{x} - Kx) - cR_1^2\left(\frac{\dot{x}}{R_2}\right) = J_0\left(\frac{\ddot{x}}{R_2}\right)$$

no tienen por qué coincidir con alguno de los de los elementos que forman el sistema

¡masa del sistema!

¡c del sistema!

¡k del sistema

~~De forma genérica, la expresión general del movimiento vibratorio es: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f$.~~

Si aparece el término $c\dot{x}$, significa que el movimiento vibratorio es amortiguado y si no no. El término del otro lado de la igualdad también puede suceder que aparezca o no. Si no existe, se trata de un movimiento vibratorio libre (vibra sin ningún tipo de acción porque le aplicamos unas condiciones iniciales desplazándolo de su posición de equilibrio estable, o dándole una velocidad inicial, o incluso una combinación de ambas). Si ese término existe, es una expresión, refleja la naturaleza del ~~movimiento vibratorio~~.

A continuación, le daremos a la ecuación anterior la forma de la ecuación genérica:

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{J_0}{R_2}+MR_2\right)}_{M\text{ del sistema}}\ddot{x} + \underbrace{\frac{cR_1^2}{R_2}}_{c\text{ del sistema}}\dot{x} + \underbrace{KR_2}_{k\text{ del sistema}}x = 0}$$

A partir de ahora todas las M, K y C que nos aparezcan en las expresiones serán las del sistema.

2) Ecuación diferencial en función de θ.

Sustituimos en la ecuación anterior $x=x(\theta)$: $\begin{cases} x = R_2\theta \\ \dot{x} = R_2\dot{\theta} \\ \ddot{x} = R_2\ddot{\theta}\end{cases}$

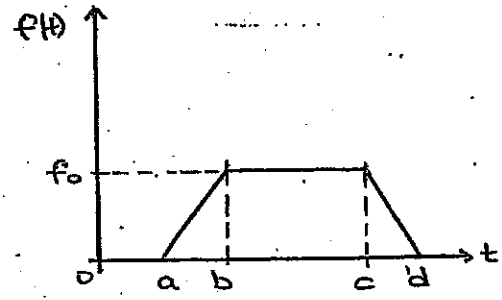
3) ω [frecuencia natural del sistema]

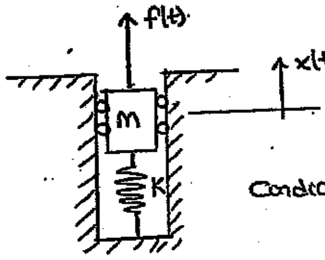
$$\boxed{\omega} = \sqrt{\frac{K}{M}} = \boxed{\sqrt{\frac{KR_2}{\frac{J_0}{R_2}+MR_2}}}$$

¡del sistema!

$$\bar{c} = 2M\cdot\omega = 2\left(\frac{J_0}{R_2}+MR_2\right)\sqrt{\frac{KR_2}{\frac{J_0}{R_2}+MR_2}}$$

EJERCICIO 6 - Libro clase OK





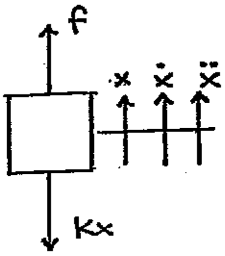
Condiciones iniciales $t=0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = V = \dot{x}_0 \end{cases}$

Se pide calcular $x(t=d)$. Respuesta a función rampa con condiciones iniciales nulas es:

$$x(t) = \frac{\overset{\text{pendiente}}{P}}{\underset{\text{K del sistema}}{K}} t - \frac{P}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t - 2\theta) + \sin 2\theta \right]$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Realizamos el estudio dinámico del único elemento, la masa, en un instante genérico:



Si no nos indican la g (gravedad) no tenemos en cuenta el peso, ya que es una fuerza estática.

Equilibrio vertical: $f - Kx = M\ddot{x} \Rightarrow \boxed{M\ddot{x} + Kx = f(t)}$ Ec. diferencial

La parte del movimiento vibratorio forzado depende de la naturaleza de f(t), y la parte transitoria que corresponde al movimiento vibratorio libre, es la que tiene debido a unas condiciones iniciales que lo desequilibran ($M\ddot{x} + Kx$).

Lo normal es que nos pidan la respuesta estacionaria (que es la correspondiente a la acción exterior) y rara vez piden la transitoria (la del mov. vibratorio libre) o la suma de ambas.

* Vibración libre amortiguada: $M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$

solución (respuesta transitoria): $x = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$, donde A, B = ctes.

para obtener A y B, sustituimos las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$ en la $x(t)$ y $\dot{x}(t)$, particularizadas para $t=0$.

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega e^{-\xi\omega t}(\quad + \quad) + e^{-\xi\omega t}(-A\omega_D \sin\omega_D t + B\omega_D \cos\omega_D t)$$

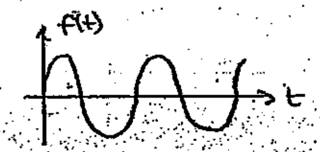
* Vibración forzada: $M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = f(t)$

según la naturaleza de la acción exterior que provoca la vibración forzada, la solución será distinta. Estudiaremos cuatro tipos de fuerzas provocantes

• Movimiento vibratorio forzado armónico

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\bar{\omega}t$$

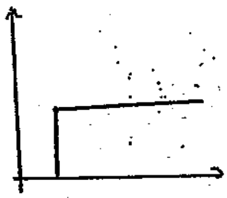
para diferenciarlo de la frecuencia del sistema



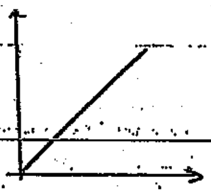
Solución: $$x(t)=\underbrace{e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)}_{\text{solución HOMOGÉNEA } x_h \text{ TRANSITORIA}} + \underbrace{\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\cos(\bar{\omega}t-\varphi)}_{\text{solución PARTICULAR } x_p \text{ ESTACIONARIA}}$$

• Vibración forzada bajo aplicación de impulso

• Vibración forzada por una acción impulso → la respuesta a una acción impulso no es la misma que la respuesta a una fuerza constante.



• Vibración forzada por una acción rampa



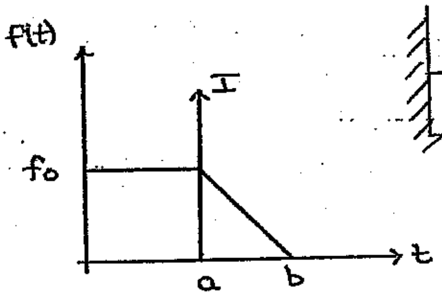
La función impulso es la derivada de la función escalón, y la función escalón es la derivada de la función rampa. Lo mismo sucede con las respuestas a este tipo de acciones.

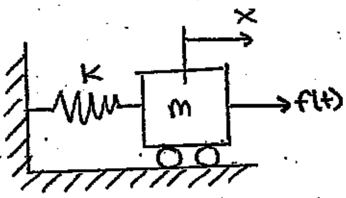
La respuesta para una función rampa está aplicada en $t=0$ y sin ningún tipo de condiciones iniciales.

De forma genérica, si la función se aplica en un tiempo $t=a$, la respuesta es la misma pero trasladando el origen, es decir, cambiando t por $t-a$ en la respuesta genérica correspondiente.

Si la acción que tenemos no es impulso, rampa, escalón ni armónica, debemos ~~estar~~ de buscar una combinación de estos tipos de funciones que de como resultado la función que nos den y aplicar superposición.

EJERCICIO 7 - LIBROCLASE OK





Respuesta Rampa:

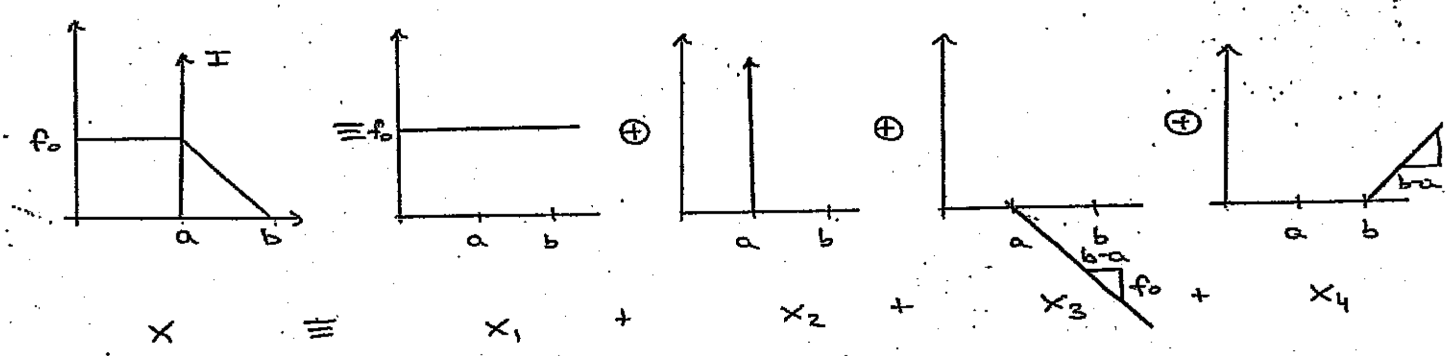
$$x(t) = \frac{P}{K}t - \frac{P}{k\omega_0}\left[e^{-\xi\omega t}\sin(\omega_D t - 2\theta) + \dots\right.$$

$$\theta = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

PARTIENDO DEL REPOSO $\Rightarrow x(t=b)$

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

$$\text{REPOSO} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{array} \right\} \; x_h = 0 \rightarrow \text{porque parte del reposo}$$



Por ser rampa $x_3(t)$ y $x_4(t)$ son conocidos (en el ej. anterior nos dan la respuesta de la rampa)

$$x_3(t) = \frac{-f_0}{(b-a)k}(t-a) + \frac{f_0}{(b-a)k\omega}\sin\omega(t-a)$$

$$x_4(t) = \frac{f_0}{(b-a)k}(t-b) - \frac{f_0}{(b-a)k\omega}\sin\omega(t-b)$$

Sabiendo que el escalón es la derivada de la rampa la respuesta al escalón será:
La derivada de la respuesta a la rampa, es decir:

Escalón con $\xi = 0$ (sin amortiguamiento) $\rightarrow x(t) = \frac{P}{k} - \frac{P}{k\omega}\left[\omega\cos\omega t\right] = \frac{P}{k}\left[1 - \cos\omega t\right]$

el salto del escalón

Como el impulso es la derivada del escalón, su respuesta también será la derivada de la respuesta al escalón:

IMPULSO $\xi = 0$ $\rightarrow x(t) = \frac{P\omega}{k}\sin\omega t$

Por tanto,

$$x_1(t) = \frac{f_0}{k}(1-\cos\omega t)$$

$$x_2(t) = \frac{I\omega}{k}\sin\omega(t-a)$$

Como nos piden la respuesta en $t=b$, particularizando:

$\frac{I}{M\omega}$ no?

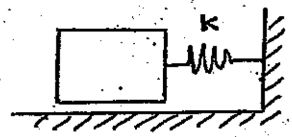
$$\boxed{x(b)} = x_1(b) + x_2(b) + x_3(b) + x_4(b)^{0} = \boxed{\frac{f_0}{k}(1-\cos\omega b) + \frac{I\omega}{k}\sin\omega(b-a) - \frac{f_0}{(b-a)k}(b-a) + + \frac{f_0}{(b-a)\omega k}\sin\omega(b-a)}$$

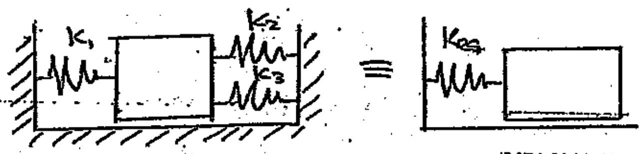
que en realidad no tiene su parte transitoria

$x(t) = x_p(t)$ en este caso (es igual a la estacionaria) porque $x_h(t)=0$ (no hay transitoria, porque las condiciones iniciales son nulas).

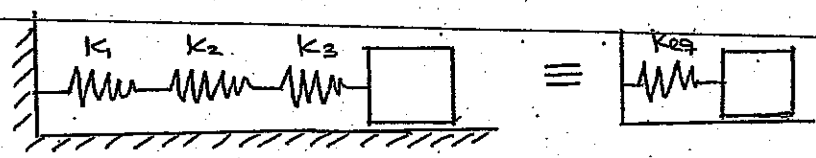
NOTA: Los muelles y amortiguadores pueden agruparse de forma análoga.

- Agrupamientos:



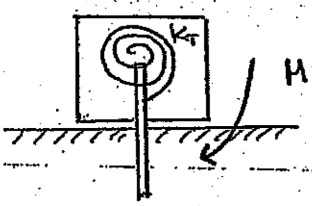


$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$ PARALELO



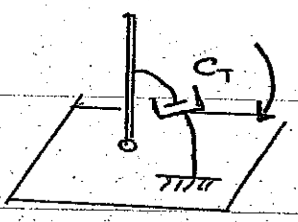
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$ SERIE

- Muelle a torsión:



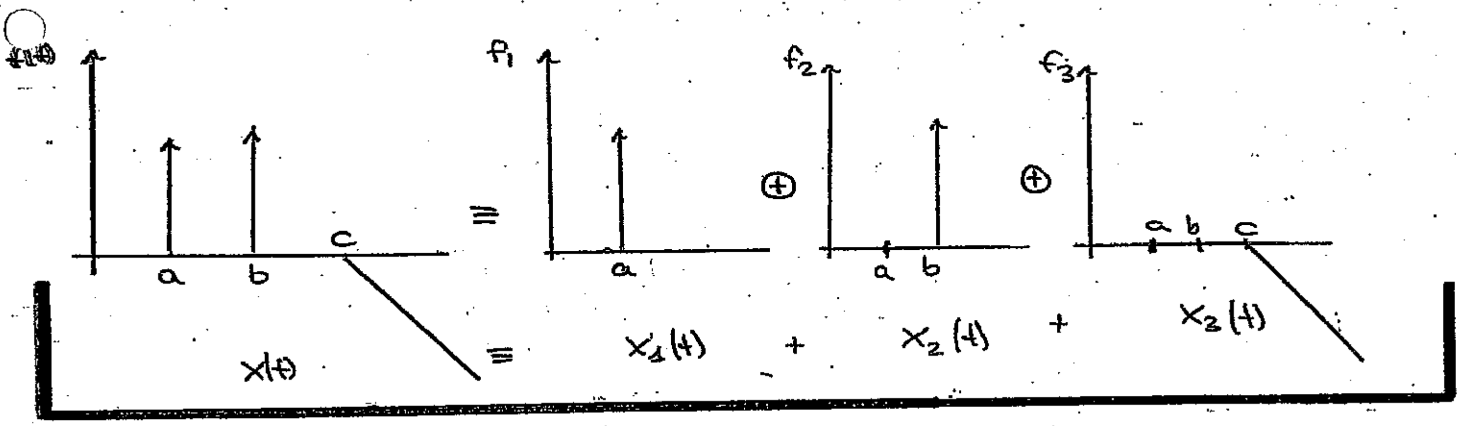
$M = k_T \cdot \theta$

- Amortiguador a torsión:

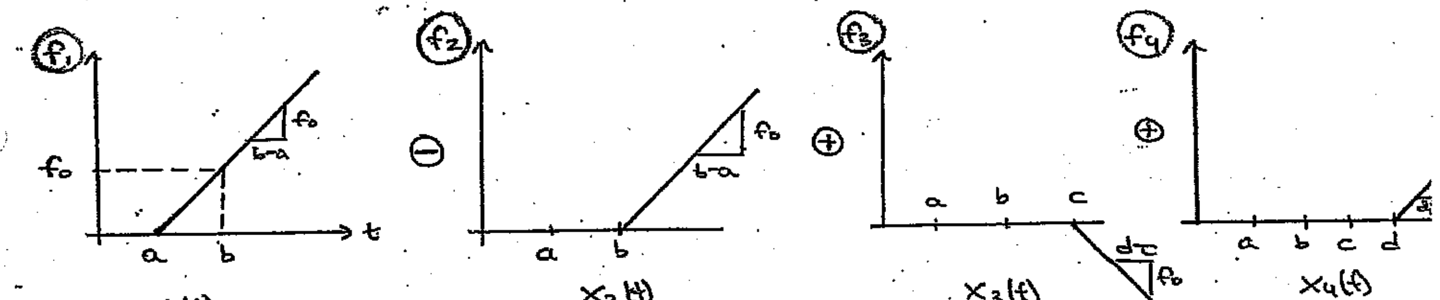


$M = C_T \dot{\theta}$

Por ejemplo:



Siguiendo con el ejercicio...

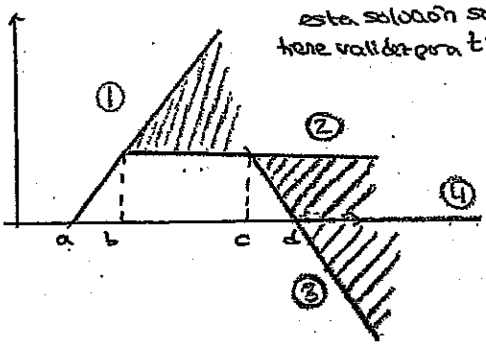


esta solución solo tiene validez para $t \geq a$

esta solución solo tiene validez para $t > b$

esta solución solo tiene validez para $t > c$

esta solución solo tiene validez para $t > d$



Como nos piden la solución para $t=d$, la $x_4(t)$ no la sumaremos ya que en ese instante aún no tendrá efecto alguno, no habrá entrado.

$$x_1(t) = \frac{f_0}{(b-a)K}(t-a) - \frac{f_0}{(b-a)\omega K}\sin(\omega(t-a)) \quad t \geq a$$

(igual para $x_2(t)$ y $x_3(t)$, con los respectivos pendientes...)

$\omega_D = \omega$ porque al no haber amortiguamiento. $c=0$; y $\xi = 0$.

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) \xrightarrow{t=d} x_p(d) = x_1(d) + x_2(d) + x_3(d) + \overset{0}{x_4(d)}$$

$$x_1(d) = \frac{f_0}{(b-a)K}(d-a) - \frac{f_0}{(b-a)\omega K}\sin\omega(d-a)$$

Eso respecto a la respuesta estacionaria, pero para calcular la respuesta completa, nos falta calcular la respuesta transitoria $x_h(t)$ ya que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x_h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Para obtener A y B, particularizamos para $t=0$ y sustituimos las condiciones iniciales:

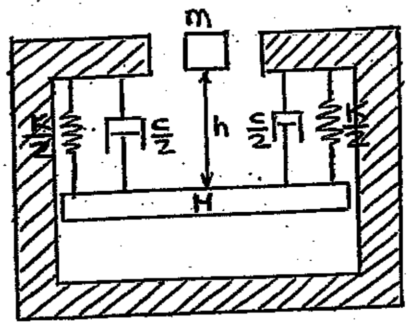
$$x_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A=0}}$$

$$\dot{x}_0 = v \;;\; \dot{x}_h(t) = \omega B \cos \omega t \Rightarrow \dot{x}_h(0) = \omega B = v \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{v}{\omega}}}$$

Por tanto, $x_h(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t \Rightarrow \boxed{x_h(d) = \frac{v}{\omega} \sin \omega d}$

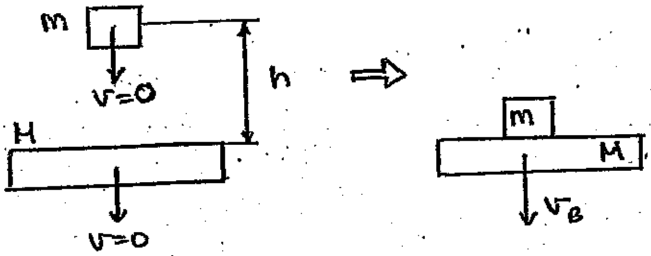
y de modo que $x = x_h + x_p$, donde x_p y x_h en $t=d$ son los obtenidos anteriormente

2002. MARTXOA



Choque plástico $v_{0M}=0$ } Respuesta.

Ⓐ



$E_A = E_B$ (energía mecánica)

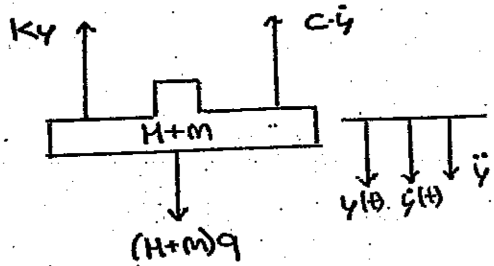
$$\cancel{Mgh = \frac{(M+m)v_B^2}{2}}$$

$$\cancel{\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}}}$$ *

En la posición B comenzará el mov. vibratorio (1 grado de libertad)

$t=0 \rightarrow v_0 = v_B$

Estudio dinámico en un t genérico:



como el peso es una fuerza estática, la respuesta debida a ésta también lo es. Para la respuesta no la vemos considerado, ya que suponemos que su efecto se incluye en la c

$$(M+m)g - ky - c\dot{y} = (M+m)\ddot{y}$$ se trata de un vibratorio libre.

$$\boxed{\underbrace{(M+m)}_{m^*}\ddot{y} + \underbrace{c}_{c^*}\dot{y} + \underbrace{k}_{K^*}y = 0}$$ es la ec. diferencial

* parámetros del sistema

$$y = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)$$

Condiciones iniciales (B) $\rightarrow t=0 \begin{cases} y_0 = 0 \\ \dot{y}_0 = v_0 = v_B \end{cases}$

① $y_0 = 0 \rightarrow \underline{A=0}$

$$\dot{y} = -\xi\omega e^{-\xi\omega t} B\sin\omega_D t + e^{-\xi\omega t}\cdot\omega_D B\cos\omega_D t$$

② $\dot{y}_0 = v_0 = B\cdot\omega_D \rightarrow \underline{\underline{B = \frac{v_0}{\omega_D}}}$

Una vez que tenemos A y B, ya tenemos la respuesta:

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \xi = \frac{c^*}{\bar{c}} = \frac{c}{2\sqrt{k(M+m)}}$$

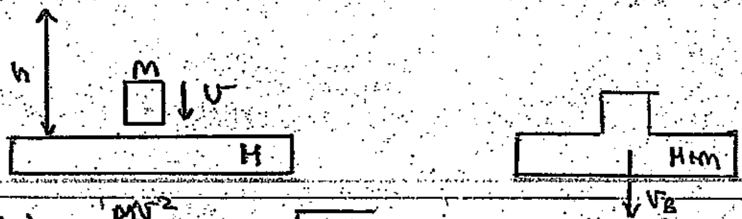
$$\bar{c} = 2m^*\omega = 2\sqrt{k(M+m)} \qquad \omega_D = \sqrt{\frac{k}{M+m}}\left(1 - \frac{c^2}{4k(M+m)}\right)^{1/2}$$

Por tanto,

$$\boxed{y(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot \frac{v_0}{\omega_D} \sin \omega_D t}$$, donde ω, ω_D, ξ y $v_0 = v_B$ son los anteriores.

* Al ser el choque elástico, no se puede aplicar la conservación de la energía mecánica, ya que se pierde una energía de deformación por el choque (se podría si el choque fuese elástico).

Lo que sí se puede aplicar es la conservación del momento lineal antes y después del choque



$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

$m\sqrt{2gh} = (M+m)\, v_B \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m} = v_0}$

x(t) = e^t

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Marzo 2003.
Unidad temática: B.
Ejercicio 2
Peso: 30 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Martxoak 2003
Atal Tematikoa: B
2. ariketa
Pisua: % 30. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK: 0.UE1

Un buque es empujado por dos hélices movidas por sendos ejes huecos. Para estudiar la deformación axial (tracción-compresión) del **sistema eje-hélice**, éste se modeliza como un sistema de 1 gdl cuyos parámetros se dan en la figura 1.

A velocidad de crucero (Ω = 238,73rpm) por efecto del giro de la hélice en el agua, el sistema eje-hélice experimenta una fuerza de empuje hacia adelante, modelizada como suma de una componente estática $\mathbf{F_E}$ y de una sinusoide de amplitud $\mathbf{F_D}$ cuya frecuencia es producto del número de álabes **n** por la velocidad de rotación del eje Ω (figura 3). Se pide lo siguiente:

1) Frecuencia natural ω del sistema eje-hélice. Frecuencia de la excitación para hélice de **n** álabes. **(1p)**
2) Expresión detallada de la respuesta estacionaria x(t) de dicho sistema, en función del número de álabes **n**, a velocidad de crucero. (Ω =238,73 rpm = 25rad/s). **(3 p)**
3) Respuesta estacionaria si la hélice tiene **n**=4 álabes. ¿Qué sucede considerando las restricciones de espacio de la figura 2? (Se puede observar que si el desplazamiento de los álabes es superior a 0,3m, entonces éstos chocan con el casco). **(3p)**
4) Calcular un número **n** de álabes para la hélice tal que no se produzcan choques entre hélice y casco. Obtener la amplitud de la vibración para ese número de álabes. **(3p)**

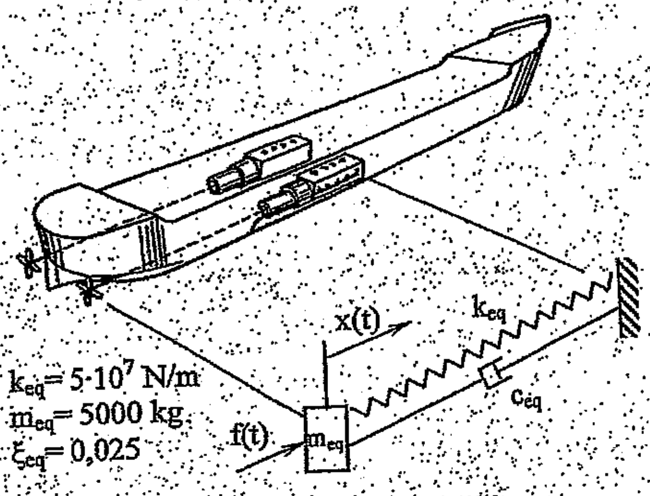


Figura 1. Sistema Eje-Hélice

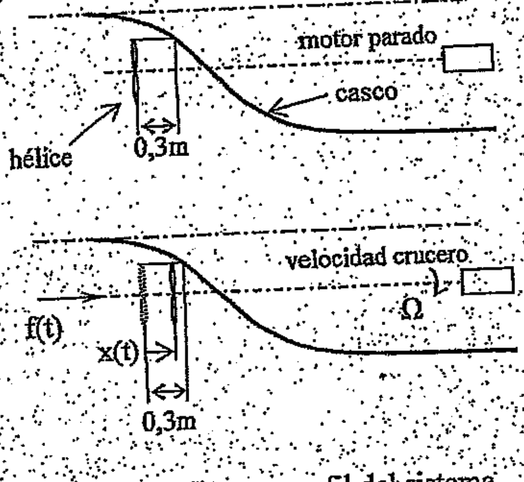


Figura 2. Vista en perfil del sistema

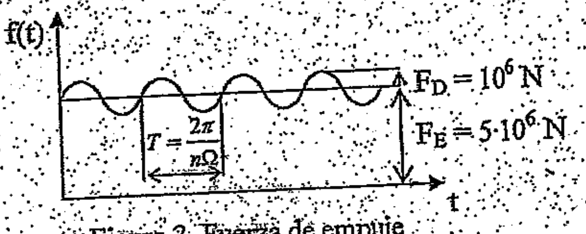
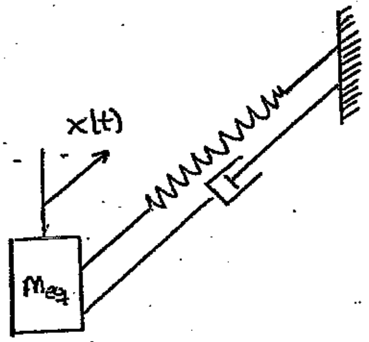
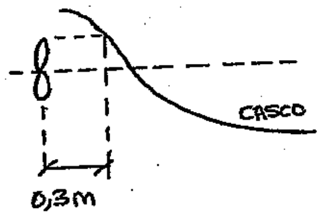
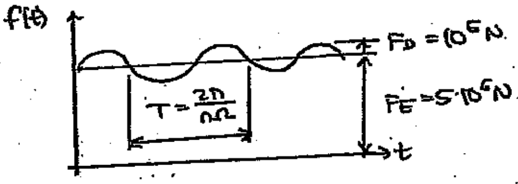


Figura 3. Fuerza de empuje

MARZO 2003







$\Omega = 238{,}73$ rpm

$n \equiv$ nº álabes

$K_{eq} = 5\cdot10^7$ N/m

$M_{eq} = 5000$ kg

$\xi_{eq} = 0{,}025$

1) Frecuencia natural ω y frecuencia de excitación $\bar{\omega}$.

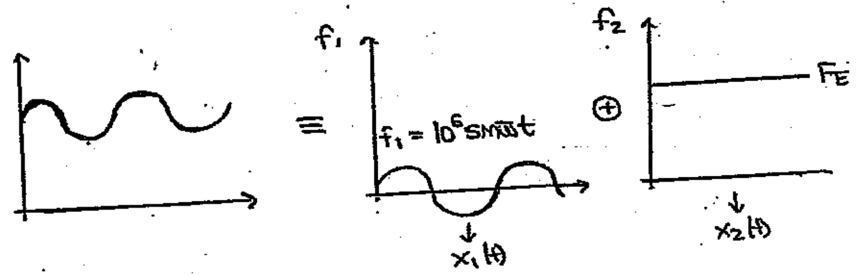
Como el sistema que vibra es un sistema básico, conocemos la ecuación diferencial directamente sin necesidad de hacer el estudio dinámico.

$$M_{eq}\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + K_{eq}\cdot x = f(t)$$

$$\boxed{\omega} = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{5\cdot10^7}{5\cdot10^3}} = \boxed{100 \text{ rad/s}}$$ es la frecuencia natural

$$\boxed{\bar{\omega}} = \frac{n\cdot 238{,}73\cdot 2\pi}{60} = \boxed{25n \text{ rad/s}}$$ es la frecuencia de excitación.

2)



$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$\omega = 100$ rad/s

$\bar{\omega} = 25n$ rad/s

$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{n}{4}$

$$x_1(t) = \frac{10^6/5\cdot10^7}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n}{4}\right)^2\right]^2 + \left(0{,}025\cdot2\cdot\frac{n}{4}\right)^2}}\sin(25nt)$$

$$x_2(t) = \frac{5\cdot10^6}{5\cdot10^7} = 0{,}1\text{m}$$

$$\boxed{x(t) = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2}}\sin 25nt}$$

3) Sustituimos $n=4$ en la expresión obtenida anteriormente:

$$\underline{x(t)} = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{0{,}05} \sin(100t) = \underline{\underline{0{,}1 + 0{,}4 \sin 100t \quad (m)}}$$

Observamos que considerando las restricciones $x^{máx} = 0{,}5$ y por tanto, como vemos que puede ser $x^{max} = 0{,}3$, chocaría contra el casco.

4) Calcularemos n tal que $x(t) \leq 0{,}3$

$$x(t) = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2}} \sin 25nt < 0{,}3$$

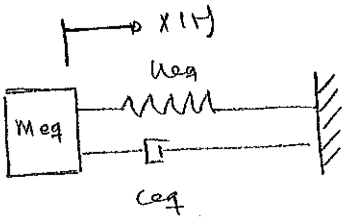
Trabajaremos con amplitudes ya que el valor más peligroso será cuando el seno valga la unidad:

$$\underline{x_{máx}} = 0{,}1 + \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2}} < 0{,}3 \Rightarrow x_{max} = \frac{0{,}02}{\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2}} < 0{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}1^2 < \left(\sqrt{\left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2}\right)^2 \Rightarrow 0{,}01 = \left(1-\frac{n^2}{16}\right)^2 + (0{,}0125n)^2 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 4{,}12 \\ n_2 = 3{,}82 \end{cases}$$

Sabemos que $n < 4$, ya que con $n=4$ nos ha dado que choca con el casco. Por tanto $\underline{n=3}$ es la respuesta ya que debe ser el número entero menor más cercano a $n = 3{,}82$

EJERCICIO MARZO 2003 – helices / buque



$k_{eq} = 5\cdot 10^7$ N/m

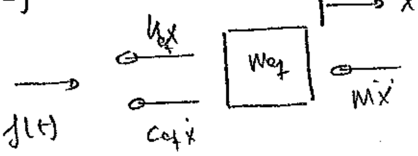
$M_{eq} = 5000$ kg

$\xi_{eq} = 0'025$

1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\dfrac{5\cdot 10^7}{5000}} = 100$ Hz

$\overline{\omega} = n\cdot\Omega = 238'73\cdot 2\pi\cdot\dfrac{1}{60}\cdot n = 25\, n$ Hz

2)



$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = f(t)$ → vibraciones armónicas amortiguadas

(ojo aquí sólo tengo en cuenta el efecto de $F_0(t)$)

$$x(t) = X_{est}\cdot D\cdot e^{i(\overline{\omega}t-\varphi)}$$

$$X_{est} = \frac{F_0}{k} \;;\; D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \;;\; \beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} \;;\; \varphi = \text{arctg}\,\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{5\cdot 10^7}\cdot\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left[1-\left(\frac{25n}{100}\right)^2\right]^2+\left(2\cdot 0'025\cdot\frac{25n}{100}\right)^2}}_{\sqrt{1-0'9975\left(\frac{25n}{100}\right)^2}}}\, e^{i\left[25nt-\text{arctg}\left(\frac{2\cdot 0'025\cdot\frac{25n}{100}}{1-(25/n)^2}\right)\right]}$$

Ahora por superposición $x(t) = \ldots + F_e/k_{eq}$

3) si $n = 4$ → $\overline{\omega} = 100$ Hz $= \omega$ → $\beta = 1$ → resonancia

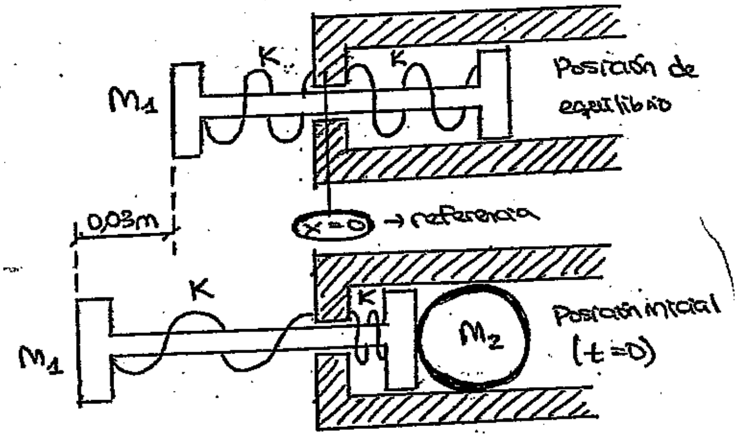
$$x(t) = 4\cdot 10^{-7}\, F_0\, e^{i(100t-\pi/2)} + F_e/5\cdot 10^7$$
$$= 0'4\, e^{i(100t-\pi/2)} + 0'4$$

Lo que se observa es que la hélice va a chocar con el casco

4) Para que no haya choques: amplitud $= 0'2 = X_{din}$

$0'2 \leq \dfrac{F_0}{k}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-0'9975\left(\frac{25n}{100}\right)^2}}$ → $\left(\dfrac{F_0}{0'2k}\right)^2 \leq 1 - 0'9975\left(\dfrac{25}{100}\right)^2\cdot n^2$ → $n \leq \sqrt{\left[1-\left(\frac{F_0}{\ldots}\right)^2\right]\frac{1}{\ldots}\cdot 16}$ $\leq 3'98$ álabes

EJERCICIO 12 - LIBRO CLASE



$M_1 = 0{,}06\ kg$

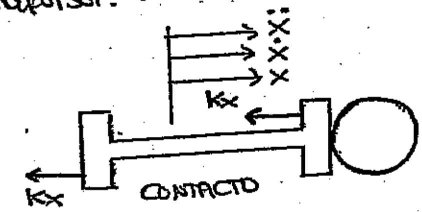
$M_2 = 0{,}04\ kg$

$k = 500\ N/m$

$3{,}5\ \frac{m}{s} \leq V \leq 4\ \frac{m}{s} \Rightarrow$ B. Extra

1) $x(t)$ del pistoco (vástago impulsor) con la bola en contacto.

El sistema tiene 1 g.d.l., que es necesario para definir la posición del vástago impulsor. Realizando el análisis dinámico en un instante genérico:

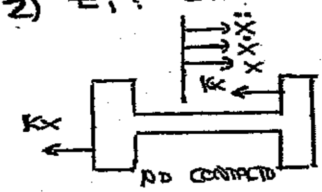


Podríamos sustituir la bola también por la fuerza que ejerce sobre el vástago.

Suponemos un instante genérico en el que el vástago está desplazado hacia la derecha.

$$-2kx = (0{,}04+0{,}06)\ddot{x} \Rightarrow \boxed{0{,}1\ddot{x} + 1000x = 0}$$ es la ec. diferencial del movimiento. $t \leq t_1$ (mov. vibratorio libre).

2) t_1? Instante en el que la bola se separa del vástago



En un instante genérico en el que no hay contacto:

$$-2kx = 0{,}06\ddot{x} \Rightarrow \underline{\underline{0{,}06\ddot{x} + 1000x = 0}} \quad t \geq t_1$$

mov. vibratorio libre.

En el instante t_1 cumplirá ambas expresiones:

$$\left.\begin{cases} 0{,}1\ddot{x} + 1000x = 0 \\ 0{,}06\ddot{x} + 1000x = 0 \end{cases}\right\} \ddot{x}(t_1) = 0$$ → se va a separar cuando el vástago alcance su velocidad máxima (su aceleración será nula).

Tomando cualquiera de las dos: $\underline{\underline{x(t_1) = 0}}$

Sabemos que t_1 es el tiempo que tarda en llegar de la posición inicial a la de equilibrio, en la que $x=0$. Obtenemos para ello la solución de $x(t)$ para $t \leq t_1$:

$x(t) = A\cos wt + B\sin wt$

$x_0 = -0{,}03\ m \rightarrow \underline{\underline{A = -0{,}03}}$

$\dot{x}_0 = 0$

$\dot{x}(t) = -wA\sin wt + Bw\cos wt \Rightarrow 0 = wB \rightarrow \underline{\underline{B = 0}}$

Por tanto, $x(t) = -0{,}03\cos\omega t$

Sustituyendo lo obtenido, es decir, $x(t_1)=0$:

$$\left.\begin{aligned} &0 = -0{,}03\cos\omega t_1 \\ &\omega = \sqrt{\frac{k^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{1000}{0{,}1}} = 100 \ \text{rad/s} \end{aligned}\right\} \ 0 = -0{,}03\cos 100 t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{200}\ s}$$

es el tiempo q tarda en despegarse.

3) $V_{bola} = \dot{x}(t_1)$

Tal y como hemos deducido antes: $x(t) = -0{,}03\cos 100t \quad t \le t_1$

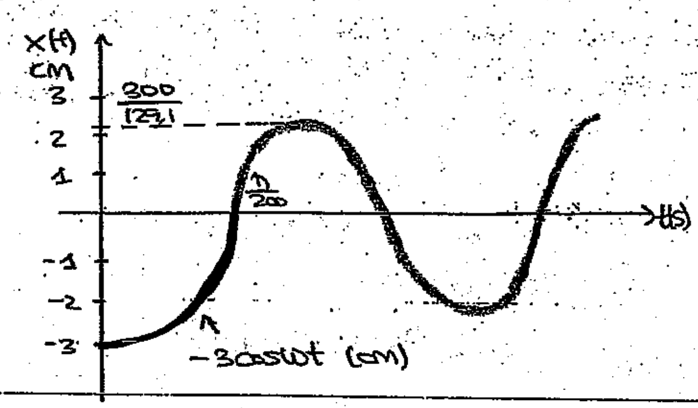
$\dot{x}(t) = +3\sin 100t \quad t \le t_1$

Por tanto, $\boxed{\dot{x}(t_1)} = 3\sin 100t_1 = 3\sin 100\frac{\pi}{200} = \boxed{3\ \text{m/s}} \rightarrow$ no consigue bola extra.

4) Tal y como hemos obtenido en el apartado (1), para $t \ge t_1$:

$$\boxed{0{,}06\ddot{x} + 1000x = 0}$$

5) Ley de movimiento del vástago $x(t)$.



En la etapa de no contacto la solución será la siguiente:

$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad t \ge t_1$

$\left.\begin{aligned} &x_{t_1} = 0 \\ &\dot{x}_{t_1} = 3\ \text{m/s} \end{aligned}\right\}$ esta 2ª etapa empieza en t_1.

$\omega = \sqrt{\frac{1000}{0{,}06}} = 129{,}1\ \text{rad/s}$

Para facilitar pondremos $t_1 = \frac{\pi}{200} \rightarrow t' =$

$x(t) = C\cos\omega t' + D\sin\omega t' \quad t' = t - t_1$

$\underline{\underline{C=0}}$

$\dot{x}(t') = D\omega\cos\omega t' \Rightarrow 3 = 129{,}1D \Rightarrow \underline{\underline{D = \frac{3}{129{,}1}}}$

$\left.\begin{aligned} &t \ge t_1 \\ &t' \ge 0 \end{aligned}\right\} \underline{\underline{x(t) = \frac{3}{129{,}1}\sin 129{,}1t' \ (\text{m})}}$

TODO MAL

Problema 12. Petacos

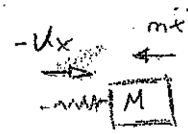
$\omega = \sqrt{k/m} = 100 \text{ rad/s}$

$m_1 = 0,06 \text{ kg}$

$m_2 = 0,04 \text{ kg}$

$k = 500 \text{ N/m} \quad (2)$

$c = 0$



$-kx - m\ddot{x} = 0$

$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

$0,01\ddot{x} + 1000x = 0$

$x_0 = -0,03$

Vibr. libres $\quad \dot{x}_0 = 0$

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \rightarrow A\cos(0) = -0,03 \rightarrow A = -0,03$

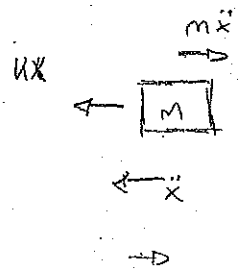
$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \quad t=0 \rightarrow \omega B\cos 0 = 0 \rightarrow B = 0$

$\boxed{x(t) = -0,03\cos 100t}$

$\dot{x}(t) = 3\sin 100t$

$\ddot{x}(t) = 300\cos 100t \rightarrow = 0 \rightarrow \cos 100t = 0 \rightarrow 100t = \pi/2 \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{200}} \text{ s}$

$\dot{x}(t_1) = \dot{x}(\pi/200) = 0,3\sin(\pi/2) = \boxed{0,3 \text{ m/s}}$ No lo consigue



$0,06\ddot{x} - 1000x = 0$

$0,06s^2 - 1000 = 0 \rightarrow s^2 = \sqrt{\frac{1000}{0,06}} \rightarrow \omega = 129,1 \text{ rad/s}$

$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \qquad x_1 = 0 \,;\, \dot{x}_1 = 3$

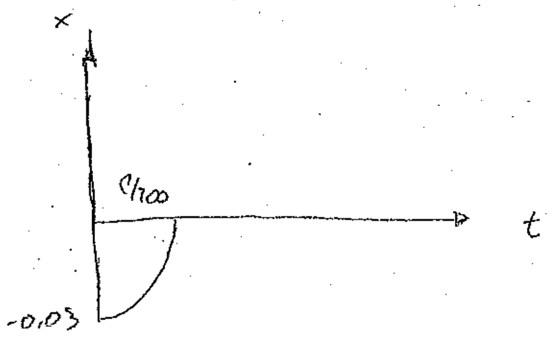
$\dot{x}(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t \qquad \rightarrow D = C/2$

$x(\pi/200) = C\cos 0,65\pi + D\sin 0,65\pi = 0 \qquad \left\{ -0,45C + 0,89D = 0 \right.$

$\dot{x}(\pi/200) = -130 C\sin 0,65\pi + 130 D\cos 0,65\pi = 3 \qquad \left\{ -115,83C - 59,01D = 3 \right.$

$D = -0,02 \,;\; C = -0,04 \qquad -C = 0,02$

$-D = 0,01$


x
c/100
t
-0,03

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3° Ingeniería Industrial. Septiembre 2006.
Examen Final.

Peso sobre la Unidad Temática: 10 %.
Ejercicio. 3 Tiempo: 30 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

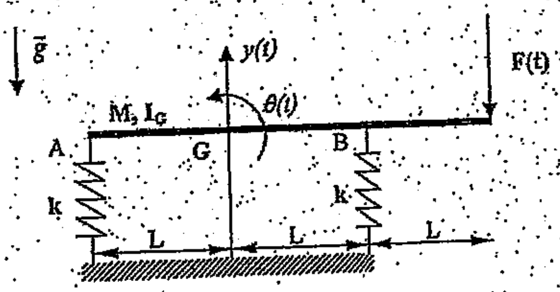
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2006.-eko Iraila.
Azterketa Finala.

Atal Tematikoaren Pisua: 10 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 30 min.

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

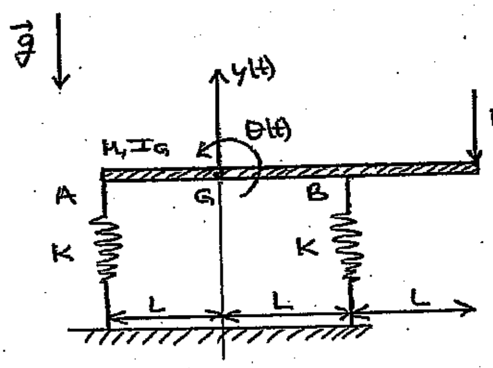
En la figura siguiente se representa una viga indeformable montada sobre un dispositivo de análisis experimental de vibraciones. Este sistema viene formado por una viga indeformable de masa M, longitud 3L y de momento de inercia respecto de su centro de gravedad G, I_G. Dicha viga viene unida al suelo en A y B mediante dos resortes de constante k. El sistema posee dos grados de libertad ($y(t)$, $\theta(t)$) correspondientes a la traslación vertical del centro de gravedad G de la viga y a su giro alrededor de G. Se pide, cuando el sistema se ve sometido a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$, y a la carga impulso unitario **F(t)** (aplicada en $t=0$), tal como aparece en la figura: 0,00000 hay que tener en cuenta el peso

1. Las ecuaciones de gobierno del sistema. (3p)
2. Las frecuencias naturales del sistema. (1p)
3. La respuesta del sistema frente a todas las cargas. (6p)



SEPT. 06

"n" grados de libertad

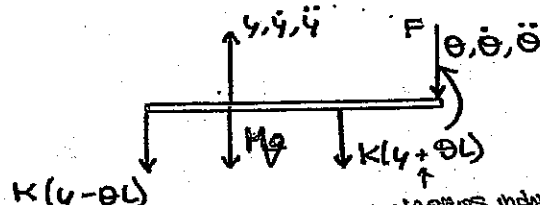


NOTA → habitualmente el peso no se tiene en cuenta, y cuando tengamos que considerarlo aparecerá $\vec{g}$ o nos lo dirán explícitamente.

1) Ecuaciones del movimiento.

Tendremos tantas ecuaciones como grados de libertad. En general, en un sistema plano habrá tres grados de libertad y seis en el espacio. En nuestro caso, el sistema es plano y no se considera el movimiento horizontal, luego el sistema tiene dos grados de libertad y por tanto dos ecuaciones diferenciales.

Para obtenerlas, realizaremos el estudio dinámico de los elementos aislados del sistema para un instante genérico en el que estará bajo la acción del peso y de la fuerza F(t).



analizamos independientemente lo que sucederá con cada parámetro.

Como consideramos las vibraciones pequeñas, utilizamos las siguientes equivalencias, ya que los ángulos son pequeños:

$\cos\theta = 1$ y $\sin\theta \simeq tg\theta \simeq \theta$

si suponemos el muelle comprimido será:

$\uparrow K(\theta L - y)$

te has colado en este signo no?

$$\Sigma F_y = Ma \Rightarrow -F - K(y+L\theta) - Mg - K(y-L\theta) = M\ddot{y}$$

$$\Sigma M_z = I_G\alpha \Rightarrow L\cdot K(y-L\theta) - L\cdot K(y+L\theta) - 2L\cdot F = I_G\ddot{\theta}$$

(hacemos antihorario porque así es como hemos tomado la aceleración angular)

Ordenando las ecuaciones para darles la forma genérica $(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t))$:

$$(1)\ \boxed{M\ddot{y} + 2Ky = -F - Mg}$$

$$(2)\ \boxed{I_G\ddot{\theta} + 2KL^2\theta = -2LF}$$

Examinamos estas ecuaciones y vemos que en cada una de ellas sólo aparece un parámetro y sus derivadas. Por tanto lo resolvemos como hasta ahora, cada ecuación por su parte.

La otra posibilidad será que las ecuaciones estén acopladas, es decir que aparezcan mezclados varios parámetros. En ese caso, para resolver deberemos recurrir al método general de la última página de los apuntes que nos dio él.

2) Independientemente de si están acopladas o no, tendremos tantas ~~ecua~~ frecuencias como ecuaciones diferenciales (grados de libertad)

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega_1=\sqrt{\dfrac{2k}{M}}\\[2ex] \omega_2=\sqrt{\dfrac{2kl^2}{I_G}}\end{array}}$$

son las dos frecuencias naturales del sistema $\left(\omega=\sqrt{\frac{K_{sis}}{M_{sis}}}\right)$

3) Respuesta del sistema → $y(t)$, $\theta(t)$

Conocida la naturaleza de la acción, obtendremos directamente la respuesta:

$$\boxed{\theta(t)=\frac{\ominus 2l}{I_G\,\omega_2}\sin\omega_2 t}$$

(el impulso está aplicado en $t=0$ y es unitario).

Para obtener la respuesta $y(t)$, aplicaremos superposición

$$\boxed{y(t)=\underbrace{\ominus\frac{\sin\omega_1 t}{M\omega_1}}_{\substack{\text{respuesta debida a F}\\ \text{RESPUESTA DINÁMICA}}}-\underbrace{\frac{Mg}{2k}}_{\substack{\text{respuesta debida al peso}\\ \text{RESPUESTA ESTÁTICA}}}}$$

¡OJO! El peso es una fuerza constante en todo momento, una fuerza estática. La función escalón es constante, pero a partir de un instante determinado. ¡No es lo mismo!

$$-\frac{I_G}{2L}\ddot\theta - kL\theta = F \qquad (m\ddot x - kx = F)$$

esto se resolvía como en el caso de las vibraciones libres, con $x(0)=0$, $\dot x(0)=\frac{1}{m}$

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$$

$$\dot\theta(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$x(0) = A = 0 \rightarrow A=0 \; ; \; \dot x(0) = B\omega = \frac{1}{m} \rightarrow B = \frac{1}{m\omega}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{m\omega}\,\text{sen}(\omega t) \xlongequal{\text{en este caso}} \frac{1}{-\frac{I_G}{2L}\,\omega_2}\,\text{sen}(\omega t)$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\frac{kL}{\frac{I_G}{2L}}} = \sqrt{\frac{2kL^2}{I_G}}$

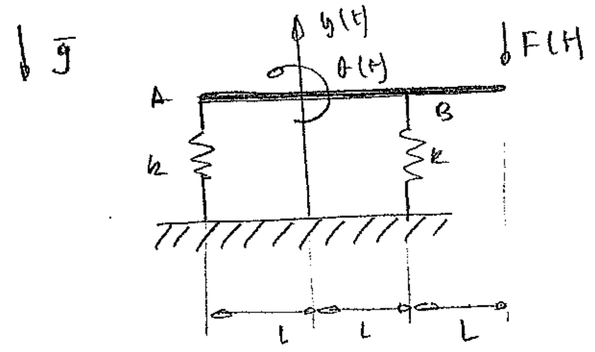
VOLVER HACER → BUEN CAGADONCIO

EXAM SEPTIEMBRE 2006

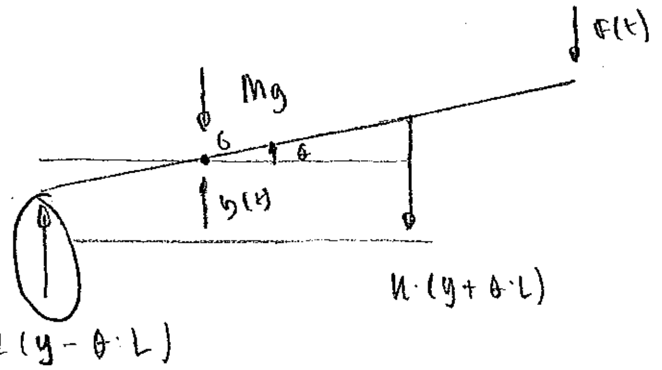
masa viga: M, I_G

long viga: $3L$

g.d.l → $y(t)$, $\theta(t)$



1.)



CAGADÓN no tiene por qué ser hacia abajo

$$\Sigma F_y: \quad K(y-\theta L) - K(y+\theta L) - Mg - F(t) = M\ddot{y} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad M\ddot{y} + 2K\theta L = -Mg - F(t)$$

$$\Sigma M_G: \quad -K(y-\theta L)\cancel{L} - K(y+\theta L)\cancel{L} - F(t)\cdot 2\cancel{L} = I_G\cdot\ddot{\theta}\,\frac{1}{L} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \frac{I_G}{L}\ddot{\theta} + 2Ky = -2F(t)$$

De forma matricial

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{I_G}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2KL \\ 2K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Mg + F(t) \\ 2F(t) \end{Bmatrix}$$

Ahora para hallar las frecuencias naturales $\{f(t)\} = \{0\}$ y $[C] = 0$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{I_G}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2KL \\ 2K & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \text{sol de la forma } x(t) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M & 2KL \\ 2K & -\frac{I_G}{L}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow$$

Esto sólo tendría sol diferente de la homogénea si:

$$\begin{vmatrix} -w^2 M & 2kL \\ 2k & -\frac{I_0}{L} w^2 \end{vmatrix} = \frac{M I_0}{L} w^4 - 4k^2 L = 0$$

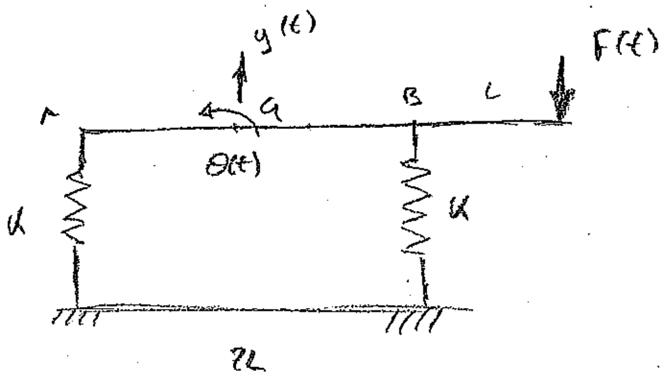
$$\left(\sqrt{\frac{M I_0}{2L}}\, w^2 + \overset{2\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2L}}}\, k \right) \left(\sqrt{\frac{M I_0}{2L}}\, w^2 - \overset{2\sqrt{2}}{\sqrt{2L}}\, k \right) = 0$$

los w^2 deberían ser positivos $\rightarrow$ algo he hecho mal

$M, 3L, I_g$

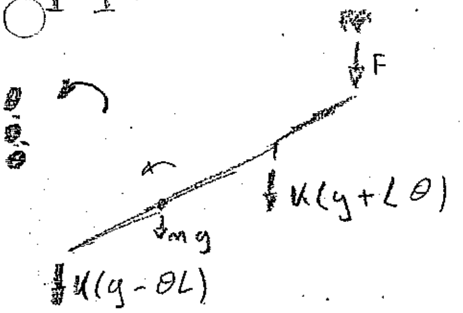
k

$y(t), \theta(t)$



$y: \quad M\ddot{y} + 2ky + Mg + F(t) = 0$

$\theta: \quad \ddot{\theta} I_g \pm 2FL \pm 2kL^2\theta$

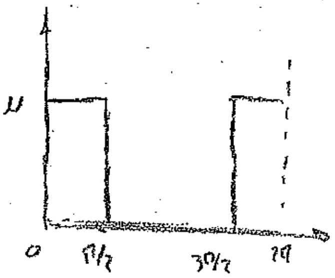


$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{y} + 2ky &= -F(t) - Mg \\ I_g\ddot{\theta} + 2kL^2\theta &= -2F(t)L \end{aligned}}$$

ω's: $\quad \omega_1 = \sqrt{2k/m} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{2kL^2/I_g}$

Martxoak '03 : Cremallera

1]

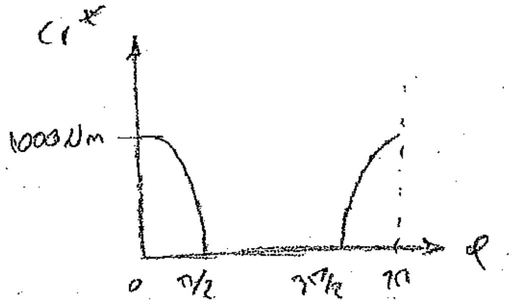


$M^*(\varphi)\, w_e = \sum F_j v_j + \sum M_j \omega_j$

$M^*(\varphi) \cdot \dot\varphi = 5000\, \dot\varphi\, R \cos\varphi =$

$M^*(\varphi) = 5000\, R \cos\varphi = C_R^*$

$C_r^* = 1000 \cos\varphi$ Nm



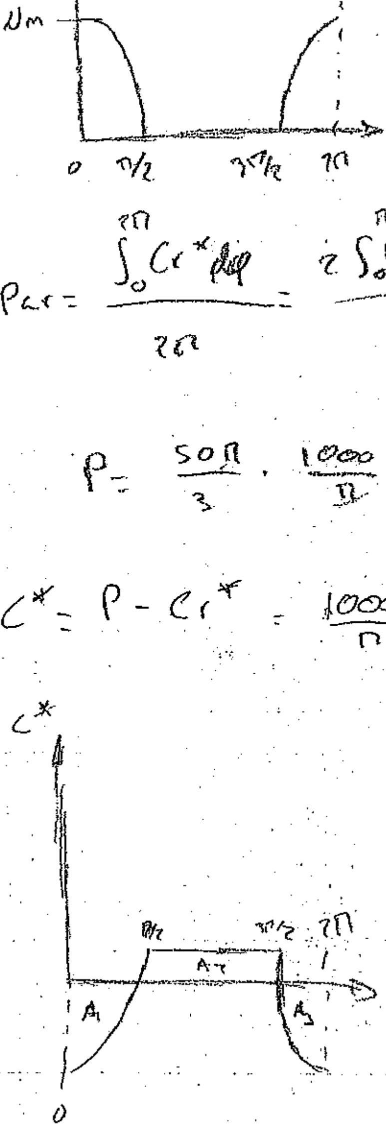
¿Potencia? $\omega = \frac{2\pi \cdot 500}{60} = \frac{50\pi}{3}$ rad/s

$$P_{ar} = \frac{\int_0^{2\pi} C_r^* d\varphi}{2\pi} = \frac{2\int_0^{\pi/2} 1000\cos\varphi\, d\varphi}{2\pi} = \frac{1000}{\pi} \text{ Nm}$$

$$P = \frac{50\pi}{3} \cdot \frac{1000}{\pi} = \boxed{\frac{50.000}{3} \text{ Nm}}$$

$C^* = P - C_r^* = \frac{1000}{\pi} - 1000\cos\varphi \rightarrow = 0 \quad \cos\varphi = 1/\pi = 0{,}318$

$\hookrightarrow \varphi = 1{,}25$



$S_1 = A_1 = \int_0^{1{,}25} \frac{1000}{\pi} - 1000\cos\varphi\, d\varphi = -551{,}10$

$A_2 = 2\int_{1{,}25}^{\pi/2} 1000/\pi - 1000\cos\varphi\, d\varphi + 2\int_{\pi/2}^{\pi} 318{,}31\, d\varphi = 1102{,}19$

$S_2 = 551{,}1$

$S_3 = 0$

$$I = \frac{S_M - S_m}{\varepsilon \omega_a^2} = \frac{551{,}1 + 551{,}1}{0{,}01 \cdot \left(\frac{50\pi}{3}\right)^2} = 40{,}2 \qquad 40{,}2 - 1 = 39{,}2 \text{ kg m}^2$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3er curso. Junio 2002.

Unidad temática: B.

1er ejercicio.

Peso: 60 %. Tiempo: 60 min.

2. Ariketa Aztertzeari konexatuta {Hantxe dago fotokopietan}

GRUPO:

NOMBRE:

APELLIDOS:

OJOOO TEORÍA IMPORTANTE

1. Representar en el diagrama de Argand (diagrama de vectores giratorios) las diferentes fuerzas que intervienen en el sistema discreto básico de la Figura 1, justificándolo con las correspondientes ecuaciones. Indicar cómo quedaría el diagrama en la condición de resonancia. (3p)

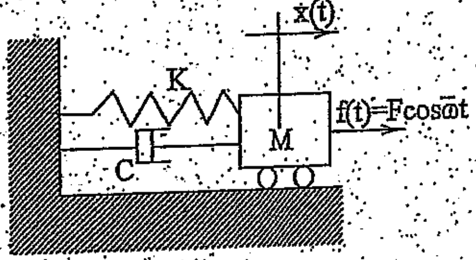


Figura 1.

ENTENDIDO – VOLVER A HACER (es una chorrada)

2. En el sistema de la Figura 2, se da al soporte un desplazamiento a lo largo del tiempo $x_0(t)$, de la forma indicada en la Figura 3. Obtener el desplazamiento absoluto $x(t)$ de la masa M en función del tiempo (ver nota). (3p)

f(t) = A x(t)

Nota: respuesta a la función rampa:

$$x(t) = \frac{I}{k}\left(t - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)$$

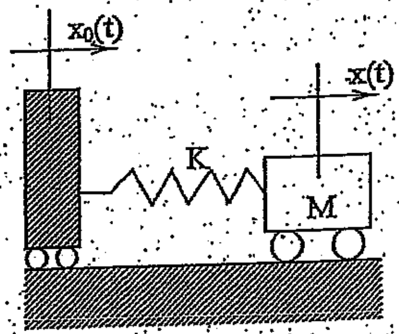


Figura 2.

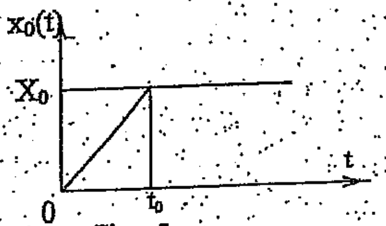
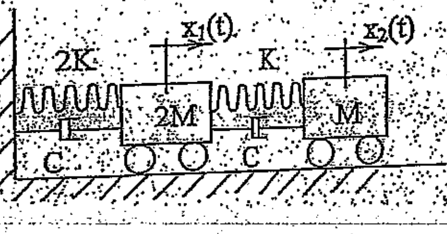


Figura 3.

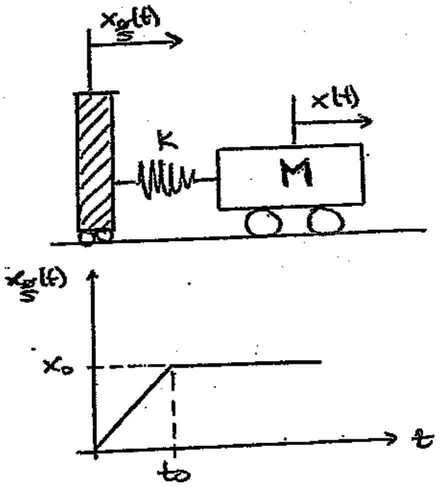
f = kx

ORTEI → FACILÍSIMO

3. Para el sistema de la Figura 4, obtener: (4p)
   a) Ecuaciones del movimiento en forma matricial.
   b) Calcular y representar los modos naturales de vibración.



EKAINA 2002



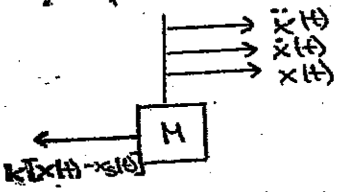
Respuesta a la función rampa:

$$x(t) = \frac{I}{K}\left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right)$$

Para no confundirnos, llamamos a la $x(t)$ del soporte $x_s(t)$ en lugar de $x_0(t)$, para no liarnos con las condiciones iniciales.

(Piden la respuesta estacionaria)

Estudio dinámico de la masa en un instante genérico (solo analizamos el horizontal ya que no se mueve verticalmente



suponiendo que está traccionado.

$$-K(x - x_s) = M\ddot{x} \Rightarrow \boxed{M\ddot{x} + Kx = \underbrace{Kx_s}_{f}}$$

¡¡CLAVE DEL PROBLEMA!!

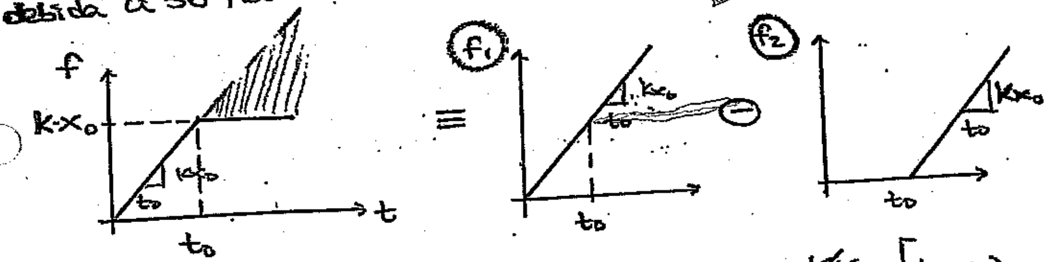
ec. diferencial.

solo las variables correspondientes al mov. vibratorio de la masa

Se trata de un mov. vibratorio no amortiguado y forzado.

La respuesta estacionaria es la debida a los términos de la derecha de la igualdad, debida a su naturaleza

$t \quad \boxed{t_0} \quad t - t_0 \qquad \cancel{x} + 1$



$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$f = f_1 - f_2$

$$x_1(t) = \frac{\cancel{K}x_0}{t_0 \cancel{K}}\left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right) \qquad x_2(t) = \frac{\cancel{K}x_0}{t_0\cancel{K}}\left[(t - t_0) - \frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}\right]$$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{x_0}{t_0}\left[\left(\cancel{t} - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right) - \cancel{t} + t_0 + \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega}\right]$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{t_0}\left[t_0 + \frac{1}{\omega}\left[\sin\omega(t-t_0) - \sin \omega t\right]\right]}$$, siendo $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

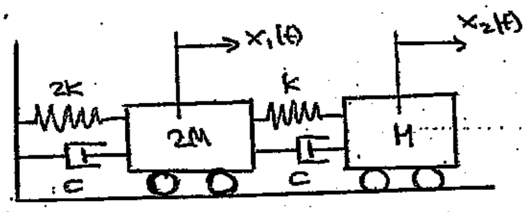
$\cancel{x} + 1 - \cancel{x}$

$$X = \frac{A_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = 1$$

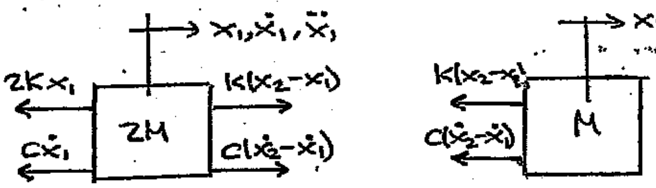
JUNIO 2002

EJERCICIO 3



a) Ecuaciones del movimiento en forma matricial.

Realizamos el estudio dinámico de cada uno de los elementos aislándolo en un inst. genérico:



Para el sistema de masa 2M:

$$(1): \ -2Kx_1 - c\dot{x}_1 + K(x_2-x_1) + c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) = 2M\ddot{x}_1$$

Para el sistema de masa M:

$$(2): \ -K(x_2-x_1) - c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) = M\ddot{x}_2$$

Reorganizamos las ecuaciones ordenándolas por términos a semejanza de la ecuación genérica ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$):

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1): & 2M\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 3Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ (2): & M\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 - Kx_1 + Kx_2 = 0 \end{array}}$$

En este caso las ecuaciones están acopladas ya que los distintos grados de libertad están entrelazados. Para resolverlo, no podemos hacerlo como hasta ahora sino que debemos aplicar un nuevo método general (ver última página teoría).

En primer lugar expresamos las ecuaciones anteriores matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La forma genérica de esta ecuación matricial es: $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$

Estas matrices siempre son simétricas respecto de la diagonal principal.

Si no lo son ya sabes que tienes e...

Para obtener las frecuencias naturales se hace: $[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$, para cualquier caso, y $[K-\omega^2 M]\{X\}=0 \rightarrow |K-\omega^2 M|=0 \Rightarrow \omega_i$: frecuencias naturales
En el caso de nuestro ejercicio:

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3K-\omega^2 2M & -K \\ -K & K-\omega^2 M \end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}}_{\text{amplitudes}}=0 \xrightarrow[\text{anulan}]{\text{Las frecuencias naturales son aquellas que}} \begin{vmatrix} 3K-2M\omega^2 & -K \\ -K & K-\omega^2 M \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3K-2M\omega^2)(K-\omega^2 M)-K^2=0 \Rightarrow 3K^2-3KM\omega^2-2KM\omega^2+2M^2\omega^4-K^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2M^2(\omega^2)^2-5KM\omega^2+2K^2=0$$

ojooo coge las positivas

$$\omega^2=\frac{5KM\pm\sqrt{25K^2M^2-16K^2M^2}}{4M^2}=\frac{5KM\pm 3KM}{4M^2}=\begin{cases}\omega_1^2=\dfrac{5KM+3KM}{4M^2}=\dfrac{2K}{M}\Rightarrow \boxed{\omega_1=\sqrt{\quad}} \\ \omega_2^2=\dfrac{5KM-3KM}{4M^2}=\dfrac{K}{2M}\Rightarrow \boxed{\omega_2=\sqrt{\quad}}\end{cases}$$

La forma síncrona de vibrar es aquella para la cual dos elementos que forman un sistema alcanzan las posiciones límites a la vez (ambos máximos y mínimos o uno el máximo y otro el mínimo). Los modos son las relaciones entre las amplitudes que hay para las formas síncronas de vibrar. Habrá tantos modos como grados de libertad (X^1 y X^2 para un sistema de dos grados). El número de formas síncronas de vibrar también coincide con el de grados de libertad.

¿2 → Para obtener los modos, vibrará de forma síncrona cuando la frecuencia de vibración coincida con una ~~de las frecuencias naturales~~ naturales del sistema.

Para obtener los modos hacemos $[K-\omega^2 M]\{X\}=\{0\}$, en el que habrá $n-1$ ecuaciones independientes, que sustituyendo en ellas de una en una las frecuencias naturales del sistema, nos darán las relaciones entre las X que nos permitirá obtener los distintos modos. Los modos formarán la denominada matriz de los modos, que será necesaria para resolver el sistema y obtener su solución.

$$\begin{bmatrix} 3K-\omega^2 2M & -K \\ -K & K-\omega^2 M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow (3K-\omega^2 2M)X_1-KX_2=0$$

Por tener dos grados de libertad existirán dos modos, que serán las relaciones de las amplitudes (X_1 y X_2) cuando vibra de forma síncrona el sistema, es decir, cuando vibra con una frecuencia natural.

1er modo

- $\omega=\omega_1=\sqrt{\dfrac{2K}{M}} \Rightarrow \left[3K-\dfrac{2K}{\cancel{M}}2\cancel{M}\right]X_1^{(1)}-KX_2^{(1)}=0 \Rightarrow -X_1^{(1)}=X_2^{(1)} \rightarrow \{X^1\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

• $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2M}} \Rightarrow \left[3K - 2M\cdot\frac{K}{2M}\right] x_1^{(2)} - K x_2^{(2)} = 0 \Rightarrow 2x_1^{(2)} = x_2^{(2)} \rightarrow \underline{\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}$

Los modos son, por tanto, $\boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$ y $\boxed{\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}$. con estos modos se puede construir la denominada MATRIZ DE LOS MODOS:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Mediante esta matriz, realizaremos un cambio de variable de las coordenadas $\{x\}$ reales a las coordenadas modales o naturales $\{y\}$ que nos permitirá resolver el sistema, que al ser acopladas las ecuaciones nos resultaba imposible de resolver.

$$\{x\} = [X]\{y\}$$

También se cumplirán las relaciones $\{\dot{x}\} = [X]\{\dot{y}\}$ y $\{\ddot{x}\} = [X]\{\ddot{y}\}$

Llevando estas relaciones a la ecuación matricial obtenida anteriormente:

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

• Por definición se premultiplican todos los términos por la traspuesta la matriz de modos $[X]^T$.

Desarrollando, deberemos obtener todas las matrices diagonalizadas, que reflejarán que las ecuaciones son desacopladas:

$$\begin{bmatrix} 3M & 0 \\ 0 & 6M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5C & -C \\ -C & 2C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6K & 0 \\ 0 & 3K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

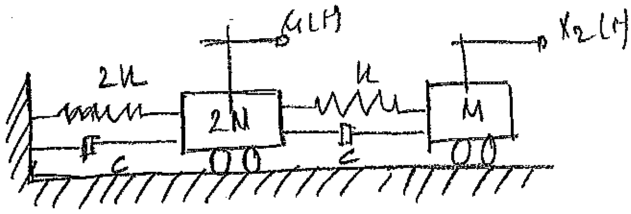
en este caso no sale diagonalizada, pero seguramente será que no está preparado para ello, ya que en el enunciado no piden resolverlo, sino sólo los modos. Saliendo diagonales, tendríamos dos ecuaciones en las que sólo saldría y_1 en una e y_2 en la otra. Resolveríamos el sistema de esa forma y después volveríamos a $\{x\} = [M]\{y\}$ para obtener x_1 y x_2, que serían las soluciones reales.

Cuando no conocemos el amortiguamiento y queremos que la matriz que $[X]^T[C][X] = [\text{diag}]$ utilizamos el amort. proporcional $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ → amortiguamiento de Rayleigh

[illegible]

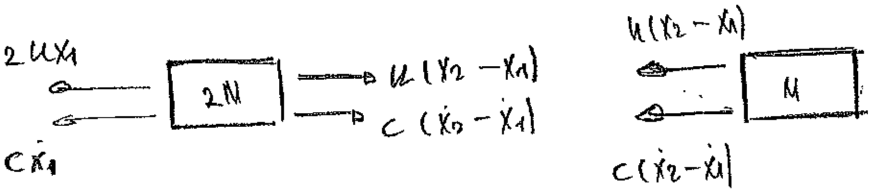
EXAMEN JUNIO 2002

3)



Suponemos $x_2 > x_1$ y $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$

a)



$$-2kx_1 - c\dot{x}_1 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 2M\ddot{x}_1$$

$$\longrightarrow \quad 2M\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 3kx_1 - kx_2 = 0$$

$$-k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = M\ddot{x}_2$$

$$\longrightarrow \quad M\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Para calcular los modos naturales de vibración $[C] = 0$

Si el sistema se mueve armónica y sincrónicamente las soluciones serán $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cos(wt)$. Las sustituimos en el sistema obteniendo:

$$\begin{bmatrix} 3k - 2Mw^2 & -k \\ -k & k - Mw^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tiene solución dist de la trivial si:

$$\begin{vmatrix} 3k - 2Mw^2 & -k \\ -k & k - Mw^2 \end{vmatrix} = 3k^2 - 2kMw^2 - 3kMw^2 + 2M^2w^4 - k^2 =$$

$$= 2M^2w^4 - 5kMw^2 + 2k^2 = 0$$

$$w^2 = \frac{5kM \pm \sqrt{25k^2M^2 - 16k^2M^2}}{4M^2} = \frac{5k}{4M} \pm \frac{3k}{4M} = \begin{cases} w_1^2 = \dfrac{k}{2M} \\[2mm] w_2^2 = \dfrac{2k}{M} \end{cases}$$

→

Como se ve ambas $\begin{cases} \to \omega_1^2 \\ \to \omega_2^2 \end{cases}$ son > 0

Así las frec naturales son:

$$\omega_1 = +\sqrt{\frac{k}{2M}} \qquad \omega_2 = +\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Sustituyendo en una de las ec del sist:

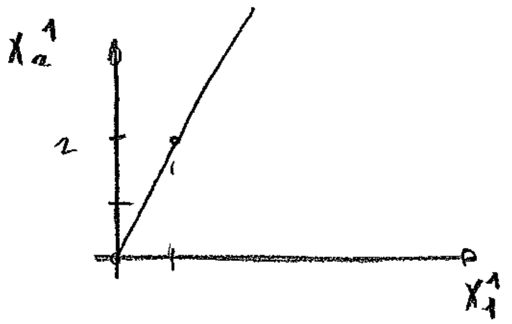
- $$-kX_1 + \left(k - \cancel{M}\frac{k}{2\cancel{M}}\right) X_2 = -\cancel{k}X_1 + \cancel{k}/2\, X_2 = 0$$

1er modo asociado a $\omega_1 = +\sqrt{\frac{k}{2M}}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{X_1^1}{X_2^1} = \dfrac{1}{2}$

- $$-kX_1 + \left(k - \cancel{M}\frac{2k}{\cancel{M}}\right) X_2 = -\cancel{k}X_1 - \cancel{k}X_2 = 0 \longrightarrow$$

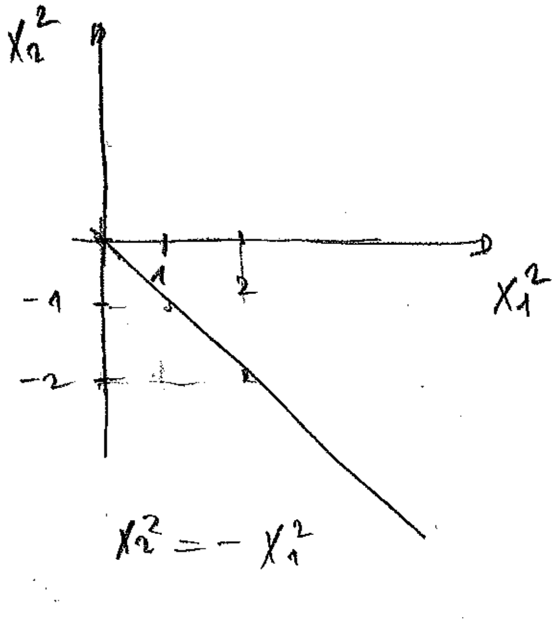
→ 2do modo asociado a $\omega_2 = +\sqrt{\frac{2k}{M}}$ $\quad \dfrac{X_1^2}{X_2^2} = -1$

1er modo vibración

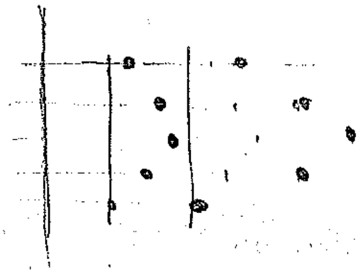


$X_2^1 = 2X_1^1$

2do modo vibración



$X_2^2 = -X_1^2$



DIFICIL

Sistemas de varios grados de libertad. Cálculo de modos, frecuencias y respuesta.

a figura se muestra un modelo discreto que permite estudiar el comportamiento mico de un vehículo cuando éste pasa de circular por un plano horizontal a circular por lano inclinado de pendiente α. El sistema de suspensión se modeliza mediante dos les idénticos de rigidez constante **K**. El resto del vehículo se representa mediante un o rígido de masa **m** y momento de inercia respecto de su centro de gravedad **G** igual a l vehículo se mueve con velocidad constante **v** y se supone que no se despega de la tera. Se suponen pequeñas deformaciones y que la pendiente es muy suave.

endo que se desprecian las dimensiones de las ruedas, y tomando como instante inicial resentado en la figura, determinar:

l sistema de ecuaciones que define el movimiento del vehículo.

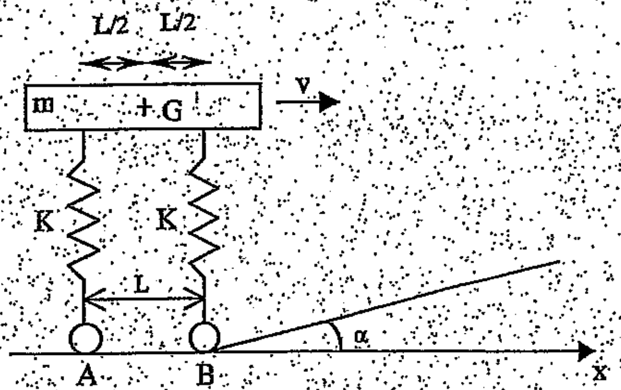
s frecuencias naturales del sistema.

a respuesta total del sistema cuando la rueda A sigue sobre el plano horizontal y la eda B está sobre el plano inclinado.

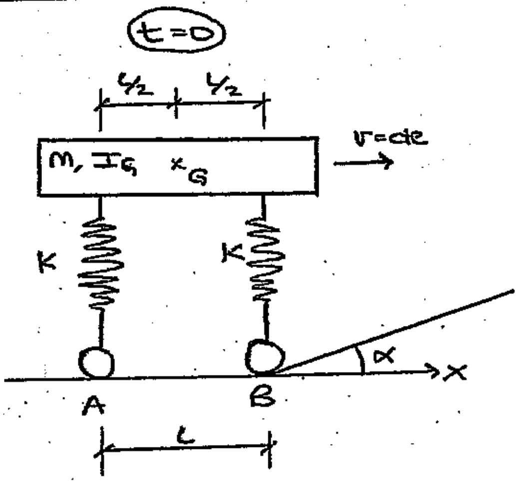
respuesta total del sistema cuando las dos ruedas están sobre el plano inclinado.

No considerar el efecto del peso propio en el estudio.

Se aconseja el uso de coordenadas absolutas para definir la configuración deformada del sistema.



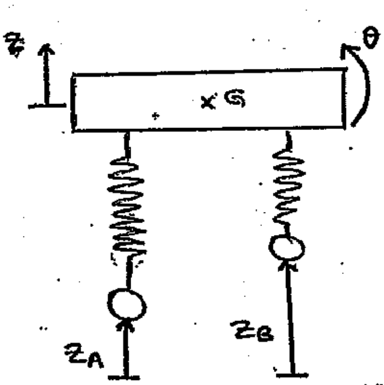
EJERCICIO 13 - LIBRO CLASE n grados de libertad -

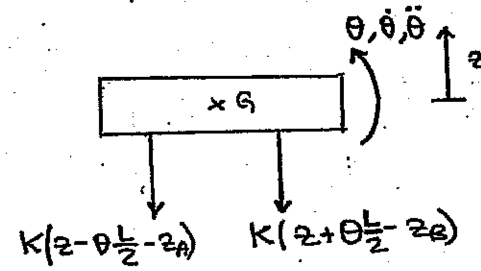


1) Ecuaciones del movimiento.

Como nos dicen que la velocidad es constante y la pendiente es muy pequeña, supondremos que la velocidad en "x" es cte., luego el movimiento en esa dirección será constante, y deberemos analizar el movimiento vibratorio en los otros dos grados de libertad. Plantearemos, por tanto, el estudio del posible movimiento vibratorio con dos grados de libertad (y y el giro).

Como siempre, realizaremos el análisis dinámico del sistema para un instante genérico. Deberemos analizar dos etapas: una en la que la rueda A permanezca en la misma cota y la cota de B sea variable, y otra en la que ambas cotas sean variables.





Como suponemos pequeñas deformaciones y pendiente muy suave:

$\cos\theta \simeq 1$

$\sin\theta \simeq tg\theta \simeq \theta$

¡OJO! Los parámetros asociados al sólido que analizamos son z y θ. z_A y z_B son independientes a éste, no son sus g.d.l.

Aplicando las ecuaciones de la dinámica:

$$\Sigma F_z = ma \Rightarrow -kz + \cancel{k\theta\frac{L}{2}} + kz_A - kz - \cancel{k\theta\frac{L}{2}} + kz_B = m\ddot{z}$$

Reordenando a la forma habitual:

$$\boxed{m\ddot{z} + 2kz = kz_A + kz_B} \quad (1)$$

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \Rightarrow \frac{L}{2}k(\cancel{z} - \theta\frac{L}{2} - z_A) - \frac{L}{2}k(\cancel{z} + \theta\frac{L}{2} - z_B) = I_G\ddot{\theta}$$

$$\boxed{I_G\ddot{\theta} + \frac{L^2}{2}k\theta = \frac{L}{2}k(z_B - z_A)} \quad (2)$$

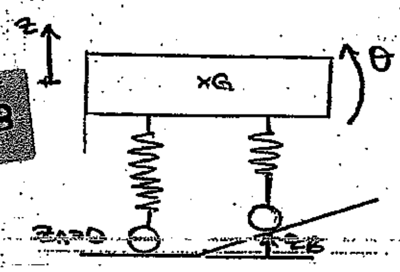
2) Frecuencias naturales del sistema

Como las ecuaciones están desacopladas, obtendremos de cada una de ellas una frecuencia natural del sistema como $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Entonces, basándonos en esas ecuaciones:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M}}} \quad y \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{KL^2}{2I_G}}}$$

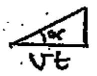
3) Respuesta del sistema cuando la rueda A sigue sobre el plano horizontal y la rueda B está sobre el plano inclinado.



13

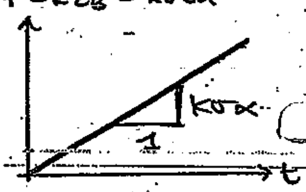
Particularizando las ecuaciones para esta situación en la que:

$$\begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = \alpha v t \end{cases}$$



$z_B \Rightarrow tg\alpha \approx \alpha = \frac{z_B}{vt} \Rightarrow z_B = \alpha v t$

$f = Kz_B = Kvt\alpha$



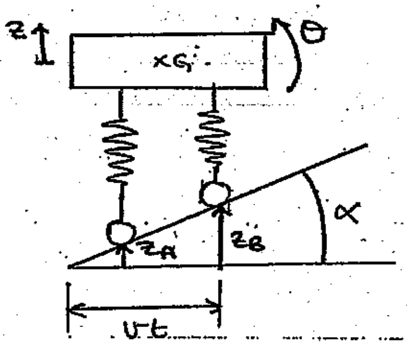
Por lo tanto, la solución a la ecuación (1) para esta situación será la correspondiente a una acción de tipo rampa:

$$\boxed{z(t) = \frac{Kv\alpha}{2K} t - \frac{Kv\alpha}{2K\omega_1}\left[\sin \omega_1 t\right] = \frac{v\alpha}{2} t - \frac{v\alpha}{2\sqrt{\frac{2K}{M}}}\left[\sin\sqrt{\frac{2K}{M}}\, t\right]}$$

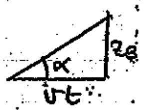
es la que corresponde a esta 1ª ecuación

De la misma forma obtendríamos la solución $\theta(t)$ a la 2ª ecuación.

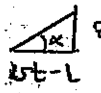
4) Respuesta total del sistema cuando las dos ruedas están sobre el plano inclinado.



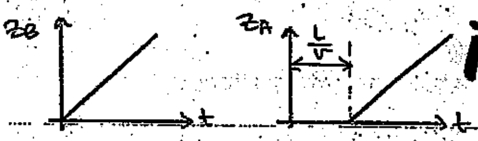
da igual hacerlo con α o con tgα, ambos son conocidos



$z_B = vt\, tg\alpha \rightarrow \underline{Kz_B = K tg\alpha\, vt}$



$z_A = tg\alpha(vt - L) \rightarrow \underline{Kz_A = K tg\alpha\, vt \underbrace{- K tg\alpha L}_{\text{componente}}}$



¡OJO!

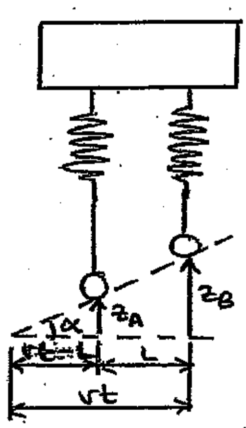
La solución de la ecuación (1), aplicando superposición será:

$$\boxed{z(t) = \frac{v\,tg\alpha}{2} t - \frac{v\,tg\alpha}{2\sqrt{\frac{2K}{M}}}\left[\sin\sqrt{\frac{2K}{M}}\, t\right] + \frac{v\,tg\alpha}{2}\left(t - \frac{L}{v}\right) - \frac{v\,tg\alpha}{2\sqrt{\frac{2K}{M}}}\left[\sin\sqrt{\frac{2K}{M}}\left(t - \frac{L}{v}\right)\right]}$$

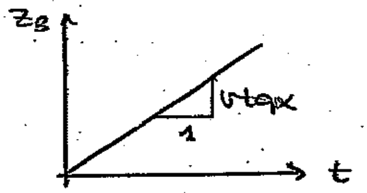
$\cancel{\frac{K tg\alpha L}{2K}}$ válido para $t > \frac{L}{v}$ (sino el término de respuesta a z_A no tiene sentido. la de z_B es cuando se para vt)

con el 1er método explicado a continuación la respuesta a z_A (haciéndolo directamente).

La solución a $\theta(t)$ se obtendría de la misma forma

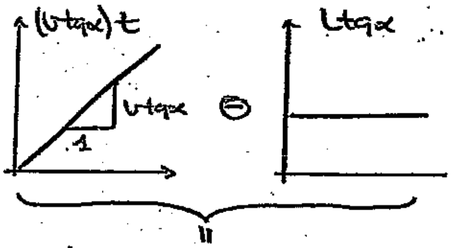


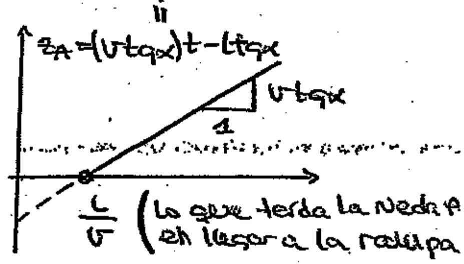
$$z_B = vt\,tg\alpha$$



$$z_A(t) = (vt - L)\,tg\alpha$$

$$z_A(t) = (v\,tg\alpha)t - tg\alpha \cdot L \Rightarrow$$





Habría dos opciones: por superposición o directamente.

En el caso de hacerlo directamente, obtenemos una función rampa cuyo inicio está en $t = \frac{L}{v}$. Así, la solución estará desfasada.

La segunda alternativa, que es hacerlo por superposición, viendo que la respuesta de z_A es la de z_B menos una correspondiente al escalón.

La respuesta a z_A siguiendo el 2° método sería la siguiente:

$$z_A(t) \rightarrow \underbrace{\frac{v\,tg\alpha}{2K}\,t - \frac{v\,tg\alpha}{2K\omega_1}\left[\sin\omega_1 t\right]}_{\text{la correspondiente a } v\,tg\alpha\, t} - \underbrace{\frac{L\,tg\alpha}{2K}\left[1 - \cos\omega_1 t\right]}_{\text{la correspondiente a } L\,tg\alpha}$$

también válida para $t > \frac{L}{v}$

Luego habría que multiplicar por K, etc.

Es decir, una forma el sistema matricial y:

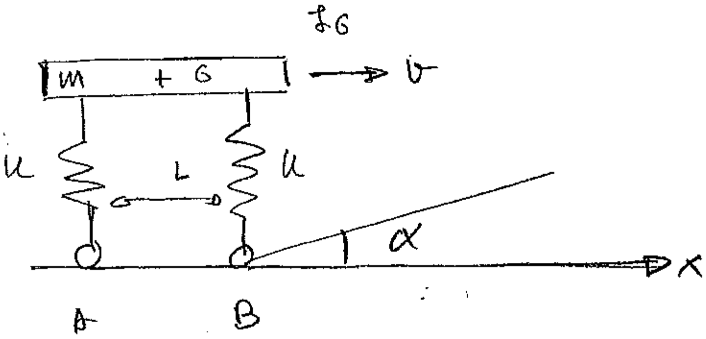
- En el primer caso A está en la horiz y B está en la rampa esto introduce una fuerza al sistema que comienza cuando B empieza a subir por la rampa $\rightarrow t = 0$

  Haciendo el análisis dinámico en un instante genérico para esa circunst (A horiz y B rampa) nos sale que para cada una de las ec desacopladas hay que resolver 1 rampa

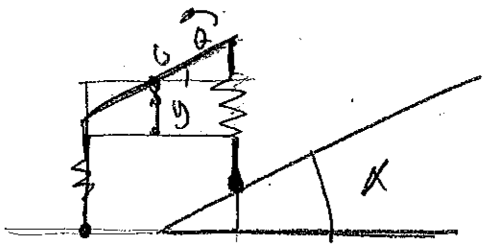
- En segundo lugar cuando las 2 ruedas están en la pendiente, aparece una segunda fuerza al sistema que además cambia las ecuaciones de

[illegible]

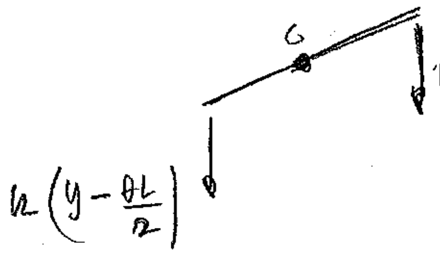
Ejercicio 13 clase



En un instante genérico: entre que B esta en la pared y A todavía esta en ~~la~~ el suelo horizontal:



suponemos que $y > \frac{vt}{\cos\alpha}$



$\tan\alpha = \frac{x}{vt} \to$

$\to x = vt\cdot\tan\alpha \overset{\tan\alpha\approx\alpha}{=} vt\,\alpha$

1 Ec del mov:

$$\Sigma F_y = m\ddot{y} \to -k\left(y-\frac{\theta L}{2}\right) - k\left(y+\frac{\theta L}{2} - \overset{vt\cdot\alpha}{\cancel{\frac{vt}{\cos\alpha}}}\right) = m\ddot{y}$$

$$(1) \quad m\ddot{y} + 2ky = \overbrace{\cancel{\frac{kv}{\cos\alpha}} + kv\cdot\alpha\cdot t}^{f(t)}$$

$$\Sigma M_G = I_G\cdot\ddot{\theta} \to k\left(y-\frac{\theta L}{2}\right)\cdot\frac{L}{2} - k\left(y+\frac{\theta L}{2} - \overset{vt\cdot\alpha}{\cancel{\frac{vt}{\cos\alpha}}}\right)\frac{L}{2} = I_G\ddot{\theta}\,\frac{2}{L}$$

$$(2) \quad \frac{2I_G}{L}\ddot{\theta} + kL\theta = \cancel{\frac{kv}{\cos\alpha}} + kv\,\alpha\cdot t$$

2 Frec naturales del sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{2I_G}{L} \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & kL \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \overset{v\cdot\alpha}{\cancel{\frac{kv}{\cos\alpha}}} \begin{Bmatrix} t \\ t \end{Bmatrix}$$

Para hallar las frec naturales hacemos $[K]=\{P\}=0$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2I_0/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & kL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2k-w^2m & 0 \\ 0 & kL-\frac{2I_0}{L}w^2 \end{vmatrix}=(2k-w^2m)(kL-\frac{2m}{L}w^2)=0$$

$$\rightarrow w_1=\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad i \quad w_2=\sqrt{\frac{kL^2}{2m}}=L\sqrt{\frac{k}{2I_0}}$$

Cogemos y metemos estas frec en su sist corresp:

$$\begin{bmatrix} 2k-w^2m & 0 \\ 0 & kL-\frac{2I_0}{L}w_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

!!! ere gilipollas!!! → el sistema ya era diagonal.

en todo

$$m\ddot{y}+2ky=0 \rightarrow w_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$2\frac{I_0}{L}\ddot{\theta}+kL\theta=0 \rightarrow w_2=\sqrt{\frac{kL^2}{2I_0}}=L\sqrt{\frac{k}{2I_0}}$$

$$m\ddot{y}+2ky=\frac{\overset{P k v\alpha}{\cancel{k\alpha}}}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot t \rightarrow \text{rampa pen diente } P \text{ en } t=0$$

$$\frac{2I_0}{L}\ddot{\theta}+kL\theta=\frac{\overset{kv\alpha}{\cancel{ku}}}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot t \rightarrow \text{rampa}$$

Sol rampa $\Rightarrow x(t)=\frac{P}{k}t-\frac{P}{kw}\operatorname{sen}(w_1t)$

$$y(t)=\frac{\frac{\overset{\cancel{k}\cdot v\cdot\alpha}{\cancel{ku}}}{\cancel{\cos\alpha}}}{2\cancel{k}}t-\frac{\frac{\overset{\cancel{k}\cdot v\alpha}{\cancel{ku}}}{\cancel{\cos\alpha}}}{2\cancel{k}w_1}\operatorname{sen}(w_1t)$$

$$\theta(t)=\frac{\overset{kv\cdot\alpha}{\cancel{ku/\cos\alpha}}}{kL}t-\frac{\overset{\cancel{k}\cdot v\cdot\alpha}{\cancel{ku/\cos\alpha}}}{\cancel{k}Lw_2}\cdot\operatorname{sen}(w_2t)$$

→

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

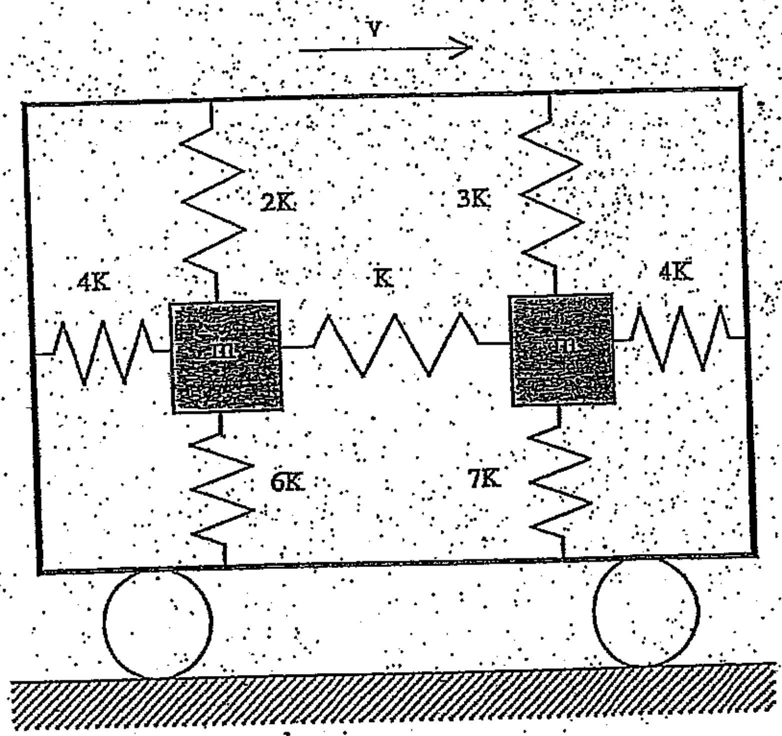
MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

OJO! → volver a mirar que este ejercicio tiene muchas cosas

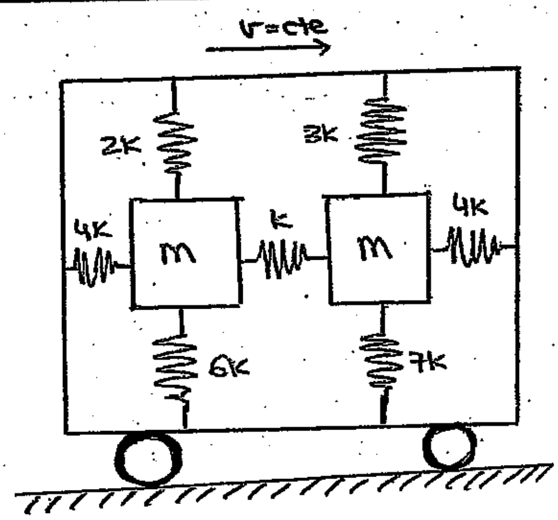
TEORÍA DE VIBRACIONES.
3º Ingeniería Industrial. Examen - Septiembre 1998.
Problema. Peso sobre el conjunto del examen: 40%
Tiempo: 1h15min.

El sistema de la figura representa un modelo que permite estudiar el comportamiento dinámico de una mercancía situada en un container que se desplaza con velocidad constante v. La mercancía viene representada mediante dos masas concentradas de valor m y cuyos apoyos se modelizan a través de los muelles como lo indica la figura. Se suponen pequeñas deformaciones y se desprecia el efecto del peso propio. Se piden:

1.- Las ecuaciones que definen el movimiento de las masas. (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
3.- Los modos naturales del sistema. (2p)
4.- Las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales. (1,5p)
5.- La respuesta del sistema si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a tener velocidad nula. (1,5p)

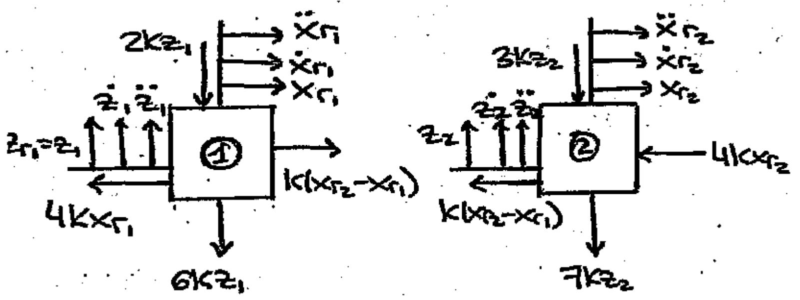


SEPT. 98 n grados de Libertad



1) Ecuaciones del movimiento de las masas.

Realizaremos el estudio dinámico en un instante genérico de las masas:



Para obtener las ecuaciones generales genéricas, emplearemos las coordenadas relativas (para no tener que considerar el movimiento del contenedor).

Las verticales serán absolutas, ya que el contenedor no se desplaza en esa dirección.

Aplicamos las ecuaciones de la dinámica (no hacer momentos ya que las masas son puntuales). (en este caso coinciden ya que v=cte)

① $\begin{cases} (1)\ k(x_{r_2}-x_{r_1}) - 4k x_{r_1} = m\cdot\ddot{x}_{r_1} \\ (2)\ -2kz_1 - 6kz_1 = m\cdot\ddot{z}_1 \end{cases}$ ← [siempre la aceleración absoluta !!! (aunque lo demás sean coordenadas relativas)]

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_{r_1} + \cancel{\ddot{x}_c}^{\,0}$ (v=cte)

② $\begin{cases} (3)\ -k(x_{r_2}-x_{r_1}) - 4k x_{r_2} = m\ddot{x}_{r_2} \\ (4)\ -3kz_2 - 7kz_2 = m\ddot{z}_2 \end{cases}$

Reordenando las ecuaciones por términos siguiendo el patrón:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ m\ddot{x}_{r_1} + 5kx_{r_1} - kx_{r_2} = 0 \\ (2)\ m\ddot{z}_1 + 8kz_1 = 0 \\ (3)\ m\ddot{x}_{r_2} - kx_{r_1} + 5kx_{r_2} = 0 \\ (4)\ m\ddot{z}_2 + 10kz_2 = 0 \end{array}}$$

2) Frecuencias naturales del sistema

Estamos ante un problema de n grados de libertad (cuatro concretamente) en la que las ecuaciones (1) y (3) están acopladas y las (2) y (4) desacopladas. Llegados a este punto, podemos resolver las dos desacopladas individualmente (como cuando 1 gdl) y las dos acopladas mediante el cambio de variable o resolver las cuatro mediante el método matricial y el de cambio de variable. Por comodidad, resolveremos según el primer método.

$$(2)\ m\ddot{z}_1 + 8kz_1 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{8k}{m}}}$$

$$(4)\ m\ddot{z}_2 + 10kz_2 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_4 = \sqrt{\frac{10k}{m}}}$$

Las dos ecuaciones restantes (las acopladas) las resolveremos con el método matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 5k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias naturales $\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5k-\omega^2 m & -k \\ -k & 5k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5k-\omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5k-\omega_1^2 m = k \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}}} \\ 5k - \omega_3^2 m = -k \Rightarrow \boxed{\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}} \end{cases}$$

<u>Las cuatro frecuencias naturales del sistema son, por tanto, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ y ω_4.</u>

3) Modos naturales del sistema.

En este caso, al haber dos ecuaciones acoplados y dos desacopladas podíamos dudar si el número de modos naturales es de dos o cuatro. Ambas respuestas son correctas. Para obtener los modos partiremos de las ecuaciones acopladas (y luego generalizaremos para obtener cuatro modos):

$$\begin{bmatrix} 5k-\omega^2 m & -k \\ -k & 5k-\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (5k-\omega^2 m)X_1 - kX_2 = 0$$

(sabemos que la otra no es linealmente indep)

Sustituyendo las frecuencias naturales:

- $\omega = \omega_1 \rightarrow \left(5k - \frac{4k}{\cancel{m}}\cancel{m}\right) X_1^1 = kX_2^1 \Rightarrow X_1^1 = X_2^1 \rightarrow \boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$

- $\omega = \omega_3 \rightarrow \left(5k - \frac{6k}{\cancel{m}}\cancel{m}\right) X_1^2 = kX_2^2 \Rightarrow -X_1^2 = X_2^2 \rightarrow \boxed{\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$

Podemos expresar los modos en la dirección horizontal con $\{X^1\}$ y $\{X^2\}$ y decir que en el vertical las ecuaciones están desacopladas o generalizarlo de la siguiente forma:

$$\boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{X^3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{X^4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

podríamos poner cualquier número (excepto 0, da

4) Ecuaciones del movimiento en coordenadas modales.

$$\begin{Bmatrix} x_{r_1} \\ x_{r_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

Por tanto sustituyendo y premultiplicando por la traspuesta de la matriz de los modos, la ecuación matricial nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8k & 0 \\ 0 & 12k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2m\ddot{y}_1 + 8ky_1 = 0 \\ 2m\ddot{y}_2 + 12ky_2 = 0 \end{cases}$$

(sacando de éstas la frecuencia natural debe coincidir con las dos

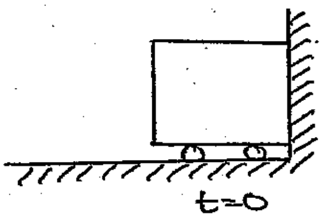
5) Respuesta del sistema si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a tener velocidad nula.

Por consecuencia del choque, las masas comenzarán a vibrar (ya que hasta entonces no lo hacían).

En primer lugar determinaremos las condiciones iniciales que se darán en los distintos parámetros a partir del instante inmediatamente después al choque (inicio del movimiento vibratorio).

x $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$x'(t) = V$



$x_{r_{10}} = 0$ $\quad \dot{x}_{r_{10}} = V$

$x_{r_{20}} = 0$ $\quad \dot{x}_{r_{20}} = V$

$z_{10} = 0$ $\quad \dot{z}_{10} = 0$

$z_{20} = 0$ $\quad \dot{z}_{20} = 0$

(las masas se movían con el container y al chocar el container se para pero las masas, por inercia, tendrán una velocidad inicial V relativa respecto al container, que en este caso es absoluta.)

[en esta dirección no hay condiciones iniciales ni fuerzas que provoquen un mov. vibratorio. Por tanto, no hay movimiento vibratorio verticalmente]

Por lo tanto, la respuesta se limita a la respuesta en la dirección horizontal:

$$\begin{cases} 2m\ddot{y}_1 + 8ky_1 = 0 \\ 2m\ddot{y}_2 + 12ky_2 = 0 \end{cases}$$

Para obtener las condiciones iniciales en coordenadas modales, solo se cumplirá la ecuación del cambio de variable: $\{x_{10}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \{y_{10}\} \Rightarrow \{ y_{10} = 0$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_{10} \\ \dot{y}_{20} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_{10} = v \\ \dot{y}_{20} = 0 \end{cases}$$

Para obtener las soluciones:

$$2m\ddot{y}_1 + 8ky_1 = 0 \rightarrow y_1(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t$$

$$y_{10} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{y}_{10} = v \Rightarrow \dot{y}_1(t) = \omega_1 B\cos\omega_1 t \Rightarrow B = \frac{v}{\omega_1}$$

$$\underline{\underline{y_1(t) = \frac{v}{\omega_1}\sin\omega_1 t}}$$

$$2m\ddot{y}_2 + 12ky_2 = 0 \rightarrow y_2(t) = C\cos\omega_2 t + D\sin\omega_2 t$$

$$\underline{\underline{y_2(t) = 0}}$$

Por último, debemos obtener la solución en las coordenadas x:

$$\begin{Bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{v}{\omega_1}\sin\omega_1 t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto,

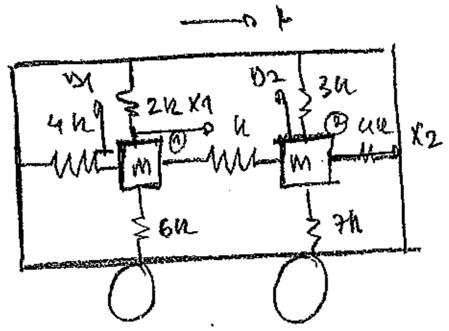
$$x_{r1}(t) = y_1(t) + \cancel{y_2(t)}^{0}$$

$$x_{r2}(t) = y_1(t) - \cancel{y_2(t)}^{0}$$

$$z_1(t) = 0$$

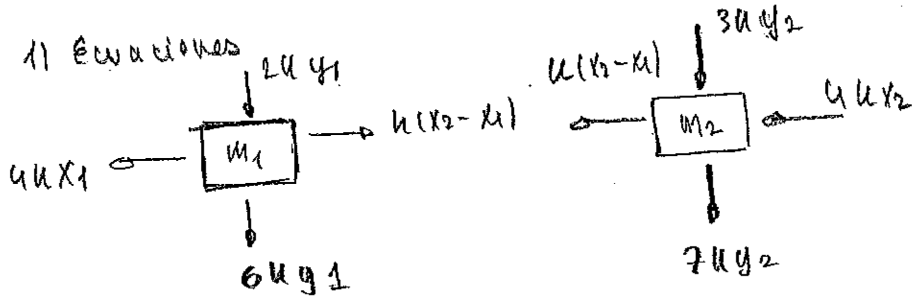
$$z_2(t) = 0$$

SEPTIEMBRE 1998



Suponemos $x_2 > x_1$ y $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$

1) Ecuaciones



$\Sigma F_x^{①}=0;\quad k(x_2-x_1)-4kx_1=m\ddot{x}_1 \rightarrow -5kx_1+kx_2=m\ddot{x}_1$

$\Sigma F_x^{②}=0;\quad -k(x_2-x_1)-4kx_2=m\ddot{x}_2 \rightarrow kx_1-5kx_2=m\ddot{x}_2$

$\Sigma F_y^{①}=0;\quad -2ky_1-6ky_1=m\ddot{y}_1 \rightarrow -8ky_1=m\ddot{y}_1$

$\Sigma F_y^{②}=0;\quad -3ky_2-7ky_2=m\ddot{y}_2 \rightarrow -10ky_2=m\ddot{y}_2$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 &= 0\\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 5kx_2 &= 0\\ m\ddot{y}_1 + 8ky_1 &= 0\\ m\ddot{y}_2 + 10ky_2 &= 0\end{aligned} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m\end{bmatrix}}_{[M]}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0\\ -k & 5k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8k & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10k\end{bmatrix}}_{[K]}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

las 2 simétricas

2) Frec naturales del sistema ← ojooo las matrices no son diagonales

$$\begin{vmatrix} 5k-w^2m & -k & 0 & 0\\ -k & 5k-w^2m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8k-w^2m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10k-w^2m\end{vmatrix} = (10k-w^2m)\left[\begin{matrix}(5k-w^2m)^2\cdot(8k-w^2m)-\\ -k^2(8k-w^2m)\end{matrix}\right]=$$

$$\boxed{w_4=+\sqrt{\frac{10k}{m}}};$$

seguimos con el det →

(1)

$\longrightarrow$

- $(8k - w^2 m)\,[(5k - w^2 m)^2 - k^2] = 0$

$$\boxed{w_3 = +\sqrt{\frac{8k}{m}}}$$

- $[(5k - w^2 m) + k]\,[(5k - w^2 m) - k] = 0$

$$\boxed{w_{\cancel{1}} = +\sqrt{\frac{6k}{m}}} \qquad \boxed{w_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}}}$$

3) Para ello cogemos el sistema al que le habíamos aplicado la solución: $X(t) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \cos(wt)$ y sustituimos las dif w_j:

$$\begin{bmatrix} 5k - w^2 m & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k - w^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k - w^2 m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k - w^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- $w_1 = \sqrt{\frac{10k}{m}}$ $\leftarrow$ ojoooooooo no nos va a salir con esta frecuencia $\to$ ya que parte de las ecuaciones son acopladas y parte desacopladas

$-5\cancel{k}X_1 - \cancel{k}X_2 = 0 \to X_2^1 = -5X_1^1$

$-k X_1 - 5kX_2 = 0 \to X_1^1 = -5X_2^1 \to$

$\to X_2^1 = X_1^1 = 0$

- $w_{\cancel{1}} = \sqrt{\frac{6k}{m}}$

~~$5k - 6k =$~~ $\quad -\cancel{k}X_1 - \cancel{k}X_2 = 0 \to \boxed{X_2^1 = -X_1^1}$

lo mismo pues son linealmente dependiente $\leftarrow$ $-kX_1 - k X_2 = 0 \to X_2 = -X_1$

- $w_{\cancel{1}2} = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ $\leftarrow$ $X_1 - X_2 = 0 \to \boxed{X_1^2 = X_2^2}$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

Es decir, vemos que 2 de las ec están desacopladas lo que quiere decir que el mov. en los g.d.l. correspondientes a esas ecuaciones es independiente. Por tanto no hay modos de vibración, es decir, ~~...~~ en esos g.d.l. las masas se moverán de forma independiente vibrando con una frecuencia w_1 ~~...~~ y w_2 respectivamente. Queda claro que al vibrar con frec distintas los periodos son distintos y no se alcanzarán los valores máximo y mínimo a la vez.

Por tanto solo se pueden dar modos síncronos de vibración de vibración para las frecuencias w_3 y w_4 en los gdls de libertad x_1 y x_2

Aunque se puede decir que hay 4 modos de vibración:

$$X^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad X^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad X^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad X^4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

4) Ecuaciones del movimiento en coordenadas modales:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [X]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} m & -m & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

aqui esta el error hemos equivocado del eimo y cuando eimo, hemos elegido una [X] dif

$$= \cancel{\begin{bmatrix} 8k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} 12k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_4 \leftarrow & 2m\ddot{e}_1 + 12k e_1 = 0 \\ \omega_3 \leftarrow & 2m\ddot{e}_2 + 8k e_2 = 0 \\ \omega_2 \leftarrow & m\ddot{y}_1 + 8k y_1 = 0 \\ \omega_1 \leftarrow & m\ddot{y}_2 + 10k y_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{donde} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [X]\cdot\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

5) Respuesta del sistema si el container choca contra un muro:

Los g.d.l escogidos representan el movimiento de la carga dentro del container, es decir, su movimiento relativo a este. Por eso si, al chocarse, este frena bruscamente las masas adquieren una velocidad relativa a él igual a la que llevaban.

$$\text{c.i.} \quad \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ y_1(0) \\ y_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \dot{x}_1(0) = v \\ \dot{x}_2(0) = v \\ \dot{y}_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 0 \end{array}$$

Empleando el cambio de variable

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_1(0) \\ \dot{e}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \cancel{} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v/2 \\ v/2 \end{Bmatrix}$$

corregir

$$e_1(t) = A\cos(\omega_4 t) + B\,\text{sen}(\omega_4 t) \quad \begin{array}{l} \rightarrow e_1(0) = 0 \rightarrow A = 0 \\ \rightarrow \dot{e}_1(0) = B\omega_4 = 2v \rightarrow B = \dfrac{2v}{\omega_4} \end{array}$$

$$e_1(t) = \frac{2v}{\omega_4}\,\text{sen}(\omega_4 t) = \frac{2v}{\sqrt{\frac{6k}{m}}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t\right)$$

$$e_2(t) = A\cdot\cos(\omega_3 t) + B\,\text{sen}(\omega_3 t) \quad \begin{array}{l} \rightarrow e_2(0) = 0 \rightarrow A = 0 \\ \rightarrow \dot{e}_2(0) = 0 \rightarrow B = 0 \end{array} \rightarrow$$

$$e_2(t) = 0$$

$\longrightarrow$

$y_1(t) = 0$

$y_2(t) = 0$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2u}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = \frac{2u}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = \frac{-2u}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t)$$

$$[X]^T [M] [X] = [m_1]$$

$$[X^T][M] \cancel{B} = [m_1] \cdot [X^{-1}] \rightarrow$$

$$\rightarrow [m_1]^{-1} [X^T][M] = [X^{-1}] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/2m & 0 \\ 0 & 1/2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2m & 0 \\ 0 & 1/2m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2m & 0 \\ 0 & 1/2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [X^{-1}]$$

$mx + kx + cx = F(t)$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Marzo 2006.
Unidad Temática B.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2006.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.

Peso sobre la Unidad Temática: 20%.
Ejercicio. 2 Tiempo: 45 min.

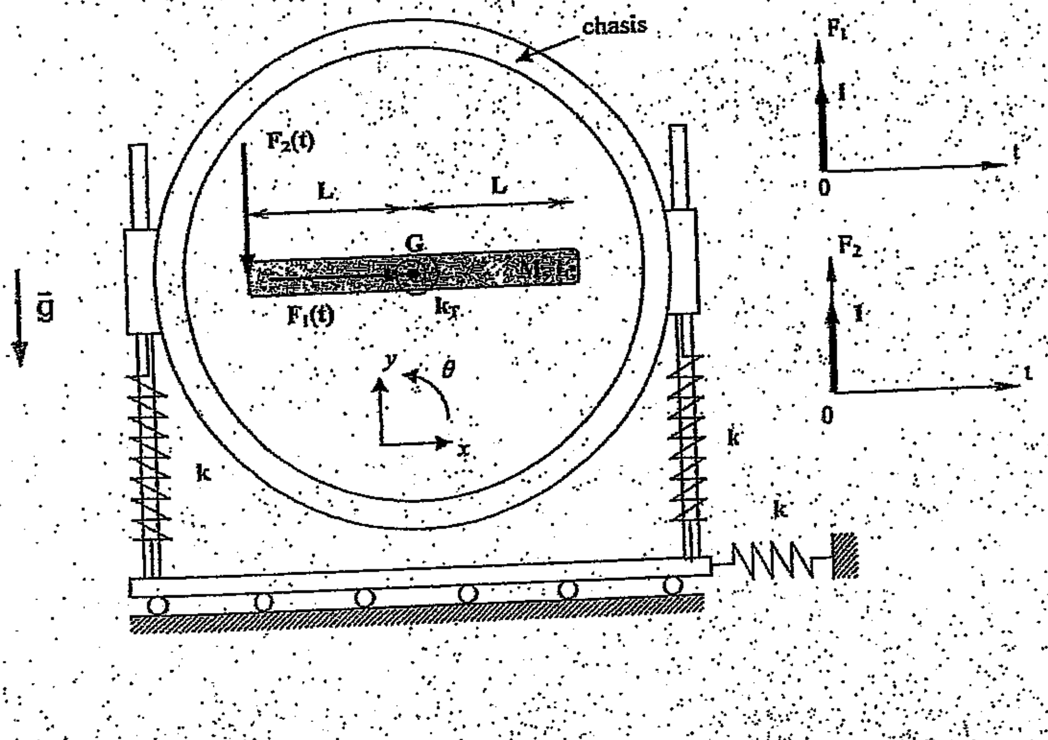
Atal Tematikoaren Pisua: 20%.
Ariketa. 2 Iraupena: 45 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

TALDEA:
IZEN ABIZENAK: PEEERFECTOOO !!!

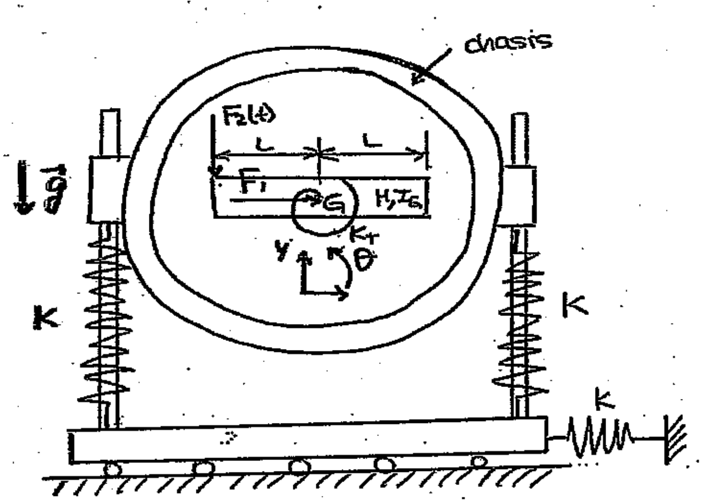
En la figura siguiente se representa un modelo simplificado de un dispositivo de análisis experimental de vibraciones. Dicho dispositivo está formado por un chasis de masa despreciable con dos grados de libertad (x,y) unido al suelo mediante resortes de constante k tal como aparece en la figura. Sobre el chásis, y articulada alrededor de G se monta una viga indeformable de masa M e inercia I_G. Dicha viga, cuya orientación viene determinada por su ángulo θ está articulada en G, y montada al chasis a través de un resorte a torsión de constante k_T. Utilizando como grados de libertad (x,y,θ), se pide:

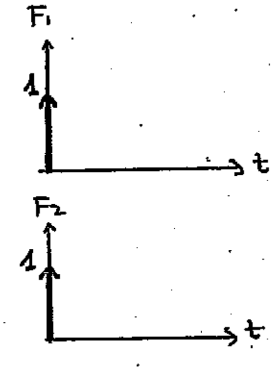
1. La ecuación del movimiento en notación matricial. (3p)
2. Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
3. Partiendo del reposo en su posición de equilibrio estático, obtener la respuesta del sistema frente a las cargas $F_1(t)$ y $F_2(t)$, que representan unos impulsos unitarios. El primero se aplica en G en dirección horizontal y el segundo en un extremo de la viga en dirección vertical. (5p)



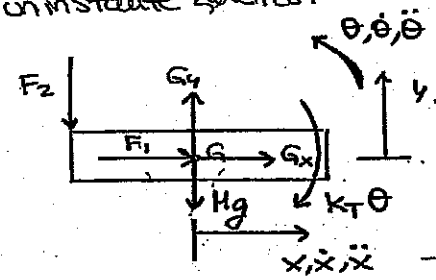
[illegible]

MARZO 2006





Tenemos tres elementos, pero deseamos centrar la atención en el análisis del movimiento vibratorio de la viga. Ante la duda de cómo enfocar el análisis, comenzaremos aislando el elemento que tiene 3 g.d.l (la viga de masa M) y realizaremos su análisis dinámico en un instante genérico:

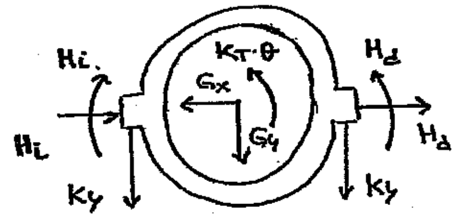


En primer lugar estudiamos las acciones exteriores: F_1, F_2, el peso (ya que nos representan $\vec{g}$) y después las acciones que le transmiten a esa masa los elementos que están en contacto con ella.

Entre el chasis y la masa debe haber una reacción que permita el giro de ésta, pero no su desplazamiento relativo respecto del chasis → G_x y G_y

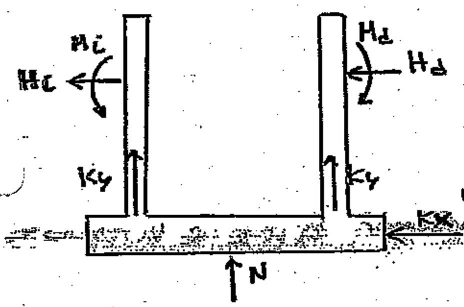
El momento ejercido por el muelle torsor sobre la masa es contrario a su movimiento.

Para poder obtener G_x y G_y, que son las únicas acciones totalmente desconocidas, aislaremos el chasis:



El par prismático entre el chasis (de masa despreciable) y las barras sólo permite el desplazamiento en una dirección → habrá una acción que impida el movimiento en la otra dirección y un momento que impida el giro

Por último vamos al soporte:



tal y como hemos considerado la dirección de "x", el muelle este estará comprimido en un instante genérico.

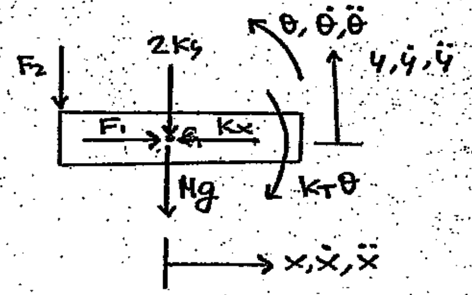
Aplicando las ecuaciones de la dinámica:

- Soporte : $H_i + H_d = -Kx$

- chasis : $H_i + H_d = G_x = -Kx$

$$\underline{\underline{-2Ky = G_y}}$$

Por tanto, la viga de masa M nos quedaría:



$\sum F_x = Ma_x \rightarrow F_1 - Kx = M\ddot{x}$ (1)

$\sum F_y = Ma_y \rightarrow -F_2 - 2Ky - Mg = M\ddot{y}$ (2)

$\sum M_G = I_G\alpha \rightarrow -K_T\theta + F_2 L = I_G\ddot{\theta}$ (3)

Reordenando los términos de las ecuaciones como hacemos habitualmente:

$M\ddot{x} + Kx = F_1$ (1)

$M\ddot{y} + 2Ky = -F_2 - Mg$ (2)

$I_G\ddot{\theta} + K_T\theta = LF_2$ (3)

Observamos que las ecuaciones están desacopladas ya que en cada una de ellas aparecen sólo los términos correspondientes a un grado de libertad.

1) Ecuación del movimiento en notación matricial.

Ponemos las tres ecuaciones de movimiento obtenidas en forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F_2 - Mg \\ LF_2 \end{Bmatrix}}$$

(como las ecuaciones están desacopladas las matrices están diagonalizadas)

2) Frecuencias naturales del sistema.

Como las ecuaciones están desacopladas, ~~para~~ obtendremos las frecuencias naturales trabajando individualmente con cada una de las ecuaciones del movimiento:

(1) $M\ddot{x} + Kx = F_1 \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}}$

(2) $M\ddot{y} + 2Ky = -F_2 - Mg \longrightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{2K}{M}}}$

(3) $I_G\ddot{\theta} + K_T\theta = LF_2 \longrightarrow \boxed{\omega_3 = \sqrt{\frac{K_T}{I_G}}}$

3) Partiendo del reposo (en $t=0$ $\left|\begin{matrix} x=0, y=0, \theta=0 \\ \dot x=0, \dot y=0, \dot\theta=0 \end{matrix}\right\}$) obtener la respuesta del sistema frente a $F_1(t)$ y $F_2(t)$.

Como partimos del reposo, no habrá condiciones iniciales que originen la parte de la respuesta ... no transitoria.

Como las ecuaciones están desacoplados, obtendremos una solución de cada ecuación (solo habrá parte estacionaria ya que como hemos dicho la transitoria no existe por no existir condiciones iniciales):

Basándonos en las soluciones-modelo de la teoría:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{M\omega_1} \sin \omega_1 t}$$

[como no hay amortiguamiento $\xi = 0$
y $\omega_D = \omega = \omega_1$ en este caso]

Para determinar $y(t)$ aplicaremos superposición

$$\boxed{y(t) = \frac{-1}{M\omega_2} \sin \omega_2 t - \frac{Mg}{2K}}$$

el peso es una fuerza estática luego su respuesta es $\frac{P}{K}$, siendo K el término que va con y en su ecuación del movimiento

Por último, la respuesta $\theta(t)$:

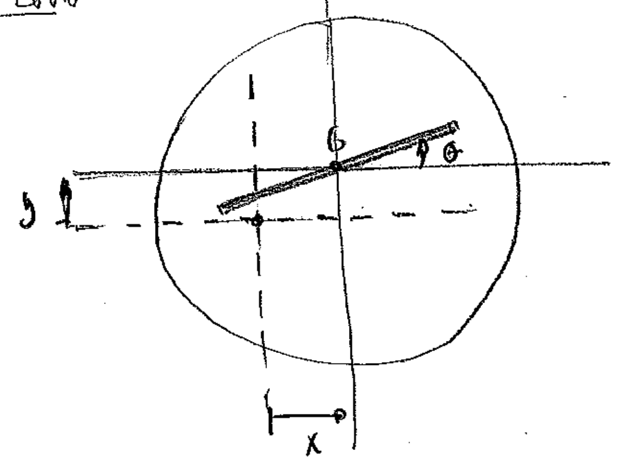
$$\boxed{\theta(t) = L \cdot \frac{1}{I_G\omega_3} \sin \omega_3 t}$$

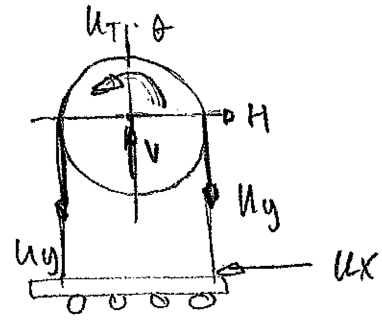
$$P = Kx$$

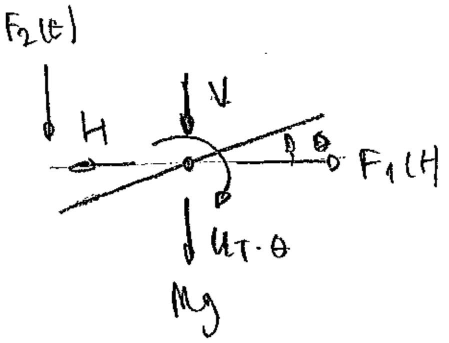
$$e^{-\xi\omega t}\left(\cancel{x_0 \cos\omega_D t} + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sin\omega_D t\right)$$

$$x(t) = \frac{e^{-\xi\omega t} I}{M\omega_D} \sin\omega_D t$$

MARZO 2006







1.

Ec del chasis:

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow H - Kx = 0 \rightarrow H = Kx$;

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V - 2Ky = 0 \rightarrow V = 2Ky$

Ec en la barra:

$\Sigma F_x \Rightarrow F_1(t) - H = m\ddot{x}$

$\Sigma F_y \Rightarrow -F_2(t) - V - Mg = m\ddot{y}$

$\Sigma M_G \rightarrow -K_T \cdot \theta + F_2(t) \cdot L = m\ddot{\theta}$

Por tanto sustituyendo.

$F_1(t) - Kx = m\ddot{x}$

$-F_2(t) - 2Ky - Mg = m\ddot{y}$

$-K_T \cdot \theta + F_2(t) \cdot L = I_G\ddot{\theta}$

Reordenando para poder expresarlas según el método matricial:

$m\ddot{x} + Kx = F_1(t)$

$m\ddot{y} + 2Ky = -F_2(t) - Mg$

$J_G\ddot{\theta} + K_T \cdot \theta = F_2(t) \cdot L$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 2K & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F_2 - Mg \\ F_2 \cdot L \end{Bmatrix}$$

$[K] \rightarrow$ ojo $[M]$ y $[K]$ ya son diagonales $\rightarrow$

$\rightarrow$

2. Las frecuencias naturales por tanto son:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad ; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_T}{I_G}}$$

3. La respuesta del sistema a impulso unitario $\rightarrow$:

$\rightarrow$ se aplica superposición

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t) = \frac{1}{m\sqrt{k/m}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$$y(t) = \frac{-1}{m\omega_2} \operatorname{sen}(\omega_2 t) - \frac{Mg}{2k} = -\left[\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2k/m}\; t)}{m\sqrt{2k/m}} - \frac{Mg}{2k}\right]$$

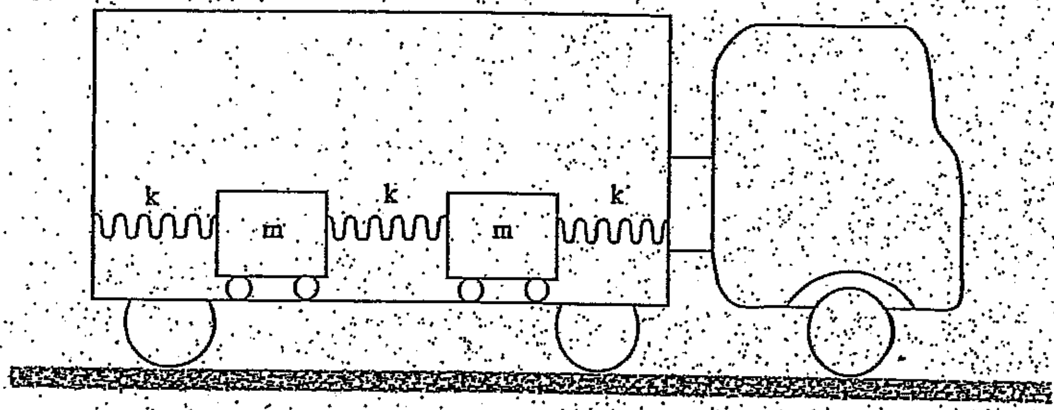
$$\theta(t) = \frac{L}{I_G\,\omega_3} \operatorname{sen}(\omega_3 t) = \frac{L}{I_G\sqrt{\frac{k_T}{I_G}}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k_T}{I_G}}\; t\right)$$

TEORÍA DE VIBRACIONES.
3º Ingeniería Industrial. Examen Final, Junio 1999.
Ejercicio 3. Peso sobre el conj. del examen: 35%.
Tiempo: 40 min.

PERRFECT

NOMBRE y APELLIDOS:
GRUPO:

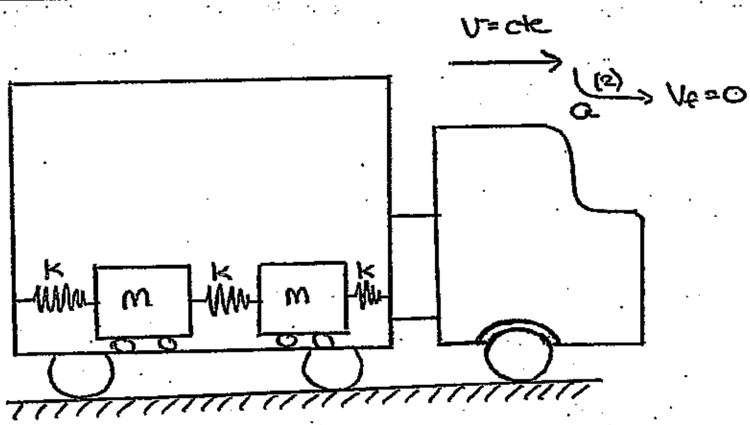
Un camión transporta material electrónico delicado que va dispuesto en el interior de la cabina de carga de acuerdo con la modelización de la siguiente figura:



Transitando el camión en régimen de velocidad constante, el conductor, cansado del largo viaje, sufre un microsueño de manera que al despertar reacciona con un frenazo. Considérese que el proceso de frenado se produce durante un tiempo τ con una deceleración constante a hasta parar el vehículo. Se pide:

1. ¿A qué fuerzas están sometidas las masas durante el proceso de frenado? (1 punto)
2. Calcular la respuesta durante la frenada. (7 puntos)
3. Calcular la respuesta después de la frenada. (2 puntos)

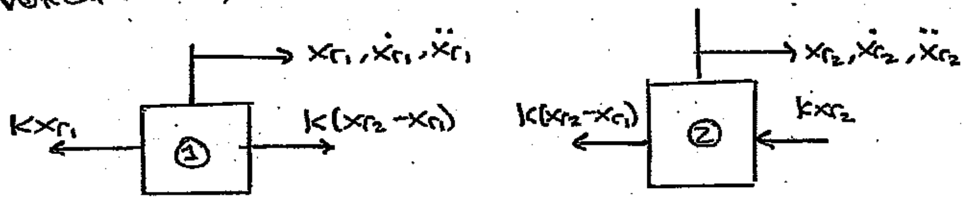
Junio 1999



Las masas, como el camión se mueve a velocidad constante, no tendrán movimiento vibratorio hasta que el camión comience a frenar.

1) Fuerzas a las que están sometidas las masas durante el proceso de frenado.

Tomando el movimiento relativo de las masas respecto del camión, realizamos el estudio dinámico de éstas para un instante genérico (solo horizontal ya que en la vertical no hay movimiento alguno):



(hemos considerado que el muelle intermedio está traccionado.)

Ecuaciones de la dinámica:

- Masa 1:

aceleración del camión. Como es una deceleración → aceleración negativa

$$-kx_{r_1} + k(x_{r_2}-x_{r_1}) = m\underbrace{(\ddot{x}_{r_1} - a)}$$

¡OJO! siempre aceleración absoluta !!!

- Masa 2:

$$-k(x_{r_2}-x_{r_1}) - kx_{r_2} = m(\ddot{x}_{r_2} - a)$$

Reordenando las ecuaciones como lo hacemos habitualmente:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_{r_1} + 2kx_{r_1} - kx_{r_2} &= ma \quad (1) \\ m\ddot{x}_{r_2} - kx_{r_1} + 2kx_{r_2} &= ma \quad (2) \end{aligned}}$$

Las masas están sometidas a una fuerza <u>m·a</u>, que es la fuerza de inercia por la deceleración del camión. Las <u>fuerzas a las que están sometidas</u> son las que, reordenando las ecuaciones como lo hacemos siempre, quedan en la <u>parte derecha de la igualdad</u>.

2) Respuesta durante la frenada

Analizando las ecuaciones vemos que están acopladas, por lo que recurrimos a la mecánica de estetipo de casos para llegar al cambio de variable. Comenzamos expresando las ecuaciones matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{r_1} \\ \ddot{x}_{r_2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{r_1} \\ x_{r_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}$$

Determinamos las frecuencias naturales: $|[K]-\omega^2[M]|=0$

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k-\omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2k-\omega_1^2 m = k \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ 2k-\omega_2^2 m = -k \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{cases}$$

A continuación obtendremos los modos $[[K]-\omega^2[M]]\{X\}=\{0\}$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow (2k-\omega^2 m)X_1 - kX_2 = 0$$

(ya sabemos que la otra no es linealmente independiente)

- $\omega=\omega_1 \Rightarrow (2k-\frac{k}{m}m)X_1^1 = kX_2^1 \Rightarrow X_1^1 = X_2^1 \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
- $\omega=\omega_2 \Rightarrow (2k-\frac{3k}{m}m)X_1^2 = kX_2^2 \rightarrow X_1^2 = -X_2^2 \rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

La matriz de modo, nos queda, por tanto: $\{X\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Realizamos el cambio de variable a las coordenadas modales Y: $\begin{Bmatrix} x_{r_1} \\ x_{r_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

y llevamos ésta relación a la ecuación matricial del movimiento, premultiplicando todos los términos con la traspuesta de la matriz de modos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2ma \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

(como era de prever nos salen desacoplados, siendo las ecuaciones desacopladas resolubles directamente)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m\ddot{y}_1 + 2ky_1 = 2ma \\ 2m\ddot{y}_2 + 6ky_2 = 0 \end{cases}$$

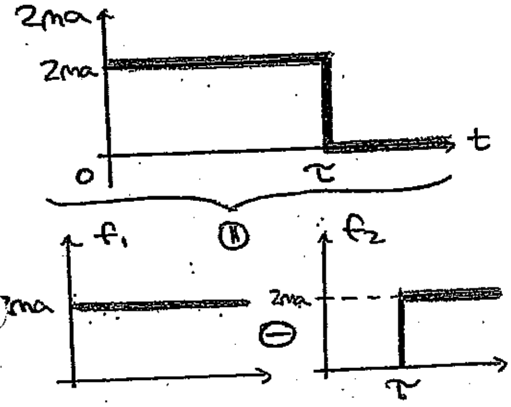
(para comprobar, si obtuviéramos de estos dos ecuaciones las frecuencias naturales haciendo $\sqrt{\frac{k}{m}}$, deben coincidir con ω_1 y ω_2).

En el instante en el que el camión comienza a frenar, su velocidad es v, igual que la de las masas, luego $\dot{x}_{r_1}=\dot{x}_{r_2}=0$ y $x_{r_1}=x_{r_2}=0$, ya que en ese instante las posiciones y velocidades relativas de las masas respecto del camión son nulas → no hay condición inicial

Por tanto, no habrá parte transitoria correspondiente a la respuesta del sistema (y es que al ser $x_{r1}=x_{r2}=\dot{x}_{r1}=\dot{x}_{r2}=0$, en las coordenadas modales también se cumplirá $y_1=y_2=\dot{y}_1=\dot{y}_2=0$). Las respuestas serán por tanto:

$$\underline{\underline{y_2(t)=0}}$$

En cuanto a la otra ecuación, representando la acción gráficamente:



La acción 2ma es constante durante el tiempo que dura la deceleración (τ) ya que en ese tiempo la masa m y la aceleración a son constantes.

Esta acción dura entre 0 y τ (tiene aspecto de escalón pero no es un escalón). → ¿¿CÓMOOOO?

se refiere a la acción global que es la suma de 2 escalones

Como estamos obteniendo la respuesta durante la frenada, es decir, $\underline{0<t<\tau}$, la respuesta $y_1(t)$ será:

$$\underline{\underline{y_1(t)}}=\frac{\cancel{2}ma}{\cancel{2}k}\left[1-\cos\omega_1 t\right]=\underline{\underline{\frac{ma}{k}\left[1-\cos\omega_1 t\right]}}$$

Como nos piden la respuesta en coordenadas reales, volveremos a obtener la relación entre coordenadas reales y modales:

$$\begin{Bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{r1}=y_1+\cancel{y_2}^{\,0} \\ x_{r2}=y_1-\cancel{y_2}^{\,0} \end{cases}$$

sale igual que el mismo !!

En nuestro caso:

$$\boxed{x_{r1}(t)=x_{r2}(t)=y_1(t)=\frac{ma}{k}\left[1-\cos\omega_1 t\right]} \quad \underline{0<t<\tau}$$

3) Respuesta debida a la frenada.

volviendo al apartado anterior, como en este caso $\underline{t\geq\tau}$, debemos considerar para obtener la respuesta $y_1(t)$, la respuesta debida a f_1 y la debida a f_2:

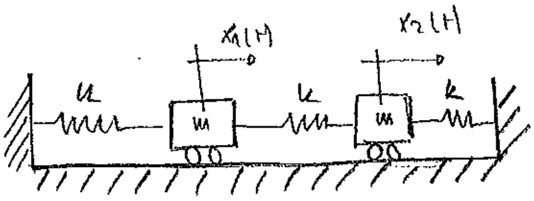
$$y_1(t)=\frac{ma}{k}\left[1-\cos\omega_1 t\right]-\frac{ma}{k}\left[1-\cos\omega_1(t-\tau)\right]$$

Como se sigue cumpliendo la misma relación entre coordenadas reales y modales:

$$\boxed{x_{r1}(t)=x_{r2}(t)=y_1(t)=\frac{ma}{k}\left[\cancel{1}-\cos\omega_1 t\right]-\frac{ma}{k}\left[\cos\omega_1(t-\tau)\right]} \quad \underline{t\geq\tau}$$

EXAMEN FINAL JUNIO 1999

¡¡ ojo hay que darse cuenta que en todo este planteamiento X_1 y X_2 son VEL. RELATIVAS !!



1) Suponiendo que $x_2 > x_1$ las fuerzas a las que se someten las masas durante el frenado son.

$$k x_1 \;\circ\!\!\longrightarrow \boxed{m} \xrightarrow{m\cdot a} k(x_2-x_1) \qquad k(x_2-x_1) \xrightarrow{m\cdot a} \boxed{m} \longleftarrow k x_2$$

2) Planteamos primero las ec diferenciales:

$$-kx_1 + k(x_2-x_1) + m\cdot a = m\ddot{x}_1 \longrightarrow m\ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = m\cdot a$$

$$-k(x_2-x_1) - kx_2 + m\cdot a = m\ddot{x}_2 \longrightarrow m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = m\cdot a$$

El sistema matricial es:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\cdot a \\ m\cdot a \end{Bmatrix}$$

Vemos que obtenemos un sistema de ec acopladas así que habrá que realizar un cambio a coord. modales. Para ello calculamos los modos de vibración y sus corresp. frec.:

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = (2k-\omega^2 m)^2 - k^2 = [(2k-\omega^2 m)+k][(2k-\omega^2 m)-k] = 0$$

$$2k - \omega^2 m + k = 0 \rightarrow \omega_1 = +\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$2k - \omega^2 m - k = 0 \rightarrow \omega_2 = +\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ahora hallamos los modos:

- $-k x_1 - k x_2 = 0 \longrightarrow \dfrac{X_1^1}{X_2^1} = -1 \rightarrow X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \rightarrow [X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $-k x_1 + k x_2 = 0 \rightarrow \dfrac{X_1^2}{X_2^2} = 1 \longrightarrow X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

haciendo el c.v $\rightarrow \{y\} = [X]\cdot\{x\} \rightarrow \{\ddot{y}\} = [X]\cdot\{\ddot{x}\}$

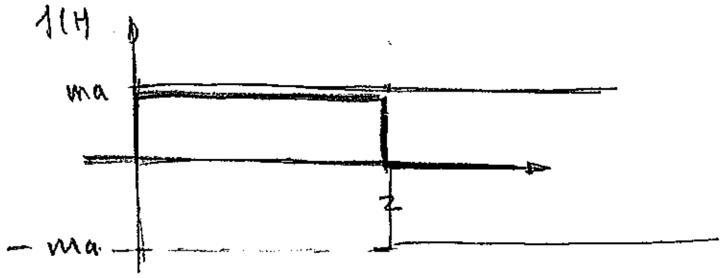
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} m & -m \\ m & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3k & -3k \\ k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2ma \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2ma \end{bmatrix}$$

Al aplicar un frenazo durante un tiempo t estamos aplicando un escalón:



Nos piden la respuesta durante la frenada, es decir, para $t \leq Z$

las condiciones iniciales eran $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$; $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

las pasamos a coord modales:

$$\{x\} = [X]\{y\} \rightarrow \{y\} = [X]^{-1}\{x\}$$

Para calcular la inversa tenemos en cuenta que:

$$[X]^T[M]\cdot[X] = [m_i] \rightarrow [X]^T\cdot[M] = [m_i]\cdot[X]^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow [m_i]^{-1}[X]^T\cdot[M] = [X]^{-1}$$

$$[X]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2m & 0 \\ 0 & 1/2m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2m & -1/2m \\ 1/2m & 1/2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

¡¡¡Hay que estar más vivo!!!

$$2m\ddot{y}_1 + 6k y_1 = 0 \longrightarrow y_1(t) = A\cdot\cos(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)$$

$$\dot{y}_1(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) + B\omega\cos(\omega_1 t)$$

$$y_1(0) = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$\dot{y}_1(0) = 0 \longrightarrow B = 0 \quad \rightarrow \underline{y_1(t) = 0}$$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

$2m\,\ddot{y}_2 + 2k\,y_2 = 2ma$ con $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases}$

$$y_2(t) = \underbrace{A\cos(w_2 t) + B\,\mathrm{sen}(w_2 t)}_{y_h} + \underbrace{\frac{\cancel{2}ma}{\cancel{2}k}}_{y_p}$$

$$\dot{y}_2(t) = -A w_2\,\mathrm{sen}(w_2 t) + B w_2 \cos(w_2 t)$$

$$y_2(0) = A + \frac{2ma}{2k} = 0 \longrightarrow A = -\frac{\cancel{2}ma}{\cancel{2}k} = -\frac{ma}{k}$$

$$\dot{y}_2(0) = B \cdot w_2 = B = 0$$

$$\longrightarrow \underline{y_2(t) = -\frac{ma}{k}\cdot\cos(w_2 t)} + \frac{ma}{k} = \frac{ma}{k}\left[1 - \cos(w_2 t)\right]$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\to x_1(t) = \cancel{y_1(t)}^{0} + y_2(t) = \frac{+ma}{k}\left(1 - \cos(w_2 t)\right) \\ &\to x_2(t) = -\cancel{y_1(t)}^{0} + y_2(t) = \frac{+ma}{k}\left(1 - \cos(w_2 t)\right) \end{aligned}}$$

3) La respuesta después del frenado es por superposición.

$$\underline{\underline{t > 2}}$$

$2m\,\ddot{y}_1 + 6\,y_1 = 0$

$2m\,\ddot{y}_2 + 2k\,y_2 = 2f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} \text{escalón de valor } ma \text{ en } t=0 \\ + \\ \text{escalón de valor } -ma \text{ en } t=2 \end{cases}$

y cond iniciales nulas

$y_1(t) = 0$

$$y_2(t) = \frac{ma}{k}\left[1 - \cos(w_2 t)\right] - \frac{ma}{k}\left[1 - \cos(w_2(t-2))\right]$$

$$= \frac{ma}{k}\left[\cos(w_2(t-2)) - \cos(w_2 t)\right]$$

$x_1(t) = y_2(t)$

$x_2(t) = y_2(t)$

$\longrightarrow$

Esto también se podría haber hecho de la siguiente forma:

$$2m\ddot{y}_1 + 6k\, y_1 = 0$$

$$2m\ddot{y}_2 + 2k\, y_2 = \underbrace{2f(t)}_{-2ma}$$

donde $f(t)$ = es calón de valor $-ma$ en $t = 2$

con las cond en Z las que nos ha dejado el apartado anterior

Del apartado anterior:

$$y_1(Z) = 0 \quad ; \quad \dot{y}_1(Z) = 0 \quad y$$

$$y_2(Z) = \frac{-ma}{k}\cos(w_2 Z)$$

$$\dot{y}_2(Z) = \frac{ma\, w_2}{k}\operatorname{sen}(w_2 Z)$$

$\boxed{y_1(t) = 0}$ → no hace falta desplazarla en el tiempo

Para $y_2(t)$ aplicamos las cond en $t = Z$ y luego trasladamos en t

$$y_2 = A\cos(w_2 t) + B\operatorname{sen}(w_2 t) - \frac{ma}{k}$$

$$\dot{y}_2 = -A w_2 \operatorname{sen}(w_2 t) + B w_2 \cos(w_2 t)$$

$$y_2(0) = A - \frac{ma}{k} = \frac{-ma}{k}\cos(w_2 Z) \rightarrow A = \frac{ma}{k}(1 - \cos(w_2 Z))$$

$$\dot{y}_2(0) = B\cancel{w_2} = \frac{ma\,\cancel{w_2}}{k}\operatorname{sen}(w_2 Z) \rightarrow B = \frac{ma}{k}\operatorname{sen}(w_2 Z)$$

$$\boxed{y_2(t) = \frac{ma}{k}\left[(1 - \cos(w_2 Z))\cos(w_2(t-2))\right] + \frac{ma}{k}\operatorname{sen}(w_2 Z)\operatorname{sen}(w_2(t-2)) - \frac{ma}{k}}$$

$$x_1(t) = \cancel{y_1(t)}^{0} + y_2(t)$$

$$x_2(t) = \cancel{y_1(t)} + y_2(t)$$

$$y_2(t) = \frac{ma}{k}\left[(1 - \cos w_2 Z)\cos w_2(t-Z) + \operatorname{sen} w_2 Z \operatorname{sen} w_2 (t-Z) - 1\right] =$$

$$= \frac{ma}{k}\left[\cos w_2(t-Z) - 1 - \cos w_2 Z \cos w_2(t-Z) + \operatorname{sen} w_2 Z \cdot \operatorname{sen} w_2(t-Z)\right.$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial. Marzo 2007.
Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio. 3 Tiempo: 60 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2007.-eko Martxoa.
B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 60 min.

TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Para realizar el estudio dinámico de un perfil aeronáutico, éste se ha modelizado a partir del sistema de dos grados de libertad (y,θ) de la Figura 1 sobre el que se aplican las dos fuerzas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ mostradas en la Figura 2. La barra tiene una masa m y una inercia respecto de su centro de gravedad I_G. Se pide:

1. Ecuación matricial del movimiento. (3 p)
2. Frecuencias naturales y modos de vibración. (2 p)
3. Respuesta del sistema para (5 p):
   a. $t<a$
   b. $a<t<2a$
   c. $t>2a$

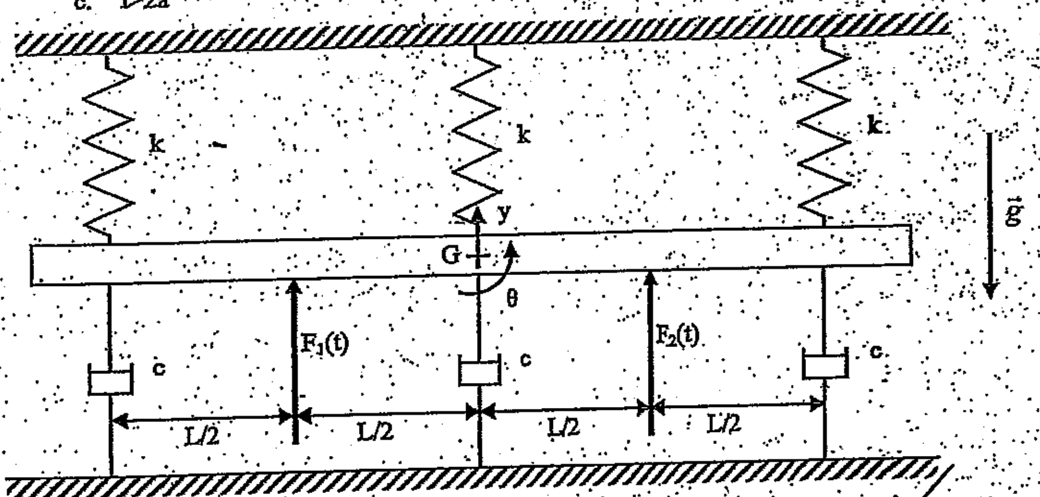
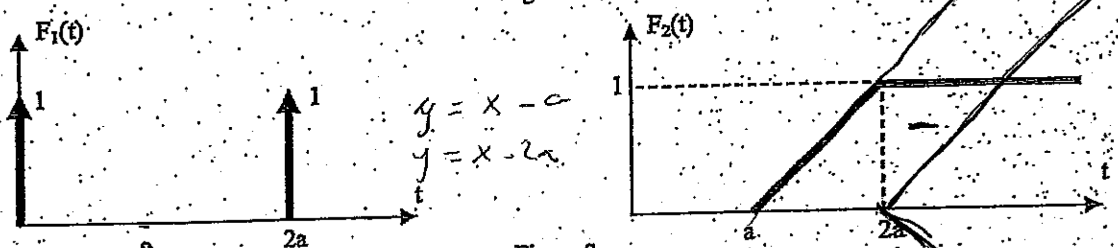


Figura 1.



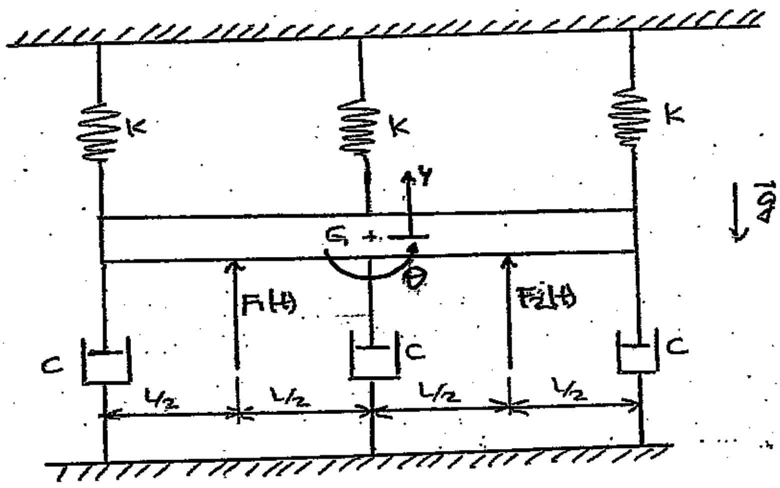
$y = x - a$
$y = x - 2a$

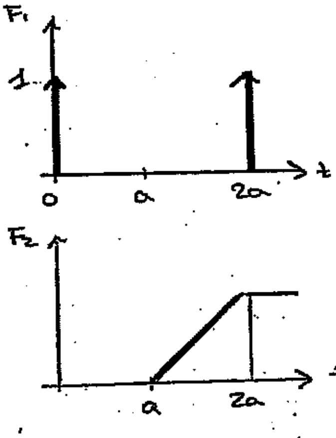
Figura 2.

Nota: respuesta de un sistema de 1gdl a una función rampa aplicada en t=0 con condiciones iniciales nulas:

$$x(t) = \frac{I}{k}t - \frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\,\mathrm{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \mathrm{sen}\,2\theta\right]$$

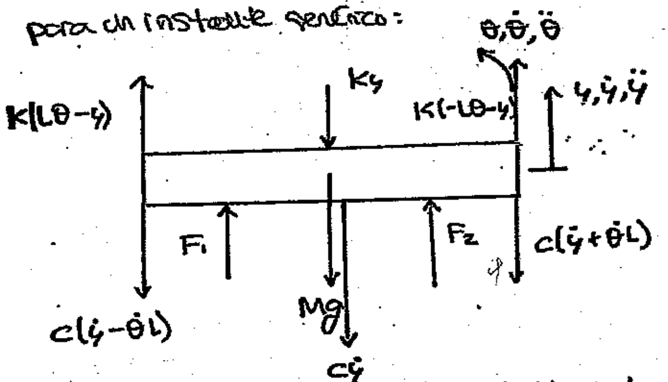
MARZO 2007





1) Ecuación matricial del movimiento.

Para obtenerla, aislamos la masa de estudio y realizamos un análisis dinámico para un instante genérico:



(Como hemos tomado el desplazamiento vertical positivo hacia arriba, el muelle central ~~consideramos que está comprimido.~~)

Como tiene dos grados de libertad, necesitamos dos ecuaciones del movimiento y aplicamos por tanto dos ecuaciones de la dinámica:

$$\sum F_y = m\cdot a \Rightarrow k(L\theta-y) - ky + k(-L\theta-y) - c(\dot y - L\dot\theta) + F_1 - Mg - c\dot y + F_2 - c(\dot y+\dot\theta L) = m\ddot y$$

$$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_G} = I_G\overset{\curvearrowleft}{\alpha} \Rightarrow Lk(L\theta-y) - L\cdot c(\dot y+\dot\theta L) + \frac{L}{2}F_2 - \frac{L}{2}F_1 - Lk(-L\theta-y) + Lc(\dot y - L\dot\theta) = I_G\ddot\theta$$

Reordenando las ecuaciones como lo hacemos habitualmente:

$$m\ddot y + 3c\dot y + 3ky = F_1 + F_2 - Mg \quad (1)$$

$$I_G\ddot\theta + 2cL^2\dot\theta + 2kL^2\theta = \frac{L}{2}F_2 - \frac{L}{2}F_1 \quad (2)$$

A pesar de que las ecuaciones están desacopladas, escribimos ambas matricialmente ya que nos lo piden:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot y \\ \ddot\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & 0 \\ 0 & 2cL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot y \\ \dot\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 2kL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1+F_2-Mg \\ \frac{L}{2}F_2 - \frac{L}{2}F_1 \end{Bmatrix}}$$

2) Frecuencias naturales y modos de vibración.

Para obtener las frecuencias naturales podríamos hacerlo resolviendo $|[K]-\omega^2[M]|=0$ o en este caso, como están desacoplados obteniendo una frecuencia natural de cada ecuación:

(1) $M\ddot{y} + 3c\dot{y} + 3ky = F_1 + F_2 - Mg$ $\quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{M}}}$

(2) $I_G\ddot{\theta} + 2cl^2\dot{\theta} + 2kl^2\theta = \frac{L}{2}F_2 - \frac{L}{2}F_1$ $\quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{2kl^2}{I_G}}}$

Al estar las ecuaciones desacopladas las coordenadas son independientes una de la otra y los modos sabemos que son:

$$\boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$ (siempre que estén desacopladas)

Sin embargo, comprobaremos que es así obteniendo los modos siguiendo la mecánica habitual.

$$[[K]-\omega^2[M]]\{X\} = \{0\}$$

sabiendo que sólo una ecuación es independiente

$$\begin{bmatrix} 3k-\omega^2 M & 0 \\ 0 & 2kl^2-\omega^2 I_G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (3k-\omega^2 M)Y = 0 \rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

en este caso necesitaríamos las dos ecuaciones, ya que en cada una de ellas solo tiene sentido sustituir un valor de ω (en cada ecuación solo aparece una de las variables)

$$\Rightarrow (2kl^2-\omega^2 I_G)\theta = 0 \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) Respuesta del sistema para los siguientes casos.

~~Se sobreentiende que nos están~~ pidiendo la respuesta estacionaria debida a las acciones exteriores del lado derecho de la igualdad. No tiene sentido la respuesta ~~transitoria~~ ya que no hay condiciones iniciales.

a) $t<a$.

$$\boxed{y(t) = \underbrace{\frac{e^{-\xi\omega_1 t}}{M\cdot\omega_D}\sin\omega_D t}_{\substack{\text{respuesta debida a } F_1 \text{ (para } t<a \\ \text{solo se habrá producido el golpe (impulso))}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{respuesta debida a } F_2 \\ \text{(aún no hay efecto de } F_2)}} - \overbrace{\frac{Mg}{3k}}^{\text{respuesta debida al peso (fuerza estática)}}}$$

ω_D sin c es ω

$$c_1 = 2M\omega_1 = 2M\sqrt{\frac{3k}{M}} = \sqrt{12kM}$$

$$\xi_1 = \frac{3c}{\sqrt{12kM}}\left(=\frac{c}{c_1}\right) \Rightarrow \underline{\xi_1 = \sqrt{\frac{3c^2}{4kM}}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{kM}}$$

$$\underline{\omega_{D_1}} = \omega_1\cdot\sqrt{1-\xi_1^2} = \sqrt{\frac{3k}{M}}\cdot\sqrt{1-\frac{3c^2}{4kM}} = \underline{\sqrt{\frac{3(4kM-3c^2)}{4M^2}}} = \frac{\sqrt{3(4kM-3c^2)}}{2M}$$

$$\boxed{\theta(t) = -\frac{L}{2}\frac{e^{-\xi_2\omega_2 t}}{I_G\,\omega_{D_2}}\sin\omega_{D_2}t}$$

$$\overline{C}_2 = 2I_G\sqrt{\frac{2kl^2}{I_G}} = \sqrt{8kl^2 I_G}$$

$$\underline{\underline{\xi_2}} = \frac{c_2}{\overline{C}_2} = \frac{2cl^2}{\sqrt{8kl^2 I_G}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{c^2l^2}{2kI_G}}}} = \frac{cl}{\sqrt{2kI_G}}$$

$$\underline{\underline{\omega_{D_2}}} = \omega_2\sqrt{1-\xi_2^2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2kl^2}{I_G}}\sqrt{1-\frac{c^2l^2}{2kI_G}}}} = \frac{l}{I_G}\sqrt{2kI_G - c^2l^2}$$

la rampa entra en $t=a$!!!

b) $a<t<2a$

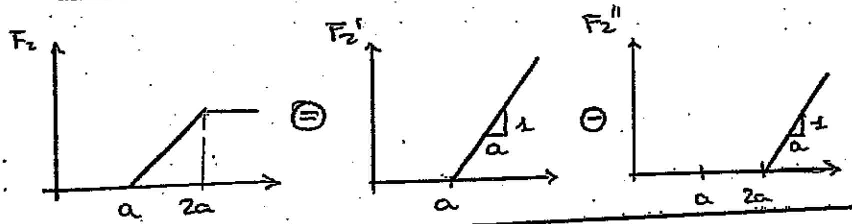
$$\boxed{y(t) = \underbrace{\frac{e^{-\xi_1\omega_1 t}}{m\omega_{D_1}}\sin\omega_{D_1}t}_{\text{en el intervalo } a<t<2a \text{ en } F_1 \text{ no hay ningún cambio, se mantiene el efecto del impulso de } t=0.} - \frac{mg}{3k} + \frac{(t-a)}{a\cdot 3k} - \frac{1}{a3k\omega_{D_1}}\left[e^{-\xi_1\omega_1(t-a)}\sin[\omega_{D_1}(t-a)-2\theta]+\sin 2\theta\right]}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}\right]$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{L}{2}\frac{(t-a)}{a2kL^2} - \frac{1}{a2kL^2\omega_{D_2}}\left[e^{-\xi_2\omega_2(t-a)}\sin[\omega_{D_2}(t-a)-2\theta]+\sin 2\theta\right] - \frac{L}{2}\frac{e^{-\xi_2\omega_2 t}}{I_G\omega_{D_2}}\sin\omega_{D_2}t}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[\frac{\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2^2}}\right]$$

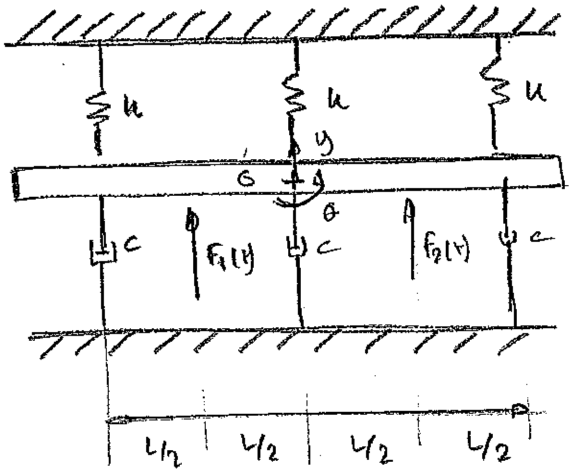
c) $\underline{t>2a}$



$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{e^{-\xi_1\omega_1 t}}{m\omega_{D_1}}\sin\omega_{D_1}t + \frac{e^{-\xi_1\omega_1(t-2a)}}{m\omega_{D_1}}\sin\omega_{D_1}(t-2a) + \frac{(t-a)}{a3k} - \frac{1}{a3k\omega_{D_1}}\left[e^{-\xi_1\omega_1(t-a)}\sin[\omega_{D_1}(t-a)-2\theta] + \sin 2\theta\right] \\ & - \frac{(t-2a)}{3ak} + \frac{1}{3ak\omega_{D_1}}\left[e^{-\xi_1\omega_1(t-2a)}\sin[\omega_{D_1}(t-2a)-2\theta] + \sin 2\theta\right] - \frac{mg}{3k} \end{aligned}}$$

La respuesta de $\theta(t)$ en este caso será similar a la ~~de~~ $y(t)$ anterior, pero con los parámetros correspondientes a la 2ª ecuación del movimiento.

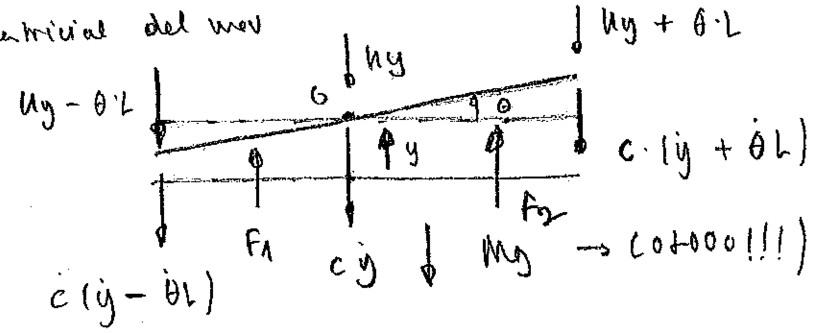
EXAMEN MARZO 2007



$\downarrow \vec{g}$

Pequeñas des. $\begin{cases} \sin\theta \cong \theta \\ \cos\theta \cong 1 \\ \operatorname{tg} \cong \theta \end{cases}$

1) ec. matricial del mov



$\Sigma F_y \Rightarrow -(ky-\theta\cdot L) - ky - (ky+\theta L) - c(\dot y - \dot\theta L) - c\dot y - c(\dot y + \dot\theta L) -$

$- Mg + F_1 + F_2 = m\ddot y$

$\longrightarrow m\ddot y_1 + 3c\dot y + 3ky = -Mg + F_1 + F_2$

$\Sigma M_G \Rightarrow (ky-\theta\cdot L)\cdot \cancel{L} + c(\dot y - \dot\theta L)\cdot\cancel{L} - F_1\cdot\cancel{L}/2 + F_2\cdot\cancel{L}/2 - (ky+\theta\cdot L)\cancel{L} -$

$- c(\dot y + \dot\theta L)\cdot\cancel{L} = J_g\cdot\ddot\theta$

$\longrightarrow \frac{J_g}{L}\ddot\theta + 2cL\dot\theta + 2kL\theta = -F_1/2 + F_2/2$

Ahora expresamos en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_g/L \end{bmatrix}}_{[M]}\begin{Bmatrix}\ddot y \\ \ddot\theta\end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3c & 0 \\ 0 & 2cL \end{bmatrix}}_{[C]}\begin{Bmatrix}\dot y \\ \dot\theta\end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 2kL \end{bmatrix}}_{[K]}\begin{Bmatrix} y \\ \theta\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1+F_2-Mg \\ \frac{F_2}{2}-\frac{F_1}{2}\end{Bmatrix}}_{[J]}$$

¡¡¡ ECUACIONES DESACOPLADAS !!! $\longrightarrow$

2) Frecuencias nat y modos de vibración

Suponemos $[C] = \{0\}$ y $\{f\} = \{0\}$ y una sol de la forma

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

Operando llegaríamos a que las frec naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \longrightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2kL}{I_G/L}} = \sqrt{\frac{2kL^2}{I_G}} \longrightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3) Respuesta del sistema:

$$M\ddot{y} + 3c\dot{y} + 3ky = F_1 + F_2 - Mg$$

$$\frac{I_G}{L}\ddot{\theta} + 2cL\dot{\theta} + 2kL\theta = \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$$

- al si $t < a$ $\qquad \theta = \arctg\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]$

- resp. rampa de pend I en $t=0$; $x_r(t) = \frac{I}{k}t - \frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\varepsilon\omega t}\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen} 2\theta\right]$

- deriv. obtenemos la resp a esc: $x_e(t) = \frac{I}{k} - \frac{I}{k\omega_D}\left[-\varepsilon\omega e^{-\varepsilon\omega t}\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \right.$

$$\left. + e^{-\varepsilon\omega t}\omega_D\cos(\omega_D t - 2\theta)\right]$$

- derivando obtenemos la resp a impulso: $\qquad$ esta bien derivarla pero mejor saberla

$$x_i(t) = -\frac{I}{k\omega_D}\left[(\varepsilon\omega)^2 e^{-\varepsilon\omega t}\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) - e^{-\varepsilon\omega t}\omega_D^2\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta)\right]$$

$$x_i(t) = \frac{I e^{-\varepsilon\omega t}}{m\omega_D}\cdot(\operatorname{sen}\omega_D t)$$

- En este caso para y: $\quad \varepsilon_1 = \frac{c_1}{c_c} = \frac{\overbrace{3c}^{c_1}}{2\cdot m_1\omega_1} = \frac{3c}{2m\cdot\sqrt{3k/m}}$;

$k_1 = 3k$

$$\omega_{D_1} = \omega_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{3c}{2m\sqrt{3k/m}}\right)^2}$$

$$\theta_1 = \arctg\left[\frac{3c/2m\omega_1}{\sqrt{1-(3c/2m\omega_1)^2}}\right]$$

$$y(t) = \frac{1\cdot e^{-\varepsilon_1\cdot\omega_1\cdot t}}{m_1\cdot\omega_{D1}}\operatorname{sen}(\omega_{D1}t) - \frac{Mg}{3k_1}$$

$\rightarrow$

$\rightarrow$

* Para el caso de θ:

$$m_2 = \frac{I_\theta}{L}$$

$$c_2 = 2cL$$

$$\bar{c}_2 = 2 m_2 w_2 = 2 \frac{I_\theta}{L} \cdot \sqrt{\frac{2kL^2}{I_g}} \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{c_2}{\bar{c}_2} = \dots$$

$$w_{D2} = w_2 \sqrt{1 - \varepsilon_2^{\,2}} = \dots$$

$$\theta(t) = \frac{-1}{2} \, \frac{1 \cdot e^{-\varepsilon_2 \cdot w_2 t}}{m_2 \cdot w_{D2}} \operatorname{sen}(w_{D2} t)$$

• b) si $a < t < 2a$

$$y(t) = \frac{e^{-\varepsilon_1 w_1 t}}{m_1 \cdot w_{D1}} \operatorname{sen}(w_{D1} t) - \frac{M_g}{3k_1} +$$

$$+ \frac{1}{a k_1}(t-a) - \frac{1}{a k_1 w_{D1}} \left[e^{-\varepsilon_1 w_1 (t-a)} \cdot \operatorname{sen}(w_{D1}(t-a) - 2\theta_1) + \operatorname{sen} 2\theta \right]$$

$$\theta(t) = \frac{-1}{2} \, \frac{e^{-\varepsilon_2 w_2 t}}{m_2 \cdot w_{D2}} \operatorname{sen}(w_{D2} t) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a k_2}(t-a) - \frac{1}{a k_2 w_{D2}} \left[e^{-\varepsilon_2 w_2 (t-a)} \cdot \operatorname{sen}(w_{D2}(t-a) - 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta \right] \right.$$

c) si $t > 2a$

$$y(t) = \frac{e^{-\varepsilon_1 w_1 t}}{m_1 \cdot w_{D1}} \operatorname{sen}(w_{D1} t) + \frac{e^{-\varepsilon_1 w_1 (t-2a)}}{m_1 \cdot w_{D1}} \operatorname{sen}(w_{D1}(t-2a)) -$$

$$- \frac{M_g}{3k_1} + \frac{1}{a k_1}(t-a) - \frac{1}{a k_1 w_{D1}} \left[e^{-\varepsilon_1 w_1 (t-a)} \operatorname{sen} \dots \right] +$$

$$- \frac{1}{a k_1}(t-2a) + \frac{1}{a k_1 w_{D1}} \left[e^{-\varepsilon_1 w_1 (t-2a)} \dots \right]$$

$$\theta(t) = \frac{-1}{2} \left[\text{copiar de arr} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{cop de arrib} \right]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA

INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
Ingeniería Industrial. 3er curso. Septiembre 2005.
Examen Final
Ejercicio 2
Peso: 15 %. Tiempo: 35 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2005
Azterketa Finala
2. ariketa
Pisua: 15 %. Iraupena: 35 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:

ojoo → concepto de F giratoria

OMEEI → ojo dar un repaso que he visto mucho en los que en fuerza sea tipo armónica

En la siguiente figura se representa un esquema de dispositivo de ensayos experimentales. En este caso, se pretende estudiar la respuesta de un sistema de dos grados de libertad, de masa puntual m, aislado del suelo mediante resortes de rigidez constante k y amortiguadores subcríticos de constante de proporcionalidad c. Dicho sistema, desequilibrado, se ve sometido a una fuerza giratoria de magnitud F_0, que gira alrededor de G a una velocidad angular constante ϖ. Se pide:

→ al estar el sistema desequilibrado aparece la fuerza F_0 giratoria en cuestión

1.- Las ecuaciones del movimiento en notación matricial. (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (1p)
3.- La respuesta estacionaria del sistema frente al peso propio y a la carga dinámica F_0. (6p)

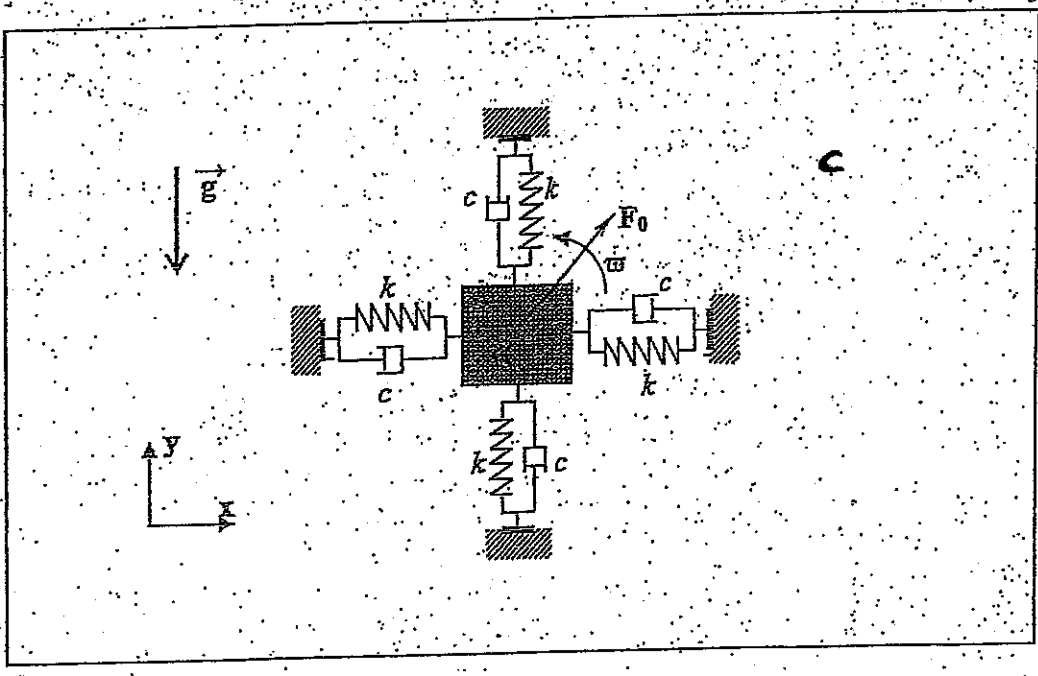
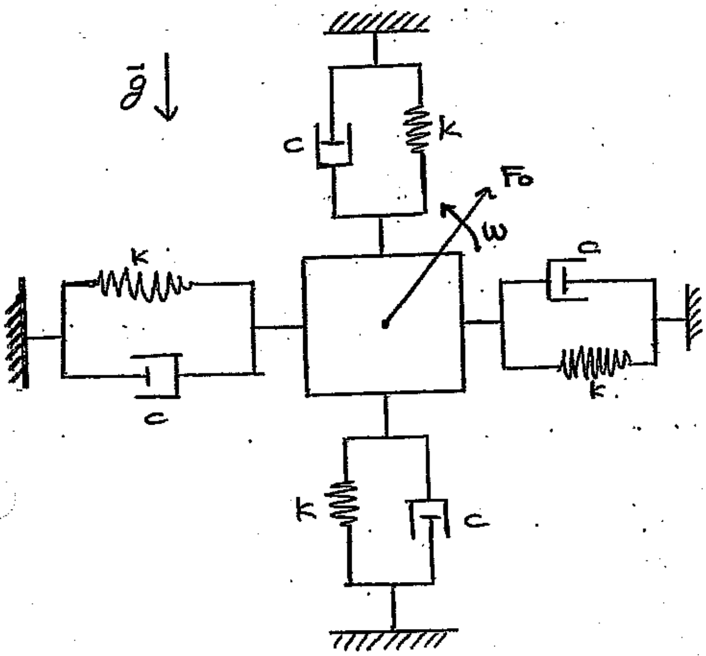
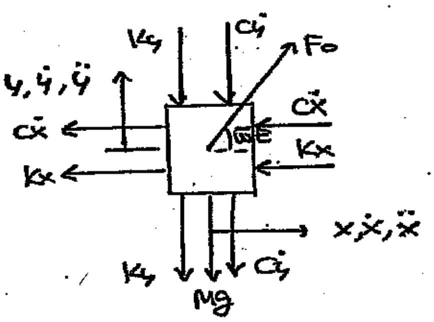


Figura 1. Esquema del sistema.

SEPT. 2005



Realizamos el estudio dinámico para un instante genérico de la masa puntual aislada:



$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow -2kx - 2c\dot{x} + F_0\cos\bar{\omega}t = M\ddot{x} \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = m\cdot\vec{a}_y \Rightarrow -2ky - 2c\dot{y} + F_0\sin\bar{\omega}t = M\ddot{y} \quad (2)$$

Reordenando y agrupando los distintos términos:

$$M\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = F_0\cos\bar{\omega}t \quad (1)$$

$$M\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = F_0\sin\underset{\uparrow}{\bar{\omega}}t - mg \quad (2)$$

excitación

frecuencia de excitación de la acción exterior.

1) Ecuaciones del movimiento en notación matricial.

Escribimos las ecuaciones del movimiento obtenidas de forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0\cos\bar{\omega}t \\ F_0\sin\bar{\omega}t - mg \end{Bmatrix}}$$

2) Frecuencias naturales del sistema.

Como las ecuaciones están desacopladas obtendremos una frecuencia natural de cada una de las ecuaciones del movimiento de forma directa:

$$(1) \longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M}}}$$

$$(2) \longrightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{2K}{M}}}$$

Puede comprobarse que coinciden, no debemos pensar que está mal.

3) Respuesta estacionaria del sistema debida al peso propio y a la carga dinámica F_0.

- Respuesta debida al peso:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= -\frac{Mg}{2K} \end{aligned}}$$

(el peso no influye en la dirección "x")

(el peso es una fuerza estática)

- Respuesta debida a F_0 ⇒ respuesta estacionaria debida a acciones armónicas:

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0/2K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 - (2\xi\beta)^2}} \cos(\bar{\omega} t - \varphi)} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

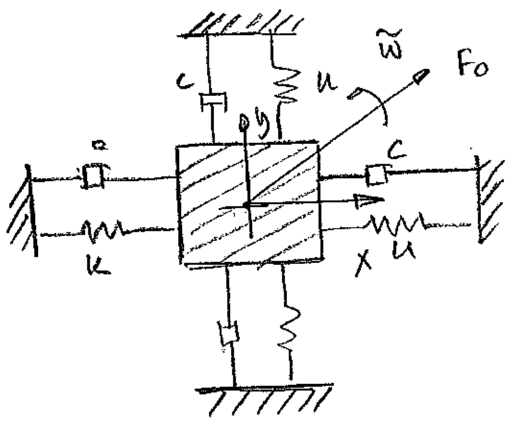
$$\xi = \frac{2c}{2m\sqrt{\frac{2K}{M}}} = \frac{c}{\sqrt{2Km}}$$

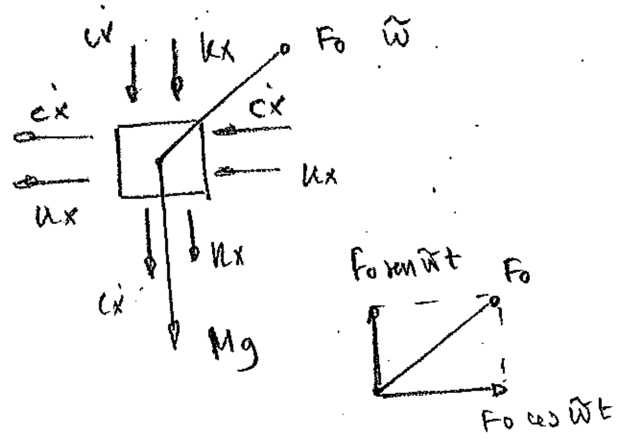
$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{2K/m}}$$

La respuesta $y(t)$ será igual pero con $\sin(\ )$ en lugar de $\cos(\ )$, y es que coinciden todos los parámetros en este caso.

$$\boxed{y(t) = \frac{F_0/2K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 - (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega} t - \varphi)} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

EXAMEN SEPTIEMBRE 2005





1) Ecuaciones del mov.

$$-2kx - 2c\dot{x} + F_0 \cos\tilde{\omega}t = m\ddot{x} \longrightarrow m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = F_0\cos\tilde{\omega}t$$

$$-2kx - 2c\dot{x} + F_0 \operatorname{sen}\tilde{\omega}t - Mg = m\ddot{y} \rightarrow m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = F_0 \operatorname{sen}\tilde{\omega}t - Mg$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \cos\tilde{\omega}t \\ F_0 \operatorname{sen}\tilde{\omega}t - Mg \end{Bmatrix} \checkmark$$

2) Frecuencia naturales del sistema $\rightarrow [C] = \{f\} = [0]$

$$m\ddot{x} + 2kx = 0 \longrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega$$

$$m\ddot{y} + 2ky = 0 \longrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega$$

Las dos frecuencias naturales son iguales $\rightarrow$ 1 único modo de vibración

3) Resp. estacionaria del sistema

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = F_0\cos\tilde{\omega}t$$

$$m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = F_0 \operatorname{sen}\tilde{\omega}t - Mg$$

Para la ecuación: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ donde $f(t)$ era armónica,

es decir, $f(t) = \begin{cases} F_0\cos(\tilde{\omega}t) & (1) \\ F_0 \operatorname{sen}(\tilde{\omega}t) & (2) \end{cases}$

planteabamos $f(t) = F_0 e^{i\tilde{\omega}t}$ y luego nos quedabamos con la parte real o imaginaria de la sol según esta fuese de la forma (1) o (2)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\tilde{\omega}t} \rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\left(A\cos(\omega_D t) + B\operatorname{sen}(\omega_D t)\right)}_{\text{parte } \cancel{\text{esta}} \text{ transitoria}} + \underbrace{\frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{i(\tilde{\omega}t-\theta)}}_{\text{estacionaria}}$$

0010000

$\longrightarrow$

De esta forma, para el caso que nos ocupa y dado que solo nos piden la parte estacionaria:

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{m\tilde{w}^2}{2k}\right)^2 + \left(2\frac{c}{\sqrt{2km}}\frac{\tilde{w}}{\sqrt{2k/m}}\right)^2}} \underbrace{\left[\cos(\tilde{w}t)\cdot\cos\varphi + \operatorname{sen}(\tilde{w}t)\cdot\operatorname{sen}\varphi\right]}_{\cos(\tilde{w}t-\varphi)}$$

* CUIDADO CON LA FORM DE EULER

$$\beta = \frac{\tilde{w}}{w} = \frac{\tilde{w}}{\sqrt{\frac{2k}{m}}} \; ; \; \mathcal{E} = \frac{c}{c} = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}mw} = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}m\sqrt{\frac{2k}{m}}} = \frac{c}{\sqrt{2km}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\mathcal{E}\beta}{1-\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{2\frac{c}{\sqrt{2km}}\cdot\frac{\cancel{\tilde{w}}}{\sqrt{2k/m}}}{1-\frac{\tilde{w}^2 m}{2k}} = \frac{\cancel{2}c}{\frac{\cancel{4}k}{2}\left(1-\frac{\tilde{w}^2 m}{2k}\right)}$$

(los parámetros son los mismos para y).

$$y(t) = \frac{F_0}{2k} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{m\tilde{w}^2}{2k}\right)^2 + \left(2\sqrt{2km}\frac{\tilde{w}}{\sqrt{2k/m}}\right)^2}} \underbrace{\left(\operatorname{sen}\tilde{w}t\cos\varphi - \cos\tilde{w}t\cdot\operatorname{sen}\varphi\right)}_{\operatorname{sen}(wt-\varphi)} - \frac{Mg}{2k}$$

* CUIDADO CON LA FORMULA DE EULER

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3º Ingeniería Industrial, Junio 2007.
Peso sobre la Unidad Temática: 10 %.
Ejercicio. 2 Tiempo: 45 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2007.-eko Ekaina.
Atal Tematikoaren Pisua: 10 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 45 min.

GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

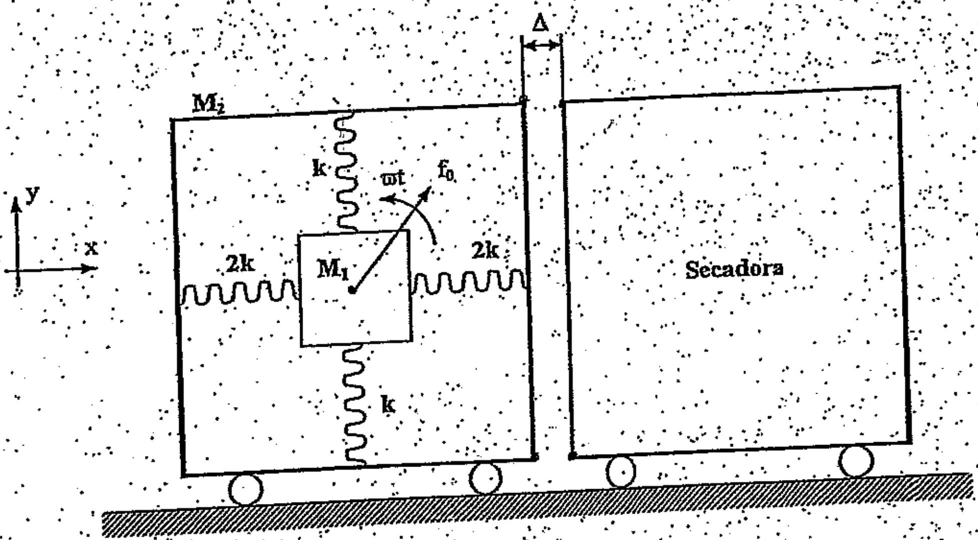
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

BIEEN → tener en cuenta que si sale muy rodo con y los F son armónicas mejor tener solo en cuenta la mp. ntac

Con el fin de estudiar la posible colisión entre dos electrodomésticos, una lavadora y una secadora, se define el modelo de la figura. La lavadora, de masa total M_2, está apoyada en el suelo y tiene capacidad de movimiento horizontal. Debido a un desequilibrio, aparece una fuerza f_0 de magnitud $m\varpi^2 e$, que gira a velocidad constante ϖ aplicada al tambor de masa M_1, montado sobre el chasis mediante los resortes de rigidez **k** y **2k**, tal como se muestra en la figura. Se pide:

1. El desplazamiento absoluto del tambor y de la lavadora a lo largo del tiempo. (6 p)
2. La fuerza transmitida al suelo. (2 p)
3. La condición para que la lavadora no choque con la secadora, es decir el mínimo espacio Δ entre ellas, si la frecuencia de excitación ϖ vale $\sqrt{4k/M_1}$. (2 p)

$X_{TAMBOR} = X_{LAVADO} + X_{relativo}$



$$\frac{p_0}{k}\,\frac{1}{(1-\tilde{\beta}^2)^2+(2\zeta\tilde{\beta})^2}\,(1-\tilde{\beta}^2)+(2\zeta\beta\;\; e^{i(\omega t-\psi)}$$

Así, obtenemos el siguiente sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$(1)\quad M_1\ddot{x} + 4kx - 4kx_L = f_0\cos\overline{\omega}t$$

$$(3)\quad M_1\ddot{y} + 2ky = f_0\sin\overline{\omega}t$$

$$(2)\quad M_2\ddot{x}_L - 4kx + 4kx_L = 0$$

En primer lugar resolvemos la ecuación (2), que está desacoplada:

$$\boxed{y(t) = \frac{m\omega^2 e/2k}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_3}\right)^2 \rightarrow (\beta^2)}\sin\overline{\omega}t}$$

$$\underline{\underline{\omega_3}} = \sqrt{\frac{K_{as}}{M_{as}}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2k}{M_1}}}}$$

Escribimos de forma matricial las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -4k \\ -4k & 4k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0\cos\overline{\omega}t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las dos frecuencias naturales correspondientes: $\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0$

$$\begin{vmatrix} 4k-\omega^2M_1 & -4k \\ -4k & 4k-\omega^2M_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4k-\omega^2M_1)(4k-\omega^2M_2) - (4k)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4k)^2 - 4k\omega^2(M_2+M_1) + \omega^4M_1M_2 - (4k)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2\left[-4k(M_2+M_1) + \omega^2M_1M_2\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\omega_1 = 0} \\ -4k(M_2+M_1) + \omega_2^2M_1M_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{4k(M_1+M_2)}{M_1M_2}}} \end{cases}$$

A continuación determinamos los modos:

$$\begin{bmatrix} 4k-\omega^2M_1 & -4k \\ -4k & 4k-\omega^2M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (4k-\omega_i^2M_1)X_1 - 4kX_L = 0$$

- $\omega_1 = 0 \rightarrow X_1^1 = X_L^1 \Rightarrow \underline{\underline{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}}$

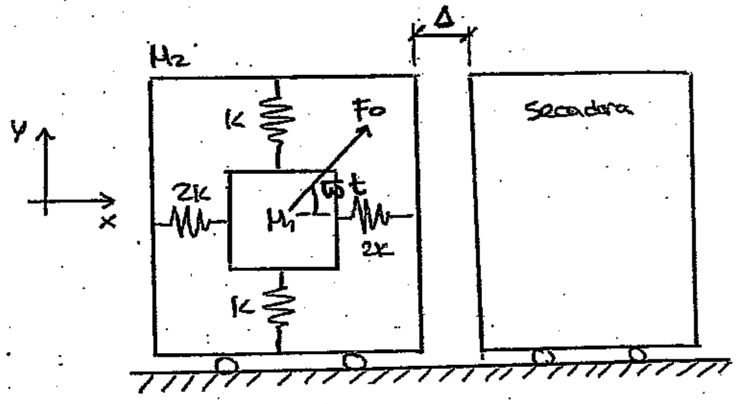
- $\omega_2 = \sqrt{\frac{4k(M_1+M_2)}{M_1M_2}} \Rightarrow \left[4k - \left(\frac{4k(M_1+M_2)}{M_1M_2}\right)M_1\right]X_1^2 - 4kX_L^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\cancel{4kM_2} - 4kM_1 - \cancel{4kM_2}}{M_2}\right)X^2 = X_L^2\,4k \Rightarrow -\frac{M_1}{M_2}X^2 = X_L^2 \Rightarrow \underline{\underline{\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{M_1}{M_2} \end{Bmatrix}}}$$

La matriz de los modos nos quedaría: $\underline{\underline{[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix}}}$

Para resolver el sistema, realizamos un cambio a variables modales:

JUNIO 2007

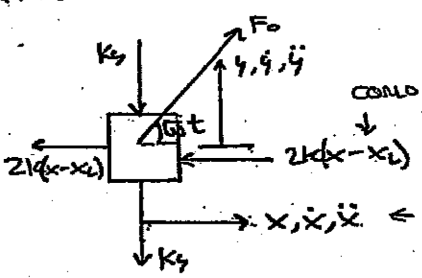


$F_0 = m\bar{\omega}^2 e$

$X = X_L + X_S$

1) Desplazamiento absoluto del tambor (M_1) y la lavadora (M_2) a lo largo del tiempo.

Realizaremos el estudio dinámico aislando el tambor:



como "x" e "y" expresan posiciones absolutas del tambor, debemos tener en cuenta el desplazamiento de la lavadora

$\longrightarrow x, \dot{x}, \ddot{x}$ ← coordenadas ABSOLUTAS del tambor

$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x \Rightarrow -4Kx + 4Kx_L + f_0 \cos\bar{\omega}t = M_1\ddot{x}$

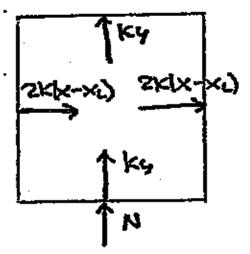
$\sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_y \Rightarrow -2Ky + f_0 \sin\bar{\omega}t = M_1\ddot{y}$

Otra opción sería utilizar para el tambor coords x_r e $y_r (=y)$ relativos respecto de la lavadora, pero al aplicar las ecuaciones de la dinámica introduciría el término correspondiente a la lavadora, ya que la aceleración que aparece es la absoluta

Reordenando las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} M_1\ddot{x} + 4Kx &= 4Kx_L + f_0\cos\bar{\omega}t \quad (1) \\ M_1\ddot{y} + 2Ky &= f_0 \sin\bar{\omega}t \quad (2) \end{aligned}}$$

En cuanto a la lavadora:



$x \equiv 4K(x - x_L) = M_2 \cdot \ddot{x}_L$ (solo se mueve en dirección horizontal).

Reordenando : $\boxed{M_2\ddot{x}_L + 4Kx_L = 4Kx}$

$\longrightarrow x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L$ ← Coordenadas ABSOLUTAS de la lavadora.

A continuación deberemos resolver las ecuaciones. La obtención de $y(t)$ es sencilla ya que es una ecuación desacoplada, pero la obtención de $x(t)$ parece más complicada ya que aunque esté desacoplada aparece un término de x_L.

Por tanto, resolveremos las ecuaciones tomando conjuntamente el tambor y la lavadora, teniendo ese conjunto tres grados de libertad

$$\begin{Bmatrix} X \\ X_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$ (e igual con sus derivadas)

Realizando el cambio de variable y premultiplicando todos los términos por la traspuesta de la matriz de modos la ecuación matricial nos quedará:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4K & -4K \\ -4K & 4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_0 \cos\varpi t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Desarrollando ...

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} M_1+M_2 & 0 \\ 0 & M_1+\frac{M_1^2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4K\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right)\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \cos\varpi t \\ f_0 \cos\varpi t \end{Bmatrix}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M_1+M_2)\, \ddot{y}_1 = f_0 \cos\varpi t & (1) \\ \frac{M_1}{M_2}(M_1+M_2)\, \ddot{y}_2 + \frac{4K(M_1+M_2)^2}{M_2^2}\, y_2 = f_0 \cos\varpi t & (2) \end{cases}$$

obtenemos dos ecuaciones desacopladas que resolveremos directamente y de las cuales, si calculáramos las frecuencias naturales deberíamos obtener las anteriores ω_1 y ω_2.

Observamos que la ecuación (1) tiene la peculiaridad de que sólo aparece el término de $\ddot{y}_1$ y por lo tanto no corresponde a un movimiento vibratorio.

En primer lugar resolveremos la ecuación (2), que sí corresponde a un movimiento vibratorio.

$$\underline{\underline{y_2(t) = \frac{f_0 M_2^2}{4K(M_1+M_2)^2\left[1-\left(\frac{\varpi}{\omega_2}\right)^2\right]} \cdot \cos\varpi t}}$$

A continuación resolveremos la ecuación (1), cuyo método podemos aplicar siempre que tengamos ecuaciones de ese tipo:

$$\int (M_1+M_2)\frac{d^2y_1}{dt^2}\,dt = \int f_0 \cos\varpi t \cdot dt \Rightarrow \int (M_1+M_2)\frac{dy_1}{dt} = \int \frac{f_0}{\varpi}\operatorname{sen}\varpi t$$

multiplicar

(como no tiene condiciones iniciales las ctes. serán nulas)

$$(M_1+M_2)\, y_1 = -\frac{f_0}{\varpi^2}\cos\varpi t \Rightarrow y_1(t) = -\frac{M\varpi^2 e}{(M_1+M_2)\varpi^2}\cos\varpi t \Rightarrow \underline{\underline{y_1(t) = -\frac{me}{M_1+M_2}\cos\varpi t}}$$

Por último, deberemos obtener la solución en coordenadas reales, volviendo a realizar el cambio de variable:

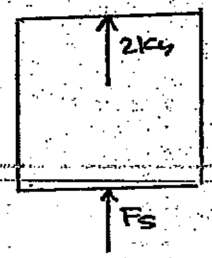
$$\begin{Bmatrix} X \\ X_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ x_L(t) = y_1(t) - \frac{M_1}{M_2}\, y_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{me}{(M_1+M_2)}\cos\bar{\omega}t - \frac{M_1}{M_2}\,\frac{f_0 M_2^2 \cos\bar{\omega}t}{4K(M_1+M_2)^2\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_2}\right)^2\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = -\left[\frac{1}{M_1+M_2} + \frac{M_1 M_2 \bar{\omega}^2}{4K(M_1+M_2)^2\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_2}\right)^2\right]}\right] me\cos\bar{\omega}t}$$

2) Fuerza transmitida al suelo

Para determinarla, retomamos el estudio dinámico de la lavadora, pero lo realizamos en la dirección vertical.



Como no existe movimiento vertical: $F_s = -2ky$

Sustituyendo el valor de $y(t)$ obtenido en el otro apartado:

$$\boxed{F_s = -\frac{\cancel{2K}\bar{\omega}^2 e}{\cancel{2K}\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_3}\right)^2\right]}\sin\bar{\omega}t}$$

(si nos pidieran solo la amplitud de esa fuerza sería el coeficiente que va delante del seno)

3) Condición para que la lavadora no choque con la secadora, es decir el mínimo espacio Δ entre ellas, si $\bar{\omega} = \sqrt{4K/M_1}$.

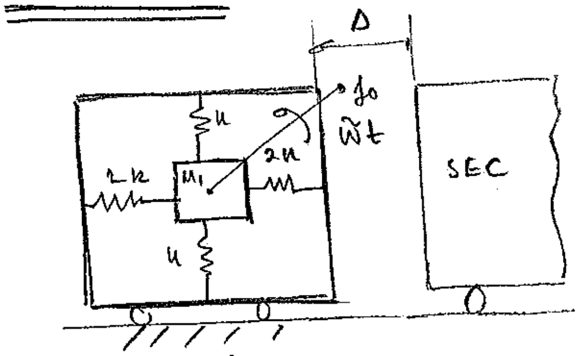
El movimiento de la lavadora es armónico, luego para que no choque con la secadora debe cumplirse que la amplitud de ese movimiento sea menor que Δ.

$$\left[\frac{1}{M_1+M_2} + \frac{M_1 M_2 \bar{\omega}^2}{4K(M_1+M_2)^2\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_2}\right)^2\right]}\right] me \leq \Delta$$

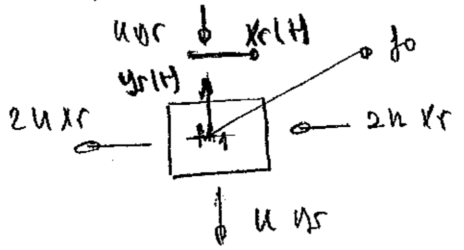
$$\left[\frac{1}{M_1+M_2} + \frac{\cancel{M_1} M_2 \cdot \cancel{4K}/\cancel{M_1}}{\cancel{4K}(M_1+M_2)^2\left[1-\frac{4K\, M_2}{M_1 4K(M_1+M_2)}\right]}\right] me \leq \Delta \Rightarrow \frac{1}{M_1+M_2} + \frac{M_2}{(M_1+M_2)^2\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)} \leq \frac{\Delta}{me} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{M_2}{M_1} \leq \frac{(M_1+M_2)\Delta}{me} \Rightarrow \frac{\cancel{M_1+M_2}}{M_1} \leq \frac{(\cancel{M_1+M_2})\Delta}{me} \Rightarrow me \leq M_1 \Delta \Rightarrow \boxed{\Delta \geq \frac{me}{M_1}}$$

JUNIO 2007



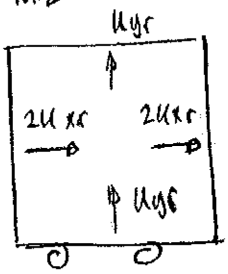
OJOO!! → para hacerlo mucho más rápido habría que haber tenido en cuenta sólo ~~fuerzas est~~ las respuestas estacionarias. Es decir, puede que durante el transitorio la lavadora golpee con la secadora pero lo que nos importa es que no choque cuando su respuesta (X_{abs} de M) ya es estacionaria



$$-4kx_r + f_0\cdot\cos\bar\omega t = M_1(\ddot x_r + \ddot x_e) \quad (1)$$

$$-2ky_r + f_0\cdot\mathrm{sen}\,\bar\omega t = M_1(\ddot y_r + \cancel{\ddot y_e}) \quad (2)$$

M_2



$$2kx_r + 2kx_r = M_2\ddot x_e \quad (3)$$

$$2ky_r - M_2 g + N = M_2\cdot\cancel{\ddot y_e}^{\,0} \quad (4)$$

Para estudiar el mov horizontal utilizamos las ecuaciones (1) y (3), que están acopladas:

$$M_1(\ddot x_r + \ddot x_e) + 4kx_r = f_0\cos\bar\omega t$$

$$M_2\ddot x_e - 4kx_r = 0$$

Matricialmente:
$$\begin{bmatrix} M_1 & M_1 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot x_r \\ \ddot x_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ -4k & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_r \\ x_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0\cos\bar\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vemos que las matrices de masa y rigidez no son simétricas, es decir, así no podemos resolver el problema

Sin embargo, si hacemos el c.v. $x_r = x_{abs} - x_e$

$\ddot x_r = \ddot x_{abs} - \ddot x_e$

$$M_1\cdot\ddot x_{abs} + 4k(x_{abs} - x_e) = f_0\cos\bar\omega t$$

$$M_2\cdot\ddot x_e - 4k(x_{abs} - x_e) = 0$$

y lo expresamos matricial.:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot x_{abs} \\ \ddot x_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -4k \\ -4k & 4k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_{abs} \\ x_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0\cos\bar\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora sí se puede resolver →

Estas ecuaciones están acopladas → cambio a coord. modales

Para ello cal las frec naturales:

$$\begin{vmatrix} 4k - M_1 w^2 & -4k \\ -4k & 4k - M_2 w^2 \end{vmatrix} = \cancel{16k^2} - 4k M_2 w^2 - 4k M_1 w^2 + M_1 M_2 w^4 - \cancel{16k^2}$$

$$= M_1 M_2 w^4 - 4k w^2 (M_1 + M_2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow w^2 (M_1 M_2 w^2 - 4k (M_1 + M_2)) = 0 \rightarrow w_1 = 0$$

$$\rightarrow M_1 M_2 w^2 - 4k (M_1 + M_2) = 0 \rightarrow w_2 = + \sqrt{\frac{4k (M_1 + M_2)}{M_1 \cdot M_2}}$$

Así hallamos los modos de vibr.:

$$\cancel{4k} X_1 - \cancel{4k} X_2 = 0 \rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$-\cancel{4k} X_1 + \left(\cancel{4k} - \cancel{M_2} \cdot \frac{\cancel{4k}(M_1+M_2)}{M_1 \cdot \cancel{M_2}}\right) X_2 = 0 \rightarrow X_1 = \left(1 - \frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) X_2 = \frac{-M_2}{M_1}$$

$$\rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{M_1}{M_2} \end{Bmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ Ahora c.v.} \rightarrow \{P\} = [X]\{x\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{P}abs \\ \ddot{P}e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k & -4k \\ -4k & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{M_1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Pabs \\ Pe \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_0 \cos \bar{w} t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 + M_2 & 0 \\ 0 & \frac{M_1}{M_2}(M_1 + M_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{P}abs \\ \ddot{P}e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4k\left[1 + \frac{2M_1}{M_2} + \frac{M_1^2}{M_2^2}\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Pabs \\ Pe \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f_0 \cos \bar{w} t \\ f_0 \cos \bar{w} t \end{Bmatrix}$$

→

$\longrightarrow$

$$(M_1+M_2)\ddot{P}_{abs} = f_0 \cos \tilde{\omega} t$$

$$\frac{M_1}{M_2}(M_1+M_2)\cdot \ddot{P}_l + 4k\left[1+\frac{2M_1}{M_2}+\frac{M_1^2}{M_2^2}\right]P_l = f_0 \cos \tilde{\omega} t$$

Por comprobar $\omega_1 = 0$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k\,\frac{M_2^2+2M_1M_2+M_1^2}{\cancel{M_2^2}}}{\frac{M_1(M_1+M_2)}{\cancel{M_2}}}} = \sqrt{\frac{4k(M_1+M_2)^{\cancel{2}}}{M_1\cdot M_2\,\cancel{(M_1+M_2)}}}$$

Por tanto las respuestas serán:

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega t}\left[A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] + \frac{f_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2+(2\varepsilon\beta)^2}}\,e^{i(\tilde{\omega}t-\varphi)}$$

donde $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{2\varepsilon\beta}{1-\beta^2}$

- Para $P_{abs} \to \varepsilon = 0$; $\omega = \omega_1 = 0$ $\quad \beta = \dfrac{\tilde{\omega}}{\omega_1}\Big|_0 = \infty$

$\to$ queda una cosa rara así que derivamos

$$(M_1+M_2)\int d\cdot\dot{P}_{abs} = (M_1+M_2)\dot{P}_{abs} = A + \int f_0 \cos\tilde{\omega}t \cdot dt =$$

$$= A + \frac{f_0}{\tilde{\omega}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{\omega}t$$

$$(M_1+M_2)\int d P_{abs} = B + \int\left(A + \frac{f_0}{\omega^2}\,\mathrm{sen}\,\tilde{\omega}t\right)\cdot dt \to$$

$$(M_1+M_2)\,P_{abs} = B + At - \frac{f_0}{\tilde{\omega}^2}\cos(\tilde{\omega}t)$$

Las condiciones iniciales son $\begin{Bmatrix} P_{abs}(0) \\ \dot{P}_l(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{P}_{abs}(0) \\ P_l(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\dot{P}_{abs} = \left(A + \frac{f_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\tilde{\omega}t\right)\frac{1}{M_1+M_2}$$

$$P_{abs}(0) = B - \frac{f_0}{\tilde{\omega}^2} = 0 \to B = \frac{f_0}{\tilde{\omega}^2}$$

$$\dot{P}_{abs}(0) = A = 0 \to A = 0 \qquad \longrightarrow$$

¡OJO!! →

$$\left[P_{abs} = \frac{f_0}{\bar{\omega}^2} \left[1 - \cos(\bar{\omega} t) \right] \right]$$

- Para P_ℓ: $\quad \xi = 0 \; ; \quad w = w_2 = \sqrt{\dfrac{4k\,(M_1 + M_2)}{M_1 \cdot M_2}}$

$$P_\ell = A \cos w_2 t + B \operatorname{sen} w_2 t + \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (\cancel{2\xi\beta})^2}} \cos(\bar{\omega} t - \varphi)$$

donde $\quad k = 4k \left[1 + \dfrac{2M_1}{M_2} + \dfrac{M_1^2}{M_2^2} \right]$

$$\beta = \frac{\bar{w}}{w_2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\cancel{\xi}\beta}{1-\beta^2} = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

con las c.i. $\quad P_\ell(0) = \dot{P}_\ell(0) = 0$

$$P_\ell(0) = A + \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0 \rightarrow A = -\frac{f_0}{k\sqrt{}}$$

$$\dot{P}_\ell(0) = + B\, w_2 \,\cancel{\cos(0t)} = 0 \rightarrow B = 0$$

OJO

$$\left[P_\ell(t) = \frac{+ f_0}{k_2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{w}}{w_2}\right)^2} \left[\cos(\bar{w} t) - \cos w_2 t \right] \right]$$

Por tanto:

$$\begin{Bmatrix} X_{abs} \\ X_\ell \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -M_1/M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{abs} \\ P_\ell \end{Bmatrix} \rightarrow$$

OJO

$$\rightarrow X_{abs} = P_{abs} + P_\ell$$

$$X_\ell = P_{abs} - \frac{M_1}{M_2} \cdot P_\ell$$

→

$\longrightarrow$

~~$= 2K y_r$~~

$$M_1 \ddot{y}_r + 2K y_r = f_0 \operatorname{sen} \tilde{w} t \rightarrow w_3 = \sqrt{\frac{2K}{M_1}}$$

$$y_r = A \cos w_3 t + B \operatorname{sen} w_3 t + \frac{f_0}{2K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \operatorname{sen}(\tilde{w} t - \cancel{\phi}^{\,0})$$

$$\beta = \frac{\tilde{w}}{w} = \frac{\tilde{w}}{\sqrt{2K/M_1}} \qquad \phi = \operatorname{arctg} \frac{2\cancel{\xi}\beta}{1-\beta^2} = 0$$

Con cond. $y_r(0) = \dot{y}_r(0) = 0$

$$y_r(0) = A = 0 \rightarrow A = 0$$
$$\dot{y}_r(0) = B w_3 + \frac{f_0}{2K}[\sim]\,\tilde{w} = 0 \rightarrow B = -\frac{\tilde{w}}{w_3}\frac{f_0}{2K}[\,--\,]$$

¡OKEY!

$$\left[y_r(t) = \frac{f_0}{2K} \frac{1}{1-\left(\frac{\tilde{w}}{w_3}\right)^2} \left[\operatorname{sen}(\tilde{w} t) - \frac{\tilde{w}}{w_3} \operatorname{sen} w_3 t \right] \right]$$

2) La fuerza transmitida al suelo es:

$$N = M_2 g - 2K y_r =$$

OKEY!!

$$= M_2 g - \frac{f_0}{1-\left(\frac{\tilde{w}}{w_3}\right)^2} \left[\operatorname{sen}(\tilde{w} t) - \frac{\tilde{w}}{w_3} \operatorname{sen} w_3 t \right]$$

3) $$x_l = P_{abs} - \frac{M_1}{M_2} \cdot P_l = \frac{f_0}{\tilde{w}^2}[1 - \cos \tilde{w} t] -$$

$$- \frac{M_1}{M_2} \frac{f_0}{K_2} \frac{1}{1-\left(\frac{\tilde{w}}{w_2}\right)^2} [\cos \tilde{w} t - \cos w_2 t)$$

El desplazamiento máximo de este será:

$$\dot{x}_l(t) = \frac{f_0}{\tilde{w}^2} \tilde{w} \operatorname{sen} \tilde{w} t - \frac{M_1}{M_2} \frac{f_0}{K_2} \frac{1}{1-\left(\frac{\tilde{w}}{w_2}\right)^2} [w_2 \operatorname{sen} w_2 t - \tilde{w} \operatorname{sen} \tilde{w} t]$$

$= 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow$ esto nos da un mínimo

$t = \quad \longrightarrow$ otro valor dará el máximo y luego uso

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA
INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.
3º Ingeniería Industrial. Abril 2005.
Unidad Temática B.
Peso: 25 %.
Ejercicio 2. Tiempo: 60 min.

MAKINEN TEORIA.
Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2005.-eko Apirila.
B Atal Tematikoa.
Pisua: 25 %.
2. Ariketa Iraupena: 60 min.

NOMBRE / IZENA:
APELLIDOS / ABIZENAK:
GRUPO / TALDEA:

El la figura 1 se representa un esquema de un prototipo de carreras montado sobre unas mesas excitadores para una serie de ensayos experimentales en laboratorio. Como primer paso, y para tener un orden de magnitud de los resultados, se define el modelo discreto de dos grados de libertad (y(t) y θ(t)) de la figura 2. El cuerpo del vehículo se modeliza mediante una viga de longitud 2L, de centro de gravedad **G**, masa **M** e inercia **I**$_G$. Para el sistema de suspensión se utiliza un muelle a compresión de constante **k** y un amortiguador de constante de proporcionalidad **c**. Se piden:

1.- El sistema de ecuaciones del movimiento en notación matricial (suponiendo pequeñas deformaciones). (3p)
2.- Las frecuencias naturales del sistema. (2p)
Suponiendo que las mesas excitadoras poseen unas leyes de desplazamiento vertical tal que $z_1(t)=Z_0\cos\varpi t$ y $z_2(t)=Z_0\cos\varpi(t-t_0)$; siendo t_0 el desfase entre ambas mesas, determinar la respuesta estacionaria del sistema para los siguientes casos:
3.- $t_0 = 0$ (2p)
4.- $t_0 = \pi/\varpi$ (2p)
5.- $t_0 = \pi/2\varpi$ (1p)

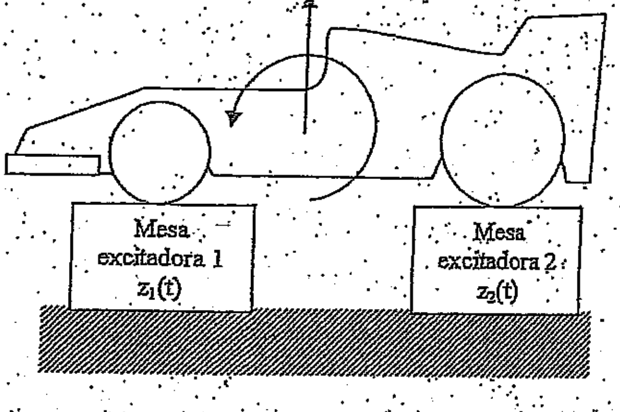


Figura 1. Esquema del sistema.

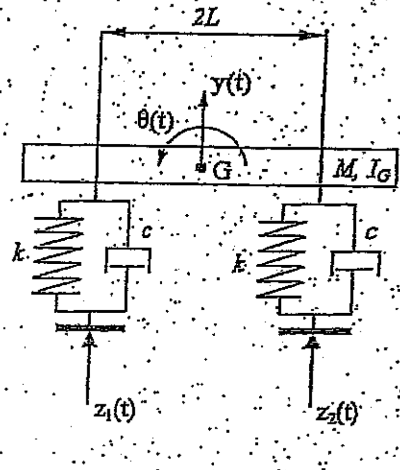
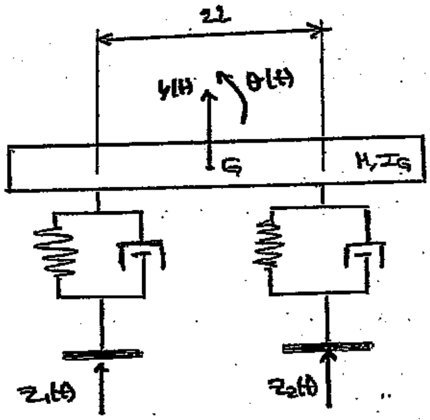
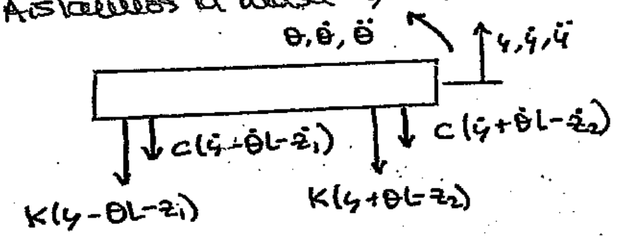


Figura 2. Modelo de 2gdl.

ABRIL 2005



1) Aislamos la masa y realizamos el análisis dinámico para un instante genérico:



$$\Sigma F_y = M a_y \Rightarrow -K(y-\theta L-z_1)-K(y+\theta L-z_2)-c(\dot y-\dot\theta L-\dot z_1)-c(\dot y+\dot\theta L-\dot z_2)=M\ddot y$$

$$\Sigma \hat{M}_G = m\cdot\hat{\alpha} \Rightarrow LK(y-\theta L-z_1)-LK(y+\theta L-z_2)+Lc(\dot y-\dot\theta L-\dot z_1)-Lc(\dot y+\dot\theta L-\dot z_2)=I_G\ddot\theta$$

Reordenando por términos como habitualmente:

$$\boxed{\begin{aligned} &M\ddot y+2c\dot y+2Ky = Kz_1+Kz_2+c\dot z_1+c\dot z_2 \quad (1)\\ &I_G\ddot\theta+2cL^2\dot\theta+2KL^2\theta = -LKz_1+LKz_2-Lc\dot z_1+Lc\dot z_2 \quad (2)\end{aligned}}$$

Escribiéndolas de forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & 0\\ 0 & I_G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot y\\ \ddot\theta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2c & 0\\ 0 & 2cL^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot y\\ \dot\theta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2K & 0\\ 0 & 2KL^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Kz_1+Kz_2+c\dot z_1+c\dot z_2\\ -LKz_1+LKz_2-Lc\dot z_1+Lc\dot z_2\end{Bmatrix}}$$

2) Frecuencias naturales del sistema.

Como las ecuaciones están desacopladas las obtenemos directamente $\left(\omega=\sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}\right)$

$$(1)\longrightarrow \boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{2K}{M}}}$$

$$(2)\longrightarrow \boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{2KL^2}{I_G}}}$$

Suponiendo el desplazamiento vertical de las masas para: $z_1 = Z_0 \cos\bar{\omega} t$ y $z_2 = Z_0 \cos(\bar{\omega}(t - t_0))$, determinar la respuesta estacionaria del sistema para:

3) $t_0 = 0$

Para $t_0 = 0$ $z_1(t) = z_2(t)$ y obtenemos las respuestas basándonos en los modelos correspondientes:

$$\boxed{y(t) = \frac{\cancel{2}KZ_0/\cancel{2}K}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \cos(\bar{\omega}t - \varphi) - \frac{\cancel{2}c\bar{\omega}Z_0/\cancel{2}K}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

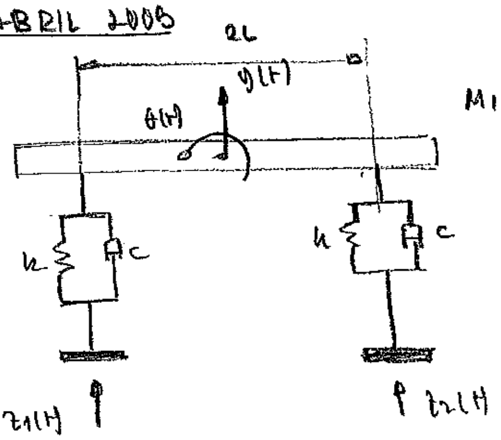
$$\left| \begin{array}{l} z_1(t) = Z_0 \cos\bar{\omega}t \rightarrow \dot{z}_1(t) = -\bar{\omega} Z_0 \sin\bar{\omega}t \\ z_2(t) = Z_0 \cos\bar{\omega}(t - t_0) \rightarrow \dot{z}_2(t) = -\bar{\omega} Z_0 \sin\bar{\omega}(t - t_0) \end{array} \right|$$

$$\bar{c} = 2M\omega_1$$

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}M\sqrt{\frac{2K}{M}}} = \underline{\underline{\frac{c}{\sqrt{2MK}}}}$$

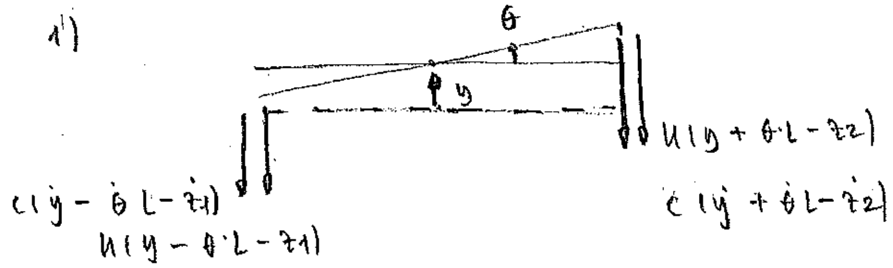
$\boxed{\theta(t) = 0}$ (al ser $z_1 = z_2$ y $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$, se anulan).

EXAMEN ABRIL 2008



M, I_G

1)



$$\Sigma F_y \longrightarrow -k(y - \cancel{\theta L} - z_1) - k(y + \cancel{\theta L} - z_2) - c(\dot{y} - \cancel{\dot{\theta} L} - \dot{z}_1) - c(\dot{y} + \cancel{\dot{\theta} L} + \dot{z}_2) =$$
$$= M\ddot{y}$$

$$\Sigma M_G \longrightarrow c(\cancel{\dot{y}} - \dot{\theta}L - \dot{z}_1)\cdot L + k(\cancel{y} - \theta\cdot L - z_1)\cdot L - c(\cancel{\dot{y}} + \dot{\theta}L - \dot{z}_2)L - k(\cancel{y} + \theta\cdot L - z_2)\cdot L =$$
$$= I_G \cdot \ddot{\theta}$$

Reordenando:

$$M\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = k(z_1 + z_2) + c(\dot{z}_1 + \dot{z}_2)$$
$$I_G\ddot{\theta} + 2cL^2\dot{\theta} + 2kL^2\theta = kL(z_2 - z_1) + cL(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$$

Matricialmente:

$$\checkmark \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 2cL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2kL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} k(z_1 + z_2) + c(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \\ kL(z_2 - z_1) + cL(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \end{vmatrix}$$

2) Para las frecuencias naturales vemos que las ec. están desacopladas:

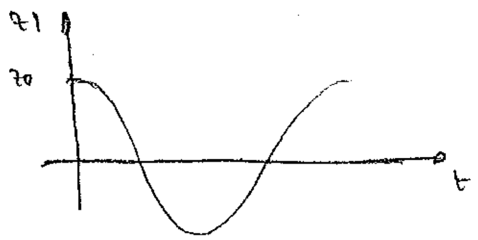
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2kL^2}{I_G}} \quad \checkmark$$

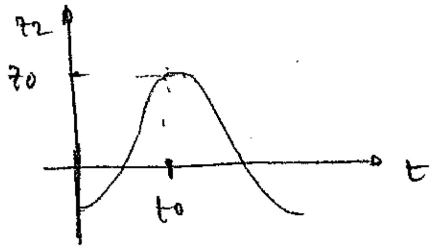
3) $\dot{z}_1(t) = -z_0 \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} t) \qquad \dot{z}_2(t) = -z_0 \tilde{\omega} \operatorname{sen}(\tilde{\omega}(t-t_0))$

$z_1(t) = z_0 \cos(\tilde{\omega} t) \quad ; \quad z_2(t) = z_0 \cos \tilde{\omega}(t - t_0)$

$$M\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = k(z_1+z_2) + c(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) =$$

$$I_0 \ddot{\theta} + 2cL^2\dot{\theta} + 2kL^2\theta = kL(z_1 - z_2) + cL(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) =$$





a) si $t_0 = 0$

16

$$y(t) = k \frac{2z_0}{2k\sqrt{\left(1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\varepsilon_1 \frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \cos(\overline{\omega} t - \varphi_1) +$$

$$+ c \frac{-2z_0\tilde{\omega}}{2k\sqrt{\left(1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\varepsilon_1 \frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \operatorname{sen}(\overline{\omega} t - \varphi_1)$$

donde $\varepsilon_1 = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}M\omega_1}$; $\varphi_1 = \arctg \frac{2\varepsilon_1 \overline{\omega}/\omega_1}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2}$

$\theta(t) = 0$

b) si $t_0 = \pi/\tilde{\omega}$

$$y(t) = \frac{k \cdot z_0}{2k\sqrt{\left(1-\left(\overline{\omega}/\omega_1\right)^2\right)^2 + \left(2\varepsilon_1 \overline{\omega}/\omega_1\right)^2}} \left[\cos(\tilde{\omega} t - \varphi_1) + \cos(\tilde{\omega}(t - \pi/\tilde{\omega}) - \varphi_1)\right]$$

$$- \frac{c z_0 \tilde{\omega}}{2k\sqrt{(1-\beta_1)^2 + (2\varepsilon_1\beta_1)^2}} \left[\operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \varphi_1) + \operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \pi/\tilde{\omega}) + \varphi_1)\right]$$

$$\theta(t) = \frac{kL \cdot z_0}{2kL^2\sqrt{(1-\beta_2)^2 + (2\varepsilon_2\beta_2)^2}} \left[\cos(\tilde{\omega} t - \varphi_2) - \cos(\tilde{\omega}(t - \pi/\tilde{\omega}) - \varphi_2)\right] -$$

$$- \frac{cL z_0 \tilde{\omega}}{2kL^2\sqrt{(1-\beta_2)^2 + (2\varepsilon_2\beta_2)^2}} \left[\operatorname{sen}(\tilde{\omega} t - \varphi_2) - \operatorname{sen}(\tilde{\omega}(t - \pi/\tilde{\omega}) - \varphi_2\right]$$

$\longrightarrow$ donde $\quad \varepsilon_2 = \dfrac{\cancel{2} c L^2}{\cancel{2} J_g w_2} \qquad \beta_2 = \dfrac{\tilde{w}}{w_2} \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{2 \varepsilon_2 \, \bar{w}/w_2}{1 - (\bar{w}/w_2)^2}$

c) si $t_0 = \pi/2w$

$$y(t) = \frac{z_0}{2k\sqrt{(1-\beta_1^2)^2 + (2\varepsilon_1\beta_1)^2}} \Big\{ k\left[\cos(\tilde{w}t - \varphi_1) + \cos\left(\tilde{w}(t - \pi/2\tilde{w}) - \varphi_1\right)\right] - c\tilde{w}\left[\operatorname{sen}(\tilde{w}t - \varphi_1) + \operatorname{sen}\left(\tilde{w}(t - 2\pi/\tilde{w})\right) - \varphi_1\right] \Big\}$$

$$\theta(t) = \frac{z_0 L}{2kl^2\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon_2\beta_2)^2}} \Big[k\left[\cos(\tilde{w}t - \varphi_2) - \cos\left(\tilde{w}(t - 2\pi/\tilde{w}) - \varphi_2\right)\right] - c\tilde{w}\left[\operatorname{sen}(\tilde{w}t - \varphi_2) - \operatorname{sen}(\tilde{w}(t - 2\pi/\tilde{w}) - \varphi_2)\right] \Big]$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

3° Ingeniería Industrial. Enero 2008.
Peso sobre la Unidad Temática: 15 %.
Ejercicio. 3 Tiempo: 45 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

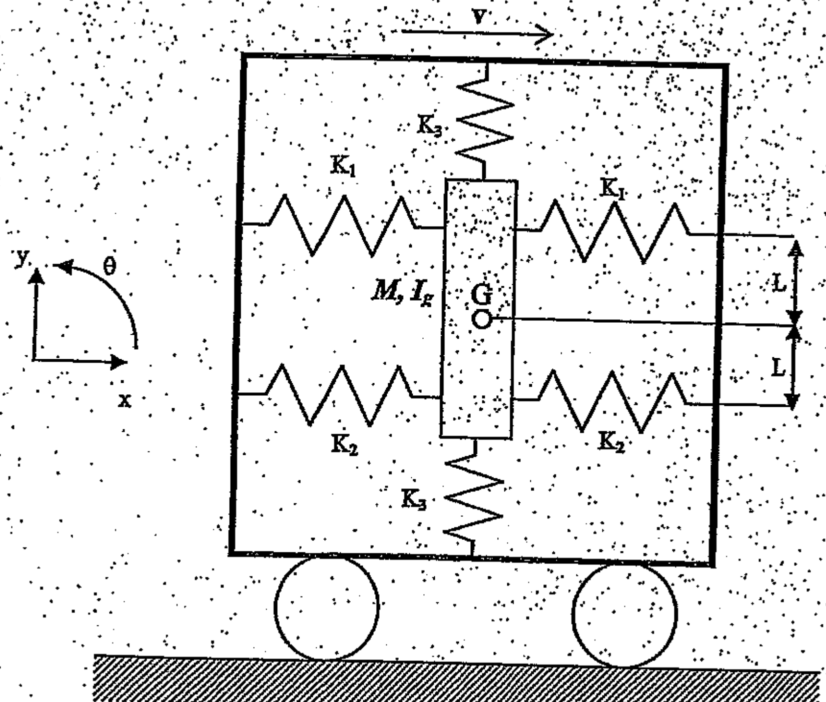
MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industrialeko 3. kurtsoa. 2008.-eko Urtarrila.
Atal Tematikoaren Pisua: 15 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 45 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

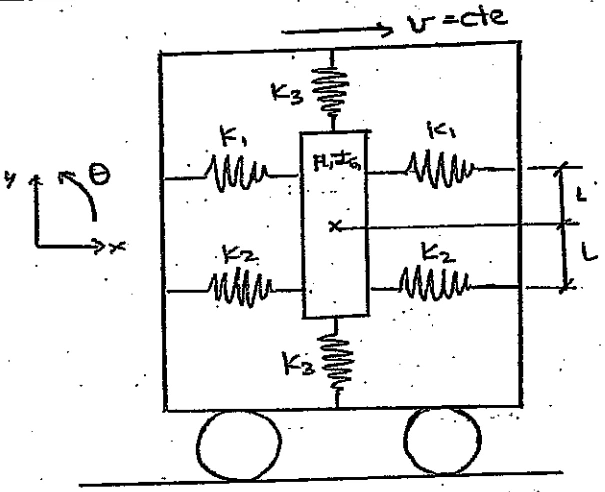
NO LO HE HECHO pero es lo de siempre, es decir el container no tiene aceleración

El sistema de la figura representa un sistema para el ensayo de componentes frente a choques. Dicho sistema viene formado por un container indeformable que se desplaza con velocidad constante **v**. El componente a ensayar, situado en el container, está montado sobre apoyos flexible tal como se muestra en la figura. En este caso el componente se modeliza a través de una viga de masa **M**, inercia I_g, longitud **2L**, y centro de gravedad **G**. Suponiendo pequeñas deformaciones y despreciándose el efecto del peso propio. Se piden:

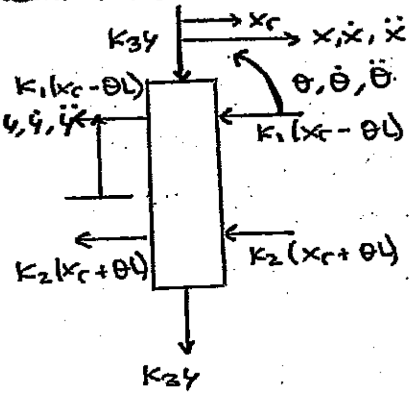
1.- Las ecuaciones que definen el movimiento de la viga (x,y,φ). (3p)
Tomando $K_1=K_2=K$ y $K_3=2K$.
2.- hallar las frecuencias naturales del sistema. (2p)
3.- Los modos naturales del sistema. (2p)
4.- La respuesta del sistema si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a tener velocidad nula. (3p)



ENERO 2008



Realizaremos el estudio dinámico de la masa para un instante genérico.



(v=cte)

$$x \equiv -2k_1(x_r-\theta L)-2k_2(x_r+\theta L) = M(\ddot{x}_r + \cancel{\ddot{x}_{con}})$$

relativa de la masa respecto del contenedor.

$$y \equiv -2k_3 y = M\ddot{y}$$

$$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_G} = I_G \overset{\curvearrowleft}{\alpha} \Rightarrow 2k_1 L(x_r-\theta L) - 2k_2 L(x_r+\theta L) = I_G \cdot \ddot{\theta}$$

Reordenando las ecuaciones:

1)
$$\boxed{\begin{aligned} &M\ddot{x}_r + 2(k_1+k_2)x_r - 2L(k_1-k_2)\theta = 0 && (1)\\ &M\ddot{y} + 2k_3 y = 0 && (2)\\ &I_G\ddot{\theta} + 2L^2(k_1+k_2)\theta = 0 && (3)\end{aligned}}$$

(tomando coordenadas relativas o absolutas, la solución a la que llegamos será la misma)

Tomando $k_1 = k_2 = k$ y $k_3 = 2k$:

2) Frecuencias naturales del sistema: las condiciones que nos han dado, nos sustituyendo en las ecuaciones del movimiento las condiciones que nos han dado, nos quedan:

$$M\ddot{x}_r + 4kx_r = 0 \quad (1)$$

$$M\ddot{y} + 4ky = 0 \quad (2)$$

$$I_G\ddot{\theta} + 4kL^2\theta = 0 \quad (3)$$

como están desacoplados, obtenemos directamente

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{4k/M}\\ \omega_2 &= \sqrt{4k/M}\\ \omega_3 &= \sqrt{4kL^2/I_G}\end{aligned}}$$

3) Modos naturales del sistema

Como las ecuaciones están desacoplados y son independientes, los modos naturales del sistema sabemos directamente que serán:

$$\boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} \quad \{X^2\} = \begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} \quad \{X^3\} = \begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}}$$

4) Respuesta del sistema si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a tener velocidad nula.

El movimiento vibratorio se deberá a las condiciones iniciales debidas al choque, por lo que solo existirá respuesta transitoria.

Estableciendo $t=0$ en el instante del choque, las condiciones iniciales serán:

$$\left\{\begin{array}{l|l} x_{r_0}=x_0=0 & \dot{x}_{r_0}=\dot{x}_0=v \\ y_0=0 & \dot{y}_0=0 \\ \theta_0=0 & \dot{\theta}_0=0 \end{array}\right\}$$

Como en "y" y "θ" no existen condiciones iniciales, el sistema no se moverá en esas dos coordenadas, luego: (ya que no hay ninguna causa-fuerza que provoque el movimiento).

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t)=0 \\ \theta(t)=0 \end{array}}$$

Para obtener la respuesta $x(t)$ vamos al modelo de movimiento vibratorio libre sin amortiguamiento:

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_1 A\sin\omega_1 t + B\omega_1\cos\omega_1 t$$

$$\dot{x}_0 = v \Rightarrow B = \frac{v}{\omega_1}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v}{\omega_1}\sin\omega_1 t}$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

INGENIARITZA MEKANIKOA SAILA
INGENIARIEN GOI ESKOLA

TEORÍA DE MÁQUINAS.

Ingeniería Industrial. 3er curso. Septiembre 2002.
Unidad temática: B.
Teoría.
Peso: 60 %. Tiempo: 50 min.

MAKINEN TEORIA.

Ingeniaritza industriala. 3. kurtsoa. Iraila 2002.
Atal Tematikoa: B.
Teoria.
Pisua: %60. Iraupena: 50 min.

GRUPO / TALDEA:
NOMBRE / IZENA: OHEZ DODA
APELLIDOS / ABIZENAK:

---

1. Etapas en el análisis teórico de sistemas mecánicos sometidos a acciones dinámicas. Breve descripción de las mismas.
2. Sea el tren de engranajes ordinario simple de la Figura 1, constituido por dos piñones y una cremallera, donde:
   R_1, R_2 : radios primitivos de los piñones
   J_1, J_2 : momentos de inercia de los piñones respecto de O_1 y O_2 respectivamente
   m: masa de la cremallera
   Obtener la inercia equivalente reducida al punto O_1.
3. Representar aproximadamente en un gráfico x(t) las vibraciones libres de un sistema de 1 gdl para los casos de amortiguamiento subcrítico, crítico y supercrítico, así como el caso sin amortiguamiento. Realizar una representación superpuesta de los cuatro casos, señalando claramente cada uno.
4. Representar aproximadamente en un gráfico el factor de amplificación dinámica D frente a la relación β para distintos valores del amortiguamiento relativo ξ. Idem para el desfase angular φ.
5. Sea un sistema discreto de 1gdl sin amortiguamiento. Se le somete a la ley de fuerzas de la Figura 2. Partiendo del reposo, calcular la respuesta en $t > a$.
6. Indicar el procedimiento de medida del amortiguamiento relativo mediante el método de la anchura de banda.
7. Propiedades de los modos de vibración: enunciado y demostración.
8. Explicar los conceptos de masa, amortiguamiento y rigidez modal. Indicar como se obtienen.

sistema de 1 g.d.l

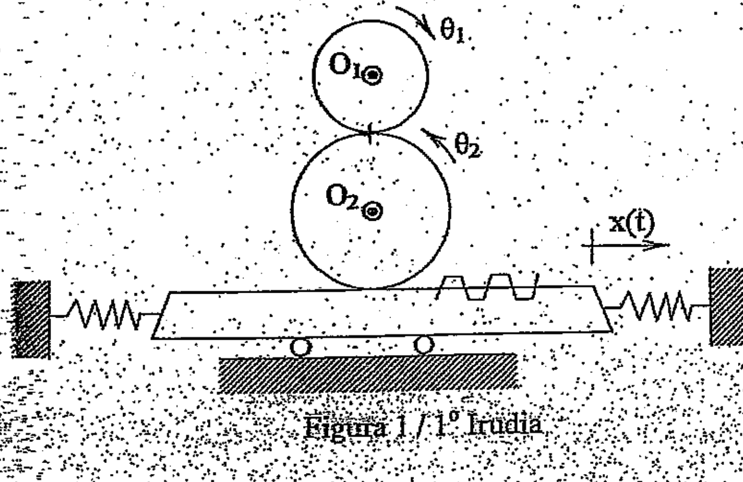


Figura 1 / 1º Irudia

1. Sistema mekanikoen analisi teorikoa, akzio dinamikoen aurrean. Etapak eta euren deskribapen laburra.
2. Izan bedi 1^{go} irudiko engranaje tren arrunt sinplea, bi pinoi eta kremailera batek osatuta, non:
   R_1, R_2 : Pinoien erradio primitiboak
   J_1, J_2 : pinoien inertzi momentuak O_1 eta O_2–rekiko hurrenez hurren
   m: Kremaileraren masa
3. Irudikatu x(t) grafiko batean, askatasun gradu bakarreko sistema baten bibrazio askeak, motelgarritasun azpikritiko, kritiko eta superkritikoarekin, hala nola motelgarritasunik gabeko kasuarekin. Laurak batera irudikatu, bakoitza argi argi bereiztuz.
4. Irudikatu gutxi gora behera D anplifikazio dinamikoaren kurba, β parametroaren arabera, ξ motelgarritasun erlatiboaren balio desberdinen arabera. Gauza berdina egin φ desfase angeluarrarentzako.
5. Izan bedi motelgarritasunik gabeko askatasun gradu bakarreko sistema diskretu bat. Kalkulatu haren erantzuna $t>a$ tartean, 2. irudiko indarra aplikatzen zaionean.
6. Motelgarritasun erlatiboaren neurketa, banda zabaleraren metodoaren bidez. Azaldu metodoaren funtsa eta garatu.
7. Bibrazio moduen propietateak: enuntziatua eta frogapena.
8. Azaldu hurrengo kontzeptuak: masa modala, motelgarritasun modala eta zurruntasun modala. Azaldu ere nola lortzen diren.

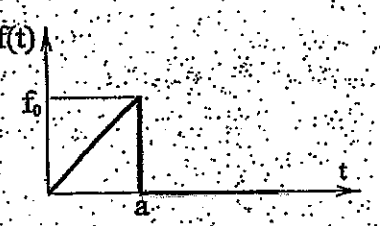


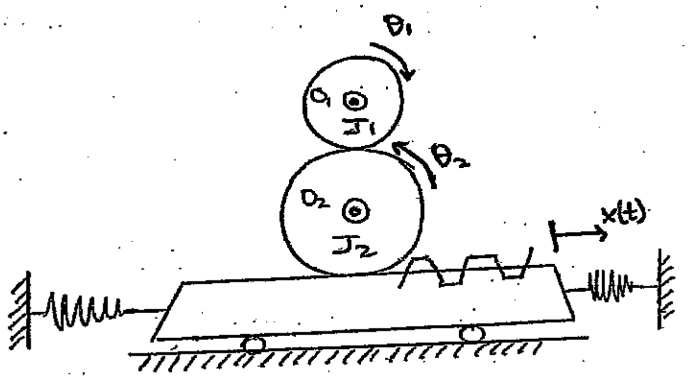
Figura 2 / 2. Irudia

Nota: respuesta a la función rampa de pendiente I con condiciones iniciales nulas: $x(t)=\frac{I}{k}\left(t-\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)$

Oharra: I maldadun malda motako funtzioaren erantzuna, hasierako baldintza nuluekin: $x(t)=\frac{I}{k}\left(t-\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}\right)$

[illegible]

SEPT. 2002



La inercia reducida a un elemento es la energía cinética que ese elemento debería tener para que su energía cinética fuese igual a la de todo el conjunto.

2) 

$$\frac{I_1^* \dot{\theta}_1^2}{\cancel{2}} = \frac{J_1 \dot{\theta}_1^2}{\cancel{2}} + \frac{J_2 \dot{\theta}_2^2}{\cancel{2}} + \frac{M \dot{x}^2}{\cancel{2}}$$

Para resolverlo deberemos buscar la relación entre $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ y $\dot{x}$, para lo que buscaremos la relación entre θ_1, θ_2 y x (o en este caso, directamente las velocidades).

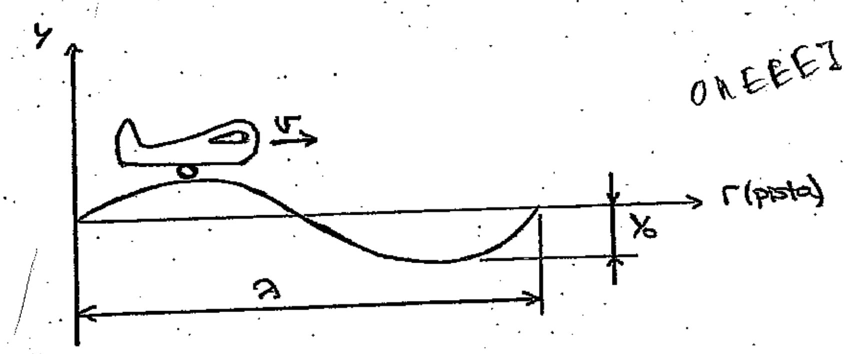
$$\dot{\theta}_1 R_1 = \dot{\theta}_2 R_2 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot{\theta}_1$$

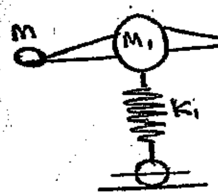
$$\dot{\theta}_2 R_2 = \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{R_1}{\cancel{R_2}}\dot{\theta}_1 \cdot \cancel{R_2} \Rightarrow \dot{x} = R_1 \dot{\theta}_1$$

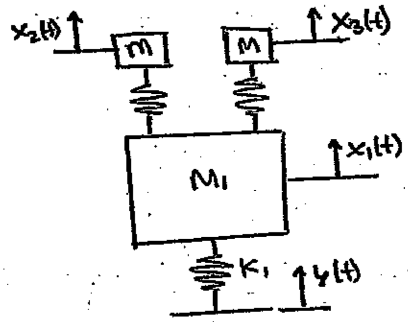
$$\Rightarrow I_1^* \cancel{\dot{\theta}_1^2} = J_1 \cancel{\dot{\theta}_1^2} + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2}\cancel{\dot{\theta}_1^2} + M R_1^2 \cancel{\dot{\theta}_1^2} \Rightarrow \boxed{I_1^* = J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 + M R_1^2}$$

· Duda → si en vez de por la igualdad de Ec lo hiciéramos hallando las ecuaciones del sistema y del sistema reducido y comparándolas. Al estar estas igualadas a cero como sabríamos cuál es el valor de los términos si la ec puede ser multiplicada por cualq cte?

EJERCICIO 16 - LIBRO CLASE







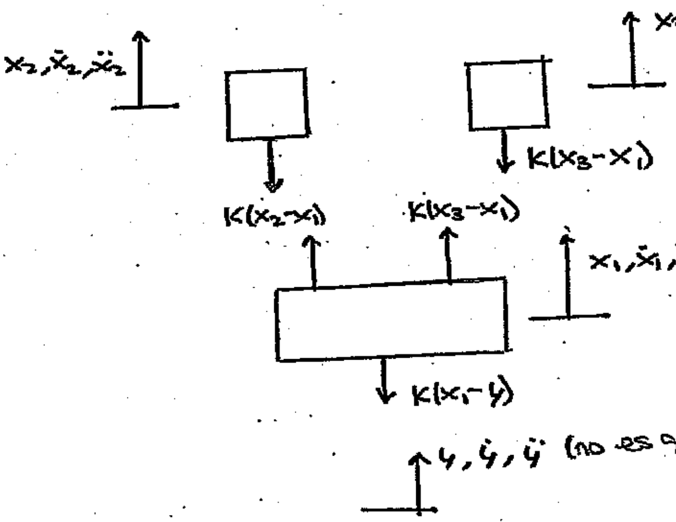
$k_1 = 1\ N/m \qquad k = \frac{1}{8}\ N/m$

$M_1 = 6\ kg \qquad M = 1\ kg$

$v = 180\ km/h\ ;\ \lambda = 100\pi\ m$

$Y_0 = 10\ cm$

1) Para calcular la respuesta estacionaria tomaremos el modelo más simplificado y realizaremos el estudio dinámico de las masas para un instante genérico.



r expresamos en ángulo la distancia r. (de forma que cuando $r = \lambda$ se han hecho 2π rad → un ciclo).

$$y = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$r = vt$$

Aplicando las ecuaciones de la dinámica:

$$v = 180\ \frac{km}{h} = \frac{180000\ m}{3600\ s} = 50\ m/s$$

$$k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_1) - k(x_1 - y) = M_1 \ddot{x}_1$$

$$-k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2$$

$$-k(x_3 - x_1) = m\ddot{x}_3$$

Reordenando las ecuaciones y sustituyendo los valores que nos dan:

$$\begin{cases} 6\ddot{x}_1 + \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3 = 0{,}1\sin t & (1) \\ \ddot{x}_2 - \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 = 0 & (2) \\ \ddot{x}_3 - \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Como vemos, los tres ecuaciones están acoplados. Como nos piden la respuesta estacionaria recurrimos al método general que reúne al cambio de variables, etc.:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias naturales:

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - 6\omega^2 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{4} - 6\omega^2\right)\left(\frac{1}{8} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8} - \omega^2\right) - \left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8} - \omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8} - \omega^2\right)\left[\left(\frac{5}{4} - 6\omega^2\right)\left(\frac{1}{8} - \omega^2\right) - 2\left(\frac{1}{8}\right)^2\right] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{8}}}} \\ 6\omega^4 - 2\omega^2 + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_2^2 = \dfrac{2 + \sqrt{4-3}}{12} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_2 = \frac{1}{2}}} \\ \omega_3^2 = \dfrac{2 - \sqrt{4-3}}{12} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{12}}}} \end{array} \right.$$

A continuación obtendremos los modos:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} - 6\omega^2 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ (sólo dos ecuaciones serán independientes)

- $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{1}{8} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\frac{5}{8} - \frac{6}{8}\right) X_1^1 - \frac{1}{8} X_2^1 - \frac{1}{8} X_3^1 = 0 \\ -\frac{1}{8} X_1^1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{X^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

- $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{5}{4} - \frac{6}{4}\right) X_1^2 - \frac{1}{8} X_2^2 - \frac{1}{8} X_3^2 = 0 \Rightarrow 2X_1^2 - X_1^2 + X_3^2 = 0 \Rightarrow X_1^2 = -X_3^2$

  $-\frac{1}{8} X_1^2 - \frac{1}{8} X_2^2 = 0 \rightarrow X_1^2 = -X_2^2$

  $\Rightarrow \{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

- $\omega^2 = \omega_3^2 = \frac{1}{12} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{6}{8} X_1^3 - \frac{1}{8} X_2^3 - \frac{1}{8} X_3^3 = 0 \rightarrow X_3^3 = 3X_1^3 \\ -\frac{3}{24} X_1^3 + \frac{1}{24} X_2^3 = 0 \rightarrow X_2^3 = 3X_1^3 \end{array}\right\} \quad \{X^3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$

Realizando el cambio a variables modales y premultiplicando todos los términos por la inversa a la matriz de modos, la ecuación matricial nos quedará:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}1\sin t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}1\sin t \\ 0{,}1\sin t \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{y}_1 + \frac{1}{4}y_1 = 0 \\ 8\ddot{y}_2 + 2y_2 = 0{,}1\sin t \\ 24\ddot{y}_3 + 2y_3 = 0{,}1\sin t \end{cases}$$

Como nos piden la respuesta estacionaria, es decir, la debida a las acciones exteriores, obtenemos las siguientes soluciones:

$$y_1(t) = 0$$

$$y_2(t) = \frac{0{,}1/2}{1-\left(\frac{1}{1/2}\right)^2}\sin t = -\frac{0{,}1}{6}\sin t \quad \text{(respuesta a fuerza exterior harmónica)}$$

$$y_3(t) = \frac{0{,}1/2}{1-\frac{1}{1/12}}\sin t = -\frac{0{,}1}{22}\sin t$$

Para obtener la respuesta en coordenadas reales, volveremos a realizar el cambio de variable:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{0{,}1}{6}\sin t \\ -\frac{0{,}1}{22}\sin t \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1(t) = -0{,}1\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{22}\right)\sin t} \\ \boxed{x_2(t) = 0{,}1\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{22}\right)\sin t = x_3(t)} \end{cases}$$

2) ¿Qué hubiese ocurrido si $\lambda = 200\,D$?

$\bar{\omega} = \frac{1}{2}$, luego $\omega_2 = \bar{\omega} \rightarrow$ Entraría en RESONANCIA.

La resp estática para un sist con amortig. armónica es:

$$X_{est}(t) = \frac{f_0}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)}}\,e^{i(\omega t - \varphi)}$$

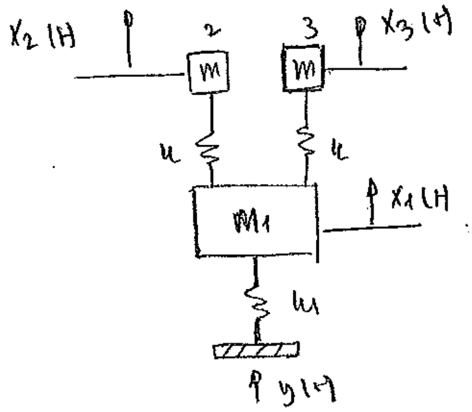
Si el sistema no tiene amort: ($\xi = 0 \quad \varphi = 0$)

$$X_{est}(t) = \underbrace{\frac{f_0}{k}}_{X_{est}}\;\underbrace{\frac{1}{1-\beta^2}}_{D}\;e^{i\omega t}$$

Para este caso en que $c = 0$ si hay res, es decir, $\beta = 1 \rightarrow D = \infty \rightarrow$ carga

EJERCICIO 16 LIBRO

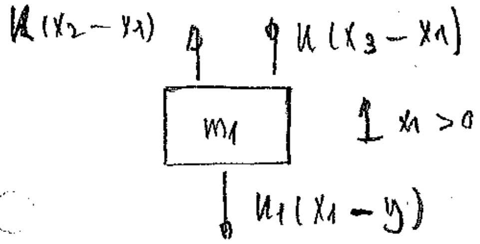
vel media aterrizaje = t



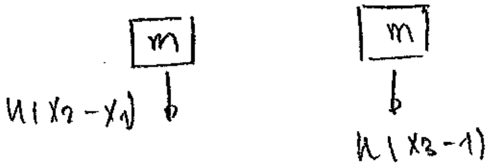
$y(t) = y_0 \operatorname{sen}(\hat{\omega} t) = y_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot v}{\lambda} t\right)$

$T = \frac{\lambda}{v} \rightarrow \hat{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot v}{\lambda}$

suponemos $x_1 > y$; $x_2 > x_1$; $x_3 > x_1$



$k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_1) - k_1(x_1 - y) = m_1 \ddot{x}_1$



$-k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2$

$-k(x_3 - x_1) = m\ddot{x}_3$

COOD ABSOLUTAS

También se puede puede dar en coordenadas relativas:

$k x_{rel\,2,1} + k x_{rel\,3,1} - k x_{rel\,1,y} = m_1(\ddot{x}_{rel\,1,y} + \ddot{y})$

$-k x_{rel\,2,1} = m(\ddot{x}_{rel\,2,1} + \ddot{x}_{rel\,1,y} + \ddot{y})$

$-k x_{rel\,3,1} = m(\ddot{x}_{rel\,3,1} + \ddot{x}_{rel\,1,y} + \ddot{y})$

- En el primer caso:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 - kx_3 &= ky \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_3 - kx_1 + kx_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k & -k \\ -k & k & 0 \\ -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ky \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

→

→ En el segundo caso:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_{rel\,1,y} + k\, x_{rel\,1,y} - k\, x_{rel\,2,1} - k\, x_{rel\,3,1} = -m_1 \ddot{y}$$

$$m \cdot \ddot{x}_{rel\,1,y} + m\, \ddot{x}_{rel\,2,1} + k\, x_{rel\,2,1} = -m \ddot{y}$$

$$m\, \ddot{x}_{rel\,1,y} + m\, \ddot{x}_{rel\,3,1} + k\, x_{rel\,3,1} = -m \ddot{y}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m & m & 0 \\ m & 0 & m \end{bmatrix}}_{\text{no es simétrica} \to \text{así no lo podemos hacer}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{rel\,1,y} \\ \ddot{x}_{rel\,2,1} \\ \ddot{x}_{rel\,3,1} \end{Bmatrix} + \dots$$

Resolvemos entonces por el 1er caso.

Calc las frec nat y los modos de vibrac

$$\begin{vmatrix} 3k - m_1\omega^2 & -k & -k \\ -k & k - m\omega^2 & 0 \\ -k & 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (3k - m_1\omega^2)\cdot(k - m\omega^2)^2 \overbrace{- k^2 (k - m\omega^2) - k^2 (k - m\omega^2)}^{-2k^2(k - m\omega^2)}$$

$$= (k - m\omega^2)\left[(3k - m_1\omega^2)(k - m\omega^2) - 2k^2\right] = 0$$

$$\longrightarrow \omega_1 = +\sqrt{k/m} = \sqrt{1/6}$$

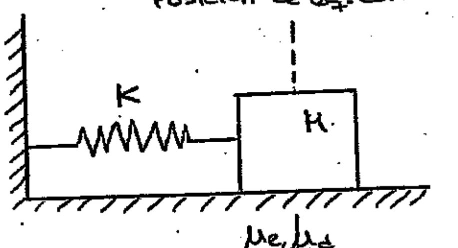
$$\omega_2 = 1/2 \;;\; \omega_3 = \sqrt{1/12}$$

copiando un poco de los del para no operar + de la cuenta

Lo dejo aquí porque es el típico problema fácil

Ej. 5 - LIBRO CLASE

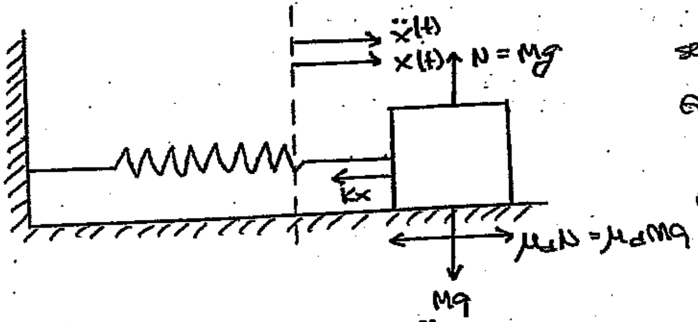
Posición de eq. estable



$t=0 \left| \begin{array}{l} x_0 = 6{,}5\,cm \\ \dot{x}_0 = 0\,m/s \end{array} \right.$

$\dfrac{\mu_e N}{K} = \dfrac{\mu_d N}{K} = 1\,cm$

$\omega = \Omega\ rad/s$

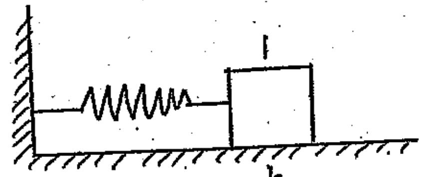


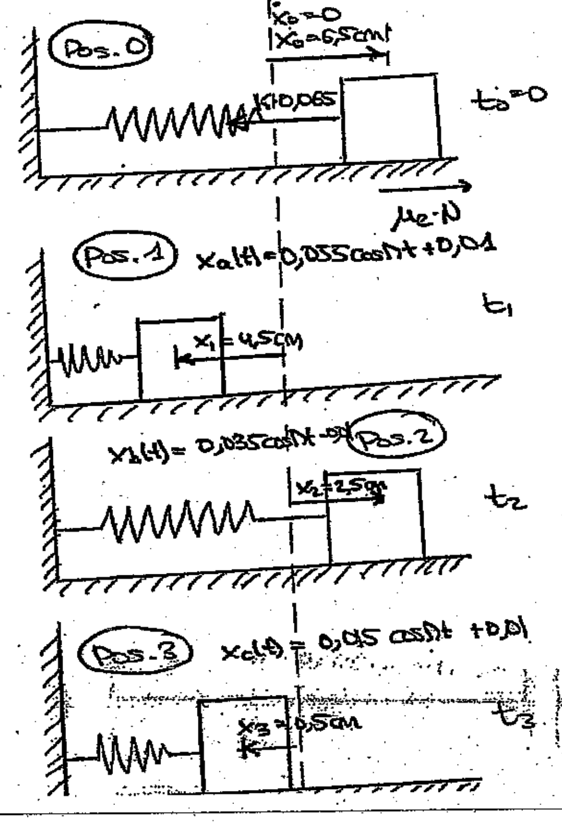
Cuando aparece rozamiento, la ec. dif. será no lineal, ya que el sentido de dicha fuerza es contraria a la velocidad (no definida).

Para definir la ecuación debemos ir intervalo a intervalo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}>0 \rightarrow -Kx - \mu_d Mg = M\ddot{x} \\ \boxed{M\ddot{x} + Kx = -\mu_d Mg} \\ \dot{x}<0 \rightarrow -Kx + \mu_d Mg = M\ddot{x} \\ \boxed{M\ddot{x} + Kx = \mu_d Mg} \end{array} \right.$$

Como nos piden la resolución completa, debemos obtener la respuesta transitoria y la respuesta estacionaria.





el movimiento se iniciará cuando $K\cdot 0{,}065 > \mu_e N$

Eso será lo primero que comprobaremos:

$t=0 \rightarrow K\cdot 0{,}065 \overset{?}{>} \mu_e N \therefore$ SE MUEVE

$\mu_e \cdot N = K\cdot 0{,}01$ (datos del problema)

$K\cdot 0{,}065 > K\cdot 0{,}01$ ✓ → SE MUEVE

$t_0<t<t_1$: $M\ddot{x} + Kx = \mu_d N$ ← acción exterior estática.

$$x_a(t) = \underbrace{A\cos\omega t + B\sin\omega t}_{x_h(t)} + \underbrace{\frac{\mu_d N}{K}}_{x_p(t)}$$

Para obtener A y B sustituimos las cond. iniciales

$0{,}065 = A + 0{,}01 \Rightarrow \underline{A = 0{,}055}$

$\dot{x}_a(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$0 = B\omega \Rightarrow \underline{B=0}$

$$\boxed{x_a(t) = 0{,}055\cos\Omega t + 0{,}01}$$

Las condiciones finales de esa primera etapa serán las condiciones iniciales de la segunda etapa. Dichas condiciones serán:

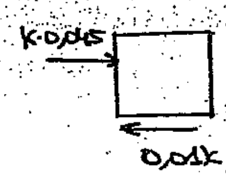
$$\dot{x}_a(t) = -0{,}055\pi \sin \pi t$$

La condición límite de paso de una etapa a otra será: $\dot{x}_1(t_1)=0$

$$\dot{x}_a(t_1) = -0{,}055\pi \sin \pi t_1 = 0 \Rightarrow \underline{t_1 = 1s}$$

$$x_a(t_1) = 0{,}055 \cdot \cos \pi + 0{,}01 = \underline{\underline{-0{,}045\,m}} = x_1$$

En esa posición analicemos si se moverá hacia la derecha:



$$0{,}045K > 0{,}01k \rightarrow \text{SE } \overrightarrow{\text{MUEVE}}$$

($t_1<t<t_2$) (Intervalo "b"): $m\ddot{x}+kx = -\mu_d N = -0{,}01k$

$$x_b(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t - \frac{0{,}01k}{k} \qquad \begin{cases} t=t_1 \Rightarrow x_1 = -0{,}045m & (t_1=1s) \\ t=t_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$$-0{,}045 = -C - 0{,}01 \Rightarrow \underline{\underline{C = 0{,}035}}$$

$$\dot{x}_b(t) = -C\omega \sin\omega t + D\omega\cos\omega t$$

$$\dot{x}(t_1) = 0 = D\omega \Rightarrow \underline{\underline{D=0}}$$

Por tanto, $\boxed{x_b(t) = 0{,}035\cos\pi t - 0{,}01}$

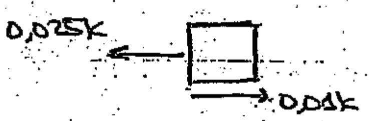
Como esa posición 2 será la posición inicial del intervalo "c" si existiera, determinaremos ~~como esa posición 2 será la posición inicial del intervalo "c" se existiera, determinare la condición de paso de uno a otro es $\dot{x}_b(t_2)=0$~~

sus condiciones, sabiendo que la condición de paso de uno a otro es

$$\dot{x}_b(t_2) = -0{,}035\omega\sin\omega t = 0 \Rightarrow \sin\pi t = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = 2s}}$$ (el siguiente valor que anula el seno)

$$x_b(t_2) = 0{,}035\cos 2\pi - 0{,}01 = \underline{\underline{0{,}025}} = x_2$$

Analicemos si se moverá hacia la izquierda:



$$0{,}025K > 0{,}01k \rightarrow \text{SE } \overleftarrow{\text{MUEVE}}$$

($t_2<t<t_3$) (Intervalo "c"): $m\ddot{x}+kx = \mu_d N = 0{,}01k$

$$x_c(t) = E\cos\omega t + F\sin\omega t + 0{,}01 \qquad t_2 = 2s \begin{cases} x_2 = 0{,}025 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$0{,}025 = E + 0{,}01 \Rightarrow \underline{\underline{E = 0{,}015}}$$

$$\dot{x}_c(t) = -E\omega\sin\omega t + F\omega\cos\omega t$$

$$\dot{x}_c(t_2) = -F\omega = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F=0}}$$

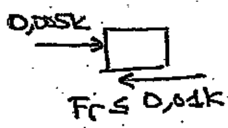
$$\boxed{x_c(t) = 0{,}01\cos\pi t + 0{,}01}$$

Por si se desea un cuarto intervalo "d", determinamos las condiciones iniciales del intervalo "d", que serán las finales del intervalo "c", en $t=t_3$:

Sabiendo que la condición de paso de uno a otro es $\dot{x}_c(t_3)=0 \Rightarrow \sin \Omega t=0 \Rightarrow \underline{t_3=3s}$

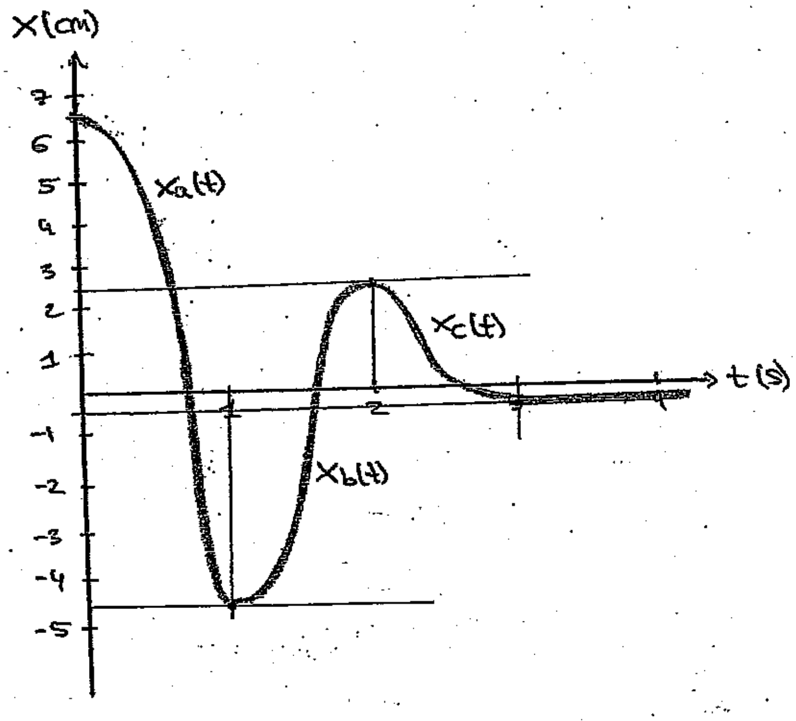
$$\underline{x_3} = x_c(t_3) = \underline{-0{,}005\ m}$$

Estudiamos ahora si una vez llegado a la posición 3 se moverá de nuevo hacia la derecha:



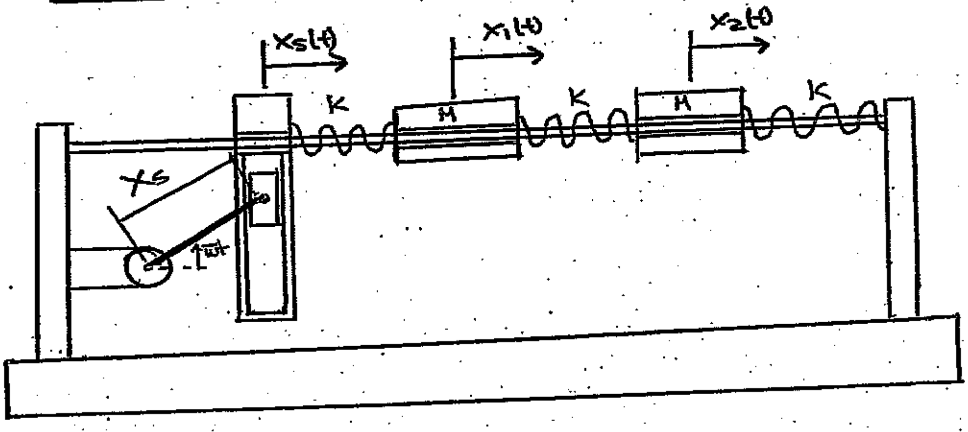
Como $F_k \not> \mu_e N \Rightarrow$ NO HAY MOVIMIENTO.

Para terminar, expresamos la posición de la masa a lo largo del movimiento en función del tiempo:

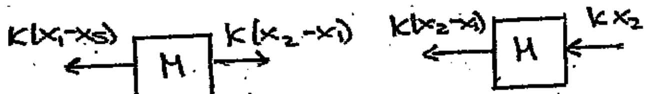


La ecuación diferencial se cumple mientras tenga velocidad y la solución es la que corresponde. Eso se cumplirá hasta que una velocidad sea nula, y a partir de entonces habrá que analizar si se dará una nueva etapa, etc.

Ej. 17 - LIBRO CLASE



$x_s(t) = X_s \cos \bar{\omega} t$
teniendo en cuenta donde empieza y donde se anula.



$K(x_2-x_1) - K(x_1-x_s) = M\ddot{x}_1$

$M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = Kx_s$

$-Kx_2 - K(x_2-x_1) = M\ddot{x}_2$

$M\ddot{x}_2 - Kx_1 + 2Kx_2 = 0$

Por lo tanto
$$\boxed{\begin{aligned} &M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = KX_s \cos\bar{\omega}t \quad (1)\\ &M\ddot{x}_2 - Kx_1 + 2Kx_2 = 0 \quad (2)\end{aligned}}$$

Como para resolver lo que nos piden recurriremos al método general de cambio de variable, expresamos las ecuaciones del mov. de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} KX_s \cos\bar{\omega}t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias naturales:

$$\begin{vmatrix} 2K-\omega^2 M & -K \\ -K & 2K-M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2K-M\omega^2)^2 = K^2 \Rightarrow \begin{cases} 2K-\omega_1^2 M = K \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}} \\ 2K-\omega_2^2 M = -K \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{M}}} \end{cases}$$

Para determinar los modos:

$$\begin{bmatrix} 2K-\omega^2 M & -K \\ -K & 2K-M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

- $\omega = \omega_1 \rightarrow \left(2K - \frac{K}{M} M\right) X_1^1 = KX_2^1 \rightarrow \boxed{\{X^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$
- $\omega = \omega_2 \rightarrow \left(2K - \frac{3K}{M} M\right) X_1^2 = KX_2^2 \rightarrow \boxed{\{X^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$

La matriz de modos nos queda: $[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Realizando el cambio a coordenadas modales y premultiplicando todos los términos por la traspuesta de la matriz de modos ~~[illegible]~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_s \cos\overline{\omega}t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} kX_s \cos\overline{\omega}t \\ kX_s \cos\overline{\omega}t \end{Bmatrix}$$

Las respuestas estacionarias serán:

$$y_1(t) = \frac{kX_s/2k}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2}\cos\overline{\omega}t$$

$$y_2(t) = \frac{kX_s/6k}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_2}\right)^2}\cos\overline{\omega}t$$

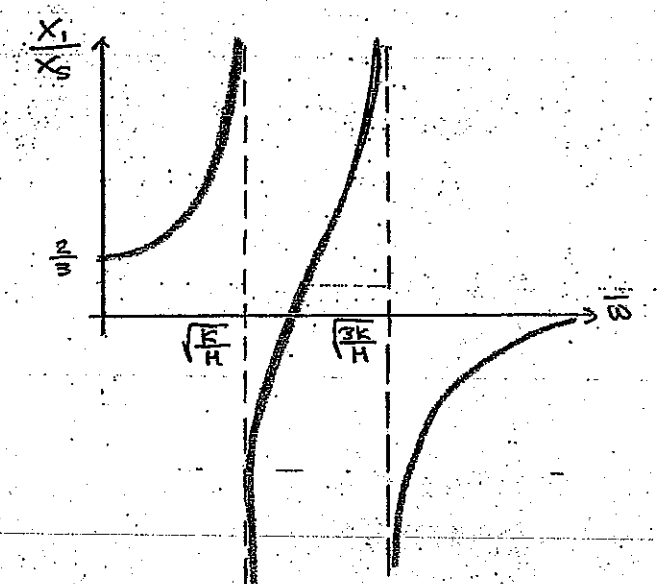
La respuesta en coordenadas reales, realizando de nuevo el cambio de variable será:

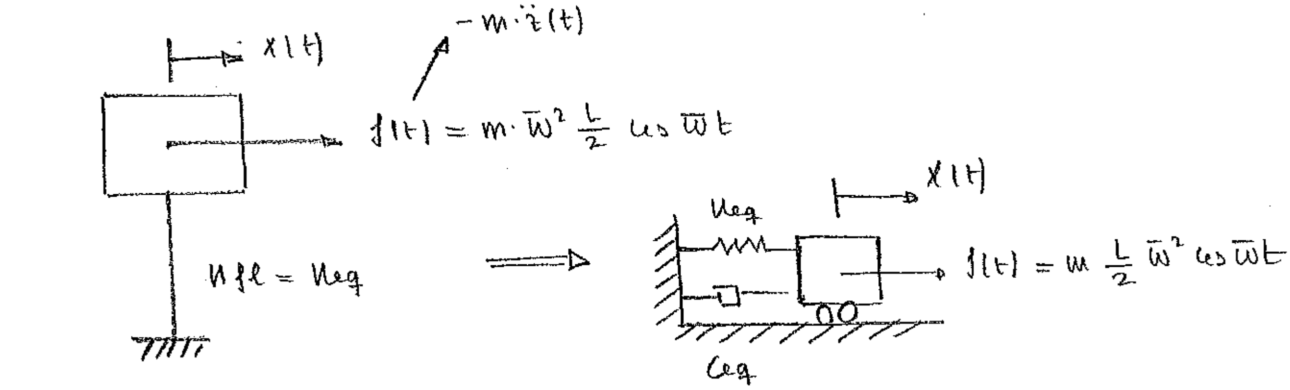
$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ x_2(t) &= y_1(t) - y_2(t) \end{aligned}}$$

Como nos piden $\frac{X_1}{X_s}$ y $\frac{X_2}{X_s}$, obtendremos las amplitudes X_1 y X_2 de las respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$X_1 = X_s\left(\frac{1}{2\left[1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right]} + \frac{1}{6\left[1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_2}\right)^2\right]}\right) \rightarrow \frac{X_1}{X_s} = \left(\frac{1}{2\left[1-\frac{\overline{\omega}^2}{k}M\right]} + \frac{1}{2\left[1-\frac{\overline{\omega}^2}{3k}M\right]}\right)$$

$$X_2 = X_s\left(\frac{1}{2\left[1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right]} - \frac{1}{6\left[1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega_2}\right)^2\right]}\right)$$

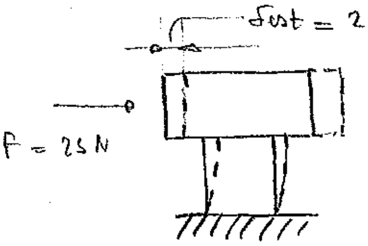




b)

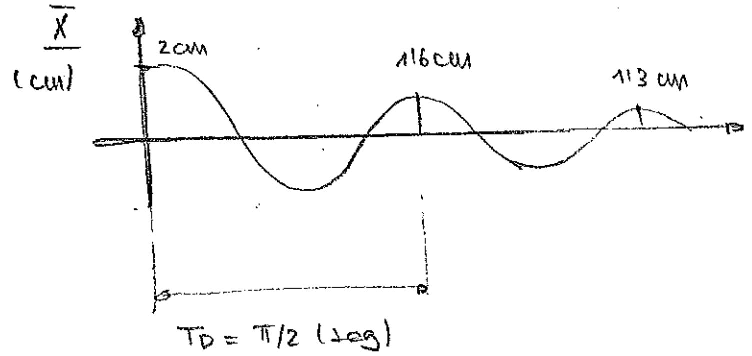
Primer paso calcular los param mecánicos · K_{eq}, $\xi_{eq} \rightarrow C_{eq}$, M_{eq}

Para ello se han hecho pruebas:



· Calculo K_{eq}

$$K_{eq} = \frac{25\ N}{2\cdot 10^{-2}\ m} = 1250\ N/m$$



Esta es la gráfica que se obtiene al quitar F y dejar oscilar libremente a la masa

· cálculo ξ_{eq}

$\bar{X}_1 = 2$, $\bar{X}_2 = 1'6$ | $n = 1$

$$\delta = \ln\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} = 0'223 \rightarrow$$

$$\xi_{eq} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi n)^2}} = 0'035$$

método del decremento logarítmico

También se podrían haber usado

$\bar{X}_2 = 1'6$ cm, $\bar{X}_3 = 1'3$ cm | $n = 1 \longrightarrow \xi_{eq} = 0'033$

Lo normal sería obtenerlo varias veces y hacer la media

$T_D = \pi/2$

$$w_D = \frac{2\pi}{T_D} = \frac{2\pi}{\pi} = 4\ rad/s \quad ; \quad w_D = w\sqrt{1-\xi_{eq}^2}$$

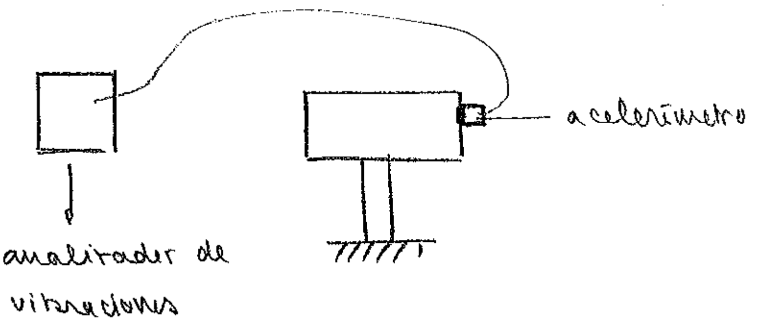
$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

$$4 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \cdot \sqrt{1-0'035^2} \longrightarrow m_{eq} = 78'03 \text{ kg}$$

$$\xi_{eq} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq}\cdot \omega} \longrightarrow c_{eq} = 21'66 \ \frac{Ns}{m}$$

c) El acelerómetro se colocaría así:



d) "ojo esta ya no es la Meq"

$$m_{eq}\cdot \ddot{x} + c_{eq}\cdot \dot{x} + k_{eq}\cdot x = m\,\bar{\omega}^2 \cdot \frac{L}{2} \cos \bar{\omega} t$$

Nos piden plantear esta ecuación con val numéricos para una situación de resonancia $\longrightarrow \bar{\omega} = \omega$

$$78'03\,\ddot{x} + 21'66\,\dot{x} + 1250\,x = 1'602 \cos(4'0025\, t)$$

$$\bar{\omega} = \omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{1250}{78'03}} = 4'0025$$

Por el enunciado $L = 1m$

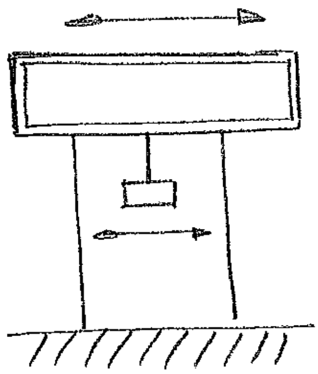
$$X_E(t) = \frac{F_0}{k} \cdot D_R \cdot \cos(\bar{\omega} t - \phi_R)$$

Como $\xi_{eq} < 0'1 \longrightarrow D_R \simeq D_{máx} = \frac{1}{2\xi_{eq}}$

$$X_E = \frac{1'602}{1250} \cdot \frac{1}{2\cdot 0'035} \cos(4'0025t - \pi/2) = 1'83\cdot 10^{-2} \cos(4'0025t - \pi/2)$$

$\longrightarrow$

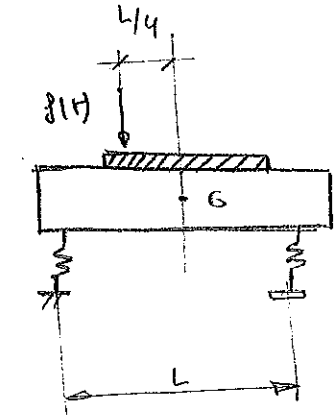
e)



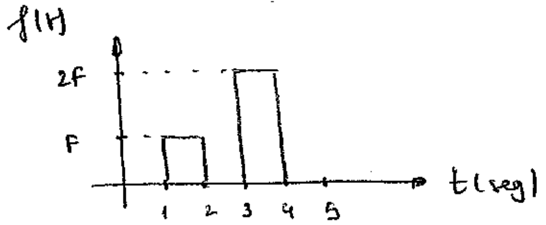
Más adelante se explicara más este concepto de absorsor. Por ahora esta bien saber que el modelo dibujado es adecuado. Se moverá en la dir. de osc. del sist.

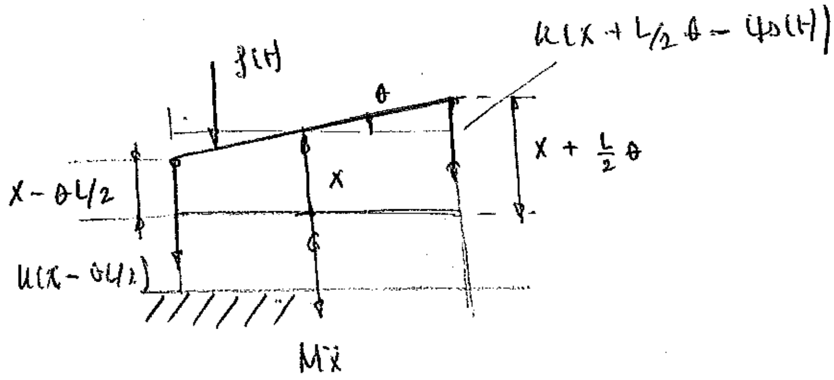
PROBLE MARZO 2011

M, I_G



$y_s(t) = Y_s \cos(\bar{\omega} t)$





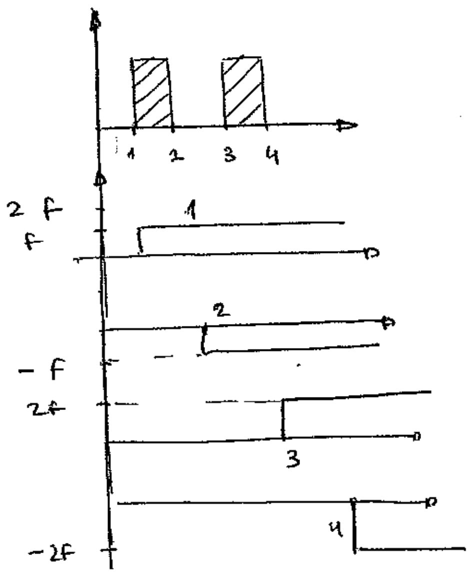
$$-k(x-\theta \cdot L/2) - f(t) - M\ddot{x} - k(x + \tfrac{L}{2}\theta - y_s(t))$$

$$\Sigma M_G = 0; \quad k(x - \theta \cdot L/2)\frac{L}{2} + f(t) \cdot L/4 - I_G \cdot \ddot{\theta} - k(x + L/2\,\theta - y_s(t))\frac{L}{2} = 0$$

Ahora reordenamos y operamos de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{kL^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(t) + k y_s(t) \\ f(t) \cdot L/4 + k\, L/2\, y_s(t) \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{kL^2}{2 I_g}}$$



$$x(t) = \underbrace{x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)}_{\text{escalones}} + \underbrace{x_5(t)}_{y_s(t)}$$

$$\underset{t=0}{F} \rightarrow \quad x = \frac{F}{k}(1 - \cos \omega t)$$

$$x_1(t) = \frac{-F}{2k}(1 - \cos \omega_1 (t-1))$$

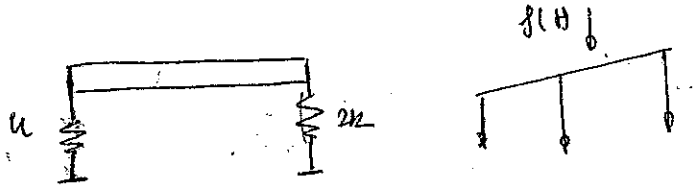
$$x_2(t) = \frac{F}{2k}(1 - \cos \omega_1 (t-2))$$

$$x_3(t) = -\frac{2F}{2k}(1 - \cos \omega_1 (t-3))$$

$$x_4(t) = \frac{2F}{2k}(1 - \cos \omega_1 (t-4))$$

$$X_B = \frac{k\cdot Y_s}{2k}\;\frac{1}{1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}\cos\bar{\omega}t$$

$$\cancel{M\ddot{x} + 2kx = -F(1) + F(2) - F(3) + F_4 + k\cdot Y_s\cos\bar{\omega}t}$$



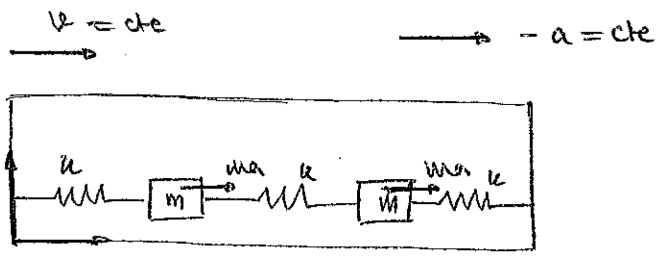
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J_g \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & kL/2 \\ \frac{kL}{2} & \frac{3kL^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2k\, y_s(t)\\ k\cdot L\cdot y_s(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2kY_s\\ kLY_s\end{Bmatrix}\cos\bar{\omega}t$$

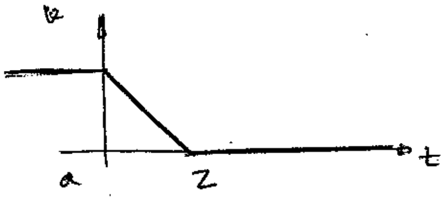
$$x(t) = X\cdot\cos\bar{\omega}t \longrightarrow \dot{x},\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{x},\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \Theta\cdot\cos\bar{\omega}t$$

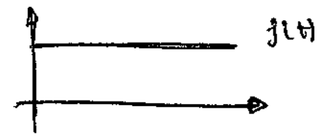
$$\begin{bmatrix} 3k - M\bar{\omega}^2 & \frac{kL}{2} \\ \frac{kL}{2} & \frac{3kL^2}{4} - J_g\bar{\omega}^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{X}\\ \Theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2kY_s\\ kLY_s\end{Bmatrix}$$

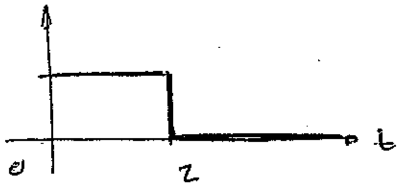
$$\bar{X} = \frac{|\quad|}{|\quad|}\;;\quad \Theta = \frac{|\quad|}{|\quad|}$$



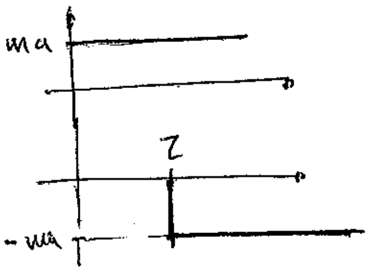


$0 \leq t \leq Z$





$t \geq 2$



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \cancel{\begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<u>MODALES</u> 1) Cálculo de frecuencia y modos

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \; ;$$

$$\omega_1^2 = k/m \rightarrow (1,1)$$

$$\omega_2^2 = 3k/m \rightarrow (1,-1) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix} ;$$

$$\left| \begin{array}{l} m\ddot{y}_1 + k y_1 = ma \\ m\ddot{y}_2 + 3k y_2 = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x_1(0) = 0 \; ; \; x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \; ; \; \dot{x}_2(0) = 0 \end{array} \right|$$

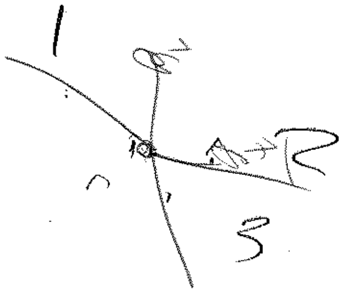
$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \qquad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$$

$\longrightarrow$

$0 \leq t \leq Z$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ma}{k}\,(1-\cos w_1 t) \\ \frac{ma}{k}\,(1-\cos w_1 t) \end{Bmatrix}$$



$R_{x\,12}$

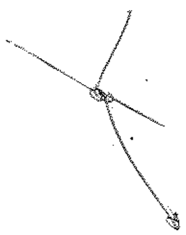
$R_{y\,12}$

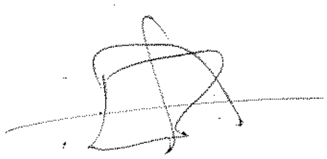
$R_{x\,13}$

$R_{y\,13}$

$R_{x\,23}$

$R_{y\,23}$





DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

3° Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 50 %.
Ejercicio 1. Tiempo: 75 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 50 %.
Ariketa. 1 Iraupena: 75 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

---

1. Definición de sistemas de masas equivalentes. ¿En qué se basa dicha equivalencia? ¿Cuáles son las condiciones de equivalencia? Aplicación a un sistema plano. (1p)
2. Problema dinámico inverso: explicar y representar cuáles son las reacciones en los diferentes pares de un mecanismo: par de rotación binario, par de rotación ternario, par prismático y par de leva. (1p)
3. Representar los términos de la ecuación de equilibrio del sistema de 1 grado de libertad como vectores giratorios en el diagrama de Argand (plano complejo). Indicar qué circunstancia se da en la condición de resonancia. ¿Por qué en dicha condición, si el amortiguamiento es nulo o muy pequeño, la amplitud crece desmesuradamente? (1p)
4. Definir, indicar la fórmula, y representar gráficamente de forma aproximada los siguientes factores:

   a.- Factor de amplificación dinámica (D) con amortiguamiento viscoso lineal.
   b.- Factor de amplificación dinámica (D) con amortiguamiento estructural.
   c.- Factor de amplificación dinámica por desequilibrio (D_r).
   d.- Transmisibilidad (T_r).

   (1,5p)

5. A partir de la expresión compleja de la serie de Fourier:

   $$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{ij\omega_0 t} \; ; \; F_j=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ij\omega_0 t}\,dt$$, obtener lo siguiente:

   a.- La Transformada de Fourier de $f(t)$ y su correspondiente Transformada de Fourier Inversa.
   b.- La Transformada de Fourier de la respuesta $x(t)$ y su correspondiente Transformada de Fourier Inversa.

   (1p)

1. Obtener los términos de la matriz de transferencia de un sistema de n grados de libertad con amortiguamiento proporcional. (1,5p)
2. Describir la cadena básica de medida experimental de vibraciones: sus componentes, su funcionamiento y qué medidas puede realizar. (1p)

Nota: La Teoría se evalúa sobre un máximo de 8 puntos.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

3º Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 50 %.
Ejercicio 1. Tiempo: 75 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 50 %.
Ariketa. 1 Iraupena: 75 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

---

1. Masa baliokideen sistemen definizioa. Zertan oinarritzen da baliokidetasun hori? Zeintzuk dira baliokidetasunaren baldintzak? Aplikatu sistema lau batentzat. (1p)
2. Alderantzizko problema dinamikoa: Mekanismo baten hurrengo loturetan agertzen diren erreakzio ezberdinak adierazi eta azaldu: biraketazko lotura bitarra, biraketazko lotura hirutarra, lotura prismatikoa, espeka lotura. (1p)
3. Argand-en diagrama erabiliz (plano konplexua), askatasun gradu bakarreko sistema baten oreka ekuazioaren osagaiak adierazi. Azaldu nola geratzen den diagrama erresonantzia egoeran. ¿Egoera horretan, motelgarritasuna nulua edo oso txikia bada, zergatik handitu daiteke anplitudea neurrigabe? (1p)
4. Hurrengo faktoreak definitu, euren formula adierazi eta gutxi gora behera grafikoki marraztu: (1,5p)

   a.- Anplifikazio dinamikoa motelgarritasun liskatsu linealaren kasuan (*D*).
   b.- Anplifikazio dinamikoa motelgarritasun histeretikoaren kasuan (*D*).
   c.- Desoreka anplifikazio dinamikoa edo desoreka dinamiko absolutua (D_r).
   d.- Transmisibilitatea (T_r).

5. Fourierren segiden adierazpen konplexutik abiatuta:

   $$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{ij\omega_0 t} \; ; \; F_j=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-ij\omega_0 t}\, dt$$, honako hau eskuratu:

   a.-*f(t)*-ren Fourierren transformatua eta bere alderantzizko Fourierren transformatua
   b.-*x(t)* erantzunaren Fourierren transformatua eta bere alderantzizko Fourierren transformatua

   (1p)
6. Motelgarritasun proportzionala daukan n askatasun gradutako sistema baten transferentzia matrizearen osagaiak lortu. (1,5p)
7. Bibrazioen neurketa esperimentalerako oinarrizko katea: deskribatu osagaiak, funtzionamendua eta zein neurri egin daitzkeen. (1p)

Oharra: Teoriak 8 puntuko nota maximoa dauka.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

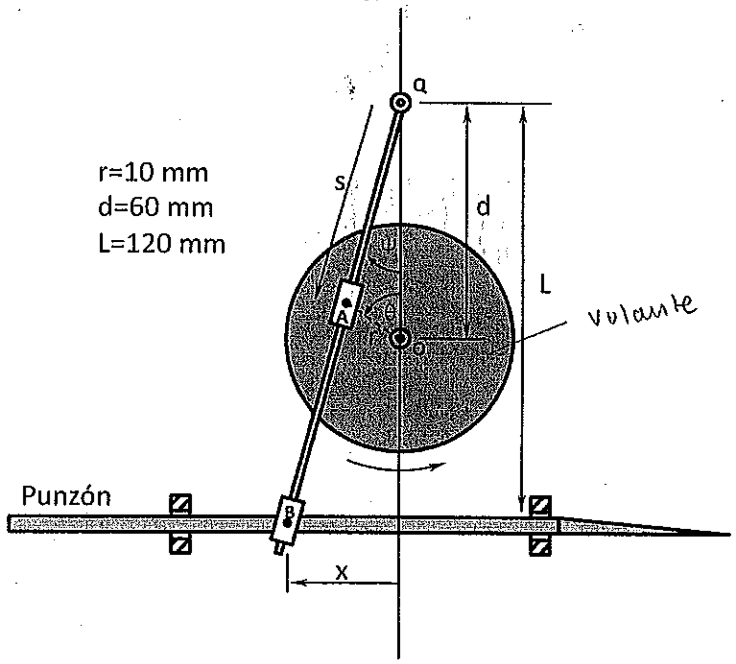
3º Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio 2. Tiempo: 60 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 60 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Sea la máquina de la figura, cuya función es la de realizar perforaciones en planchas de madera a fin de aligerar su peso y dotarlas de capacidad de ventilación en aplicaciones de coberturas para edificios forestales.

Un motor eléctrico suministra un par constante al volante de inercia que gira con respecto del punto *O*. Dicho volante acciona un mecanismo a través del cual se suministra un movimiento horizontal al punzón. La fuerza de punzonado se considera también constante y de valor *F=1000 N* y, lógicamente, sólo actúa desde $\theta=\pi$ hasta que la coordenada x alcanza su valor negativo máximo. Se pide lo siguiente:

1. Expresar la coordenada x en función de la coordenada generalizada θ. Justificar adecuadamente que cuando la relación r/d es lo suficientemente pequeña, dicha expresión puede ponerse de la siguiente forma:
$$x = \frac{Lr}{d}\sin\theta$$
Obtener asimismo el valor máximo de la coordenada x a lo largo del movimiento (1,5p).
2. Adoptando el supuesto de la pregunta anterior, obtener la expresión del momento resistente reducido y representarlo en función de la coordenada generalizada θ. (4p).
3. Obtener el valor del momento motor que garantiza el funcionamiento en régimen permanente. (1,5p)
4. Obtener la inercia que debe tener el volante, supuesto que es el único elemento que aporta inercia al sistema y que se debe garantizar un grado de irregularidad inferior al *0,05* con una velocidad de régimen de *60 rpm* (1,5p).
5. Dimensionar el volante como un disco macizo de fundición ($\rho=7200\ kg/m^3$) de forma que su velocidad periférica máxima no supere *1,5 m/s*. (1,5p)



DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

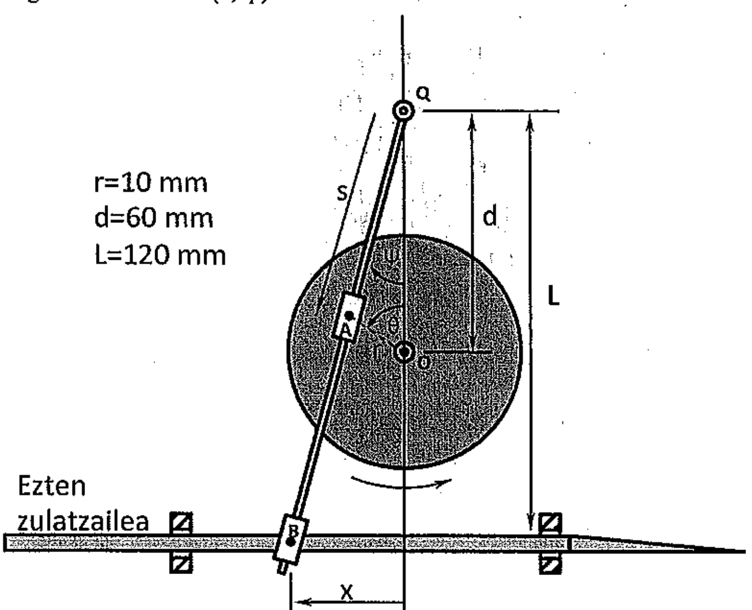
3º Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio 2. Tiempo: 60 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 2 Iraupena: 60 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

Irudiko makina egurrezko oholetan zuloak egiteko erabiltzen da. Modu honetan oholak arinagoak dira eta aireztapen funtzioak bete dezakete baso-eraikuntzetan.

Motore elektrikoak O puntuaren inguruan birak ematen duen inertzi bolanteari momentu konstantea ematen dio. Bolanteak, ezten zulatzailea horizontalki mugitzen duen mekanismoari eragiten dio. Zulatze indarra $F=1000\ N$ da. Indar honek, $\theta=\pi$ aldiunetik x koordenatua bere balio negatibo maximoa lortzen duen arte irauten du. Hurrengoa eskatzen da:

1. Adierazi x koordenatua θ koordenatu orokortuaren funtziopean. Justifikatu baita r/d erlazioa txikia denean adierazpen hori hurrengo moduan adierazi daitekeela:
$$x = \frac{Lr}{d}\sin\theta$$
Era beran, lortu x koordenatuaren balio maximoa mugimenduan zehar (1,5p).
2. Aurreko galderan egindako hipotesia kontutan izanda, lortu momentu erresistente laburbilduaren adierazpena θ aldagaiaren funtziopean. (4p).
3. Funtzionamenduan, erregimen iraunkorra ziurtatuko duen momentu motorearen balioa lortu. (1,5p)
4. Bolantearen inertzia lortu. Horretarako, suposatu bolantea dela inertzia duen elementu bakarra, irregulartasun maila 0,05 baino txikiagoa izan behar dela eta abiadura $60\ rpm$ dela. (1,5p).
5. Bolantea fundiziozko disko trinko bat bezala dimentsionatu ($\rho=7200\ kg/m^3$) bere abiadura periferikoa $1,5\ m/s$ baino handiagoa izan ez dadin. (1,5p)



DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

3º Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio 3. Tiempo: 60 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 60 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

En la figura 1 se muestra la modelización de un sismógrafo consistente en una barra de masa m e inercia I_G respecto de su centro de gravedad G, cuya distribución de masa no es homogénea, y se encuentra articulada en el punto O de la caja. Se pide:

1- Obtener la ecuación del movimiento para el caso en que el suelo, en el que se apoya la caja sismográfica sufra una aceleración $\ddot{y}(t)$. (4p)

2- Utilizando como variable el desplazamiento relativo del centro de gravedad G del sismógrafo respecto del suelo, obtener el máximo desplazamiento de la aguja en la escala del sismógrafo para el caso en que la aceleración del suelo varíe según la figura 2. Considérese que $I_G = \frac{1}{9}mL^2$ y que la frecuencia natural del sismógrafo es *10 rad/s*. Asimismo considérese que el amortiguamiento del sismógrafo es despreciable. (6p)

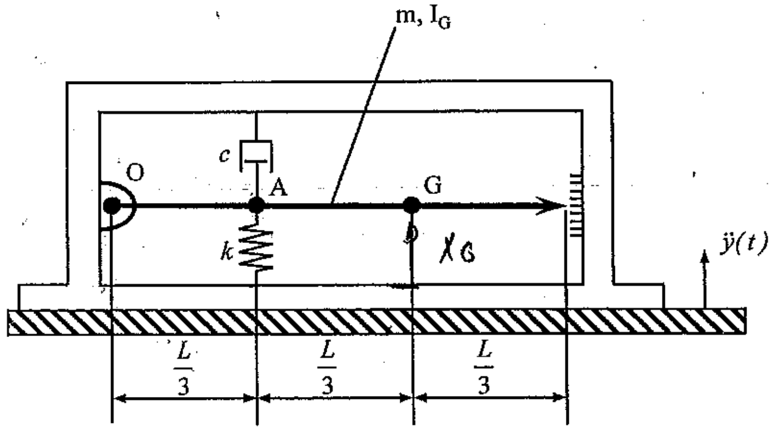


Fig. 1

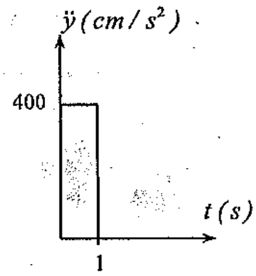


Fig. 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

MEKANIKA INGENIARITZA SAILA

INGENIARITZA GOI ESKOLA TEKNIKOA

TEORÍA DE MECANISMOS Y VIBRACIONES MECÁNICAS

MEKANISMOEN TEORIA ETA BIBRAZIO MEKANIKOAK

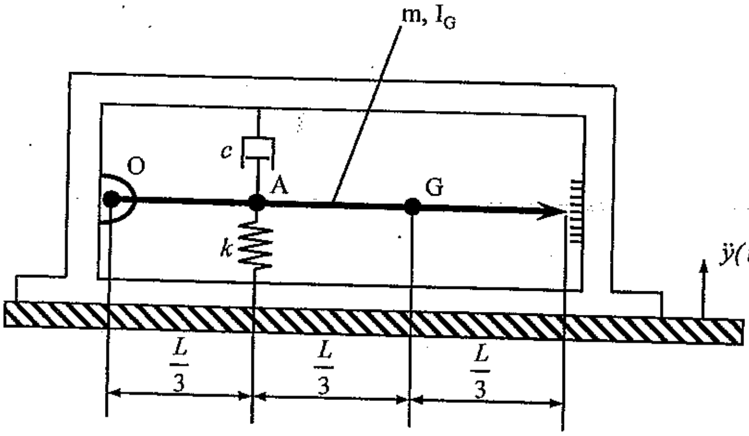
3° Grado en Ingeniería Tecnología Industrial.
Mayo 2013. Unidad Temática B.
Peso sobre la Unidad Temática: 25 %.
Ejercicio 3. Tiempo: 60 min.
GRUPO:
NOMBRE Y APELLIDOS:

Industria Teknologiaren Ingeniaritzako 3. Gradua.
2013.-eko Maiatza. B Atal Tematikoa.
Atal Tematikoaren Pisua: 25 %.
Ariketa. 3 Iraupena: 60 min.
TALDEA:
IZEN ABIZENAK:

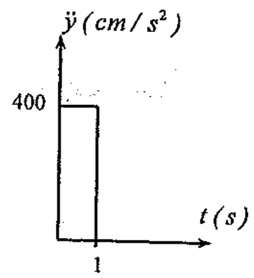
1go irudian sismografo baten ereduketa erakusten da. Sismografoa m masadun eta bere G grabitate zentroarekiko I_G inertziadun barra batez osotuta dago (barraren masa banaketa ez da homogeneoa). Barra hori, lurrarekin bat datorren kutxaren O puntuan artikulatuta dago. Honako hau eskatzen da:

1- Lortu mugimenduaren ekuazioa, lurrak $\ddot{y}(t)$ azelerazioa jasaten duen kasurako.

2- Kutxaren oinarriarekiko grabitate zentroaren desplazamendu erlatiboa aldagai bezala erabiliz, lortu orratzaren desplazamendu maximoa 2. irudiko azelerazio batentzat. Kontsideratu $I_G = \frac{1}{9}mL^2$, eta sismografoaren maiztasun naturala *10 rad/s* dela. Sismografoaren motelgarritasuna mesprezagarria da.



1. Irudia



2. Irudia