VIBRACIONES (1GDL)

1) Vibraciones libres.

* No amortiguadas: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega t)$

* Amortiguadas:

  - supercrítico ($\xi > 1$): $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

    $$\begin{cases} s_1 = \omega(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ s_2 = \omega(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

  - crítico ($\xi = 1$): $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\omega t}$

  - subcrítico ($\xi < 1$): $x(t) = e^{-\xi\omega t}(A.\cos\omega_D.t + B.\text{sen}\,\omega_D.t)$

    $$e^{-\xi\omega t}\left(x_0 \cdot \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\,\text{sen}(\omega_D t)\right)$$

2) Vibraciones forzadas

* Respuesta ante una fuerza armónica: $x_p(t) = X_{est} \cdot D \cdot \begin{cases} \cos(\bar{\omega}t - \varphi) \\ \text{sen}(\bar{\omega}t - \varphi) \end{cases}$

  $$\begin{aligned} X_{est} &= f_0/K \\ D &= 1 \Big/ \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ \varphi &= \text{arctg}\,\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \end{aligned}$$

* Respuesta ante un movimiento armónico del soporte.

  $$x_p(t) = X_s \cdot D \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \cdot \text{sen}\left(\bar{\omega}t - \text{arctg}\,\frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2}\right)$$

* Respuesta a la función impulso.

  $$x(t) = I \cdot \frac{e^{-\xi\omega(t-a)}}{m\omega_D} \cdot \text{sen}(\omega_D(t-a))$$

* Respuesta a función escalón

  $$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A.\cos\omega_D t + B.\overset{\text{sen}}{\cancel{\cos}}\,\omega_D t) + \frac{I}{k}$$

  si cond. iniciales nulas: $A = -\frac{I}{k}$, $B = -\frac{\xi\omega I}{k\omega_D}$

* Respuesta a una función rampa

  $$x(t) = \frac{I}{k} \cdot t - \frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t} \cdot \text{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \text{sen}(2\theta)\right]$$

  $$\theta = \text{arctg}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$$

* Amortiguamiento histerético o estructural:

$$x_E = \frac{f_0}{k} D . e^{i(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \gamma^2}} \quad \text{y} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{1-\beta^2}$$

VIBRACIONES (2 GDL)

Para frecuencias naturales.

$$|[k] - \omega^2 [M]| = 0$$

6. Introducción a la teoría de vibraciones

- **Carga dinámica:** su magnitud, dirección, sentido y/o punto de aplicación varían con el tiempo.

- **Oscilación:** movimiento periódico o cuasi-periódico de un sistema alrededor de una posición de referencia (vibración → tiene que aparecer energía de deformación).

- **Parámetros concentrados:** masa → inercia.
  rigidez → f. elástica
  amortiguamiento → f. disipación.

- **Principio de superposición:** consideradas dos acciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$ que aplicadas al sistema provocan unas respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la respuesta a una acción combinada $AF_1(t)+BF_2(t)$ es $Ax_1(t)+Bx_2(t)$, donde A y B son dos constantes.

  - Sistema semidefinido: mov. sólido rígido y def. propia (automóviles)
  - Sistema definido: no tiene mov. sólido rígido (estructura)

- **VIBRACIONES**
  - Libres: se producen en ausencia de fuerzas exteriores, exclusivamente por unas determinadas condiciones iniciales de velocidad y/o desplazamiento.
  - Forzadas: se producen en presencia de fuerzas variables con el tiempo.

7. Modelización de sistemas mecánicos.

- DISEÑO DE SISTEMAS MECÁNICOS DEFORMABLES.

1. Concepción del sistema mecánico.
2. Análisis teórico o experimental (o ambos).
3. Comprobación del cumplimiento de los requisitos de funcionamiento y modificación de los parámetros de diseño en su caso.

- ANÁLISIS TEÓRICO.

1. Creación del modelo matemático: idealización del sistema físico real mediante hipótesis simplificativas.
2. Obtención de las ecuaciones del movimiento: se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del sistema.
3. Solución de las ecuaciones del movimiento: El estudio dinámico se completa con la utilización de las relaciones deformación-desplazamiento del medio continuo y de las ecuaciones constitutivas del material, que llevan al conocimiento del campo de tensiones del sistema.
4. Interpretación de resultados: previsión que el modelo matemático hace del comportamiento dinámico del sistema.

- MODELIZACIÓN: REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE MUELLES, AMORTIGUADORES Y MASAS.

Elementos:

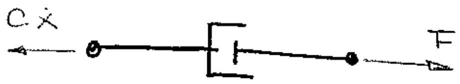
* Resortes sin masa: almacenan energía elástica (k)
* Masas indeformables: adquieren energía cinética (M)
* Amortiguadores ideales: disipan energía mientras el elemento vibra (C).

1. Resortes.

* Tracción-compresión: $\boxed{F=k \cdot x}$
* Muelle a torsión: $\boxed{T=k_T \cdot \theta}$

2. Amortiguadores. El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte progresivamente en calor y ruido se conoce con el nombre de amortiguamiento.
El amortiguador asume en exclusiva la capacidad de disipación de energía. (No posee masa ni capacidad para almacenar energía y la fuerza.

* Amortiguamiento viscoso: La disipación de energía es debida al rozamiento entre el elemento y el fluido.



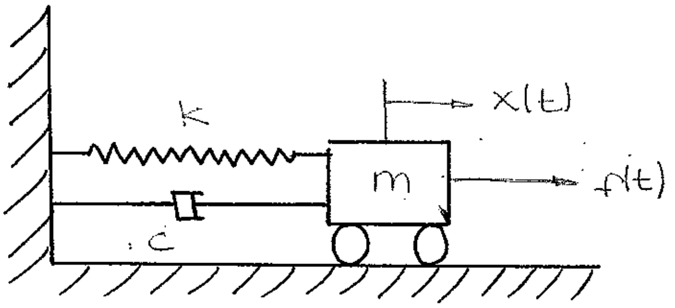
$$\boxed{F = C.\dot{x}}$$

→ AMORTIGUADORES EN PARALELO: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

→ AMORTIGUADORES EN SERIE: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$

3. Masas e inercias: se trata de reducir el conjunto de masas que aparecen en un sistema mecánico a una única masa equivalente. (Equivalencia entre el sistema modelizado y el equivalente o reducido.)

8. Sistemas con un GDL I: Vibraciones libres



Modelo de 1GDL

- Ecuación de movimiento: $\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)}$

VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS.

$$\begin{cases} f(t) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

- VIGA EMPOTRADA: $K_{flexión} = \frac{3EI}{L^3}$

La ecuación a resolver es: $m\ddot{x} + kx = 0$.

→ solución: $x(t) = C.e^{st}$

Hay que determinar C y s.

$$C(ms^2 + k).e^{st} = 0.$$

$$ms^2 + k = 0$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}} = \pm i\omega$$

→ Solución general: $x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\text{sen}(\omega t)$

$$x(t) = X.\cos(\omega t - \theta)$$

A través de las condiciones iniciales impuestas se determinan A y B.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A + B \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 = B.\omega \end{aligned} \longrightarrow A = x_0 \text{ y } B = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$\boxed{x(t) = x_0.\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cdot\text{sen}(\omega t)}$$

$X^2 = A^2 + B^2$

$tg\beta = \frac{B}{A}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x(t) = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \cdot \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)}$

- Frecuencia natural: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

$f(t) = 0$

La ecuación a resolver es $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

$\longrightarrow$ Solución: $x(t) = C.e^{st}$

Se obtienen las raíces: $s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

- Amortiguamiento crítico ($\bar{c}$)

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega. \longrightarrow \bar{c} = 2m\omega$$

* Amortiguamiento supercrítico ($c > \bar{c}$)
* Amortiguamiento crítico ($c = \bar{c}$)
* Amortiguamiento subcrítico ($c < \bar{c}$)

- Amortiguamiento relativo (ξ) : $\boxed{\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2m\omega}}$

1) Amortiguamiento supercrítico ($\xi > 1$)

$$s_1 = \omega\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

$$s_2 = \omega\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

$\longrightarrow$ solución general: $\boxed{x(t) = C_1.e^{s_1 t} + C_2.e^{s_2 t}}$

2) Amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

$$s_1 = s_2 = -\omega$$

$\longrightarrow$ solución general: $\boxed{x(t) = (C_1 + C_2 t).e^{-\omega t}}$

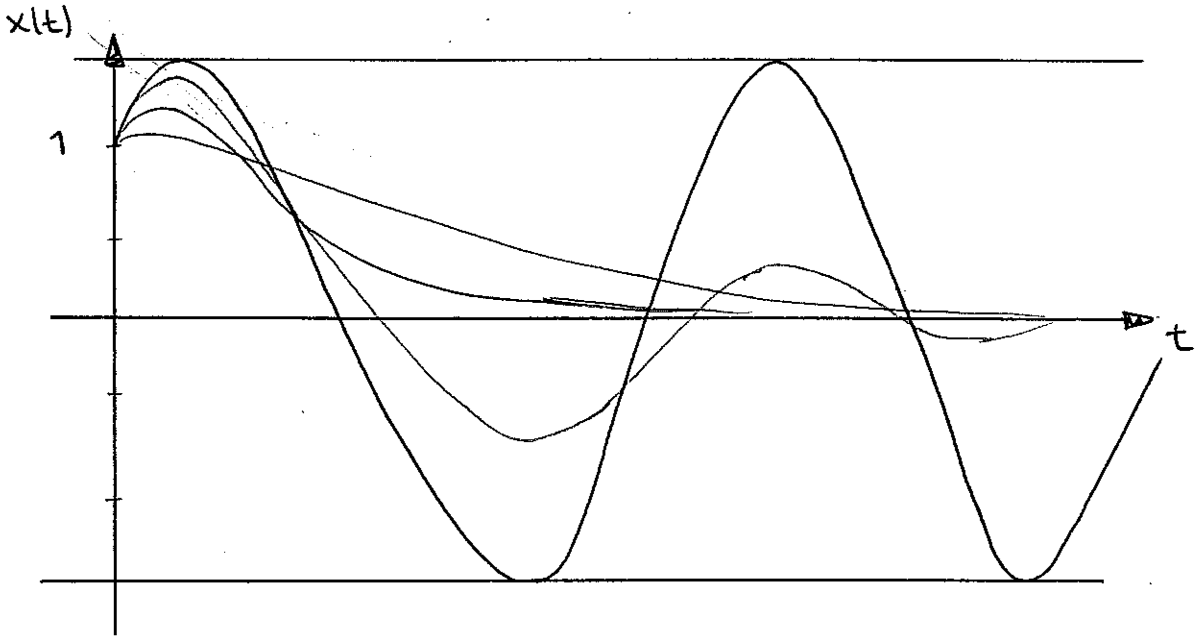
3) Amortiguamiento subcrítico ($\xi<1$)

$$s_1 = \omega\left(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right)$$
$$s_2 = \omega\left(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

siendo $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$: frecuencia de vibración amortiguada.

→ Solución general: $x(t) = e^{-\xi\omega t}\cdot\left(C_1 \cdot e^{i\omega_D t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_D t}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cdot\cos\omega_D t + B\cdot\mathrm{sen}\,\omega_D t\right)}$$



—— sin amortiguamiento
—— amortiguamiento subcrítico.
—— amortiguamiento crítico
—— amortiguamiento supercrítico.

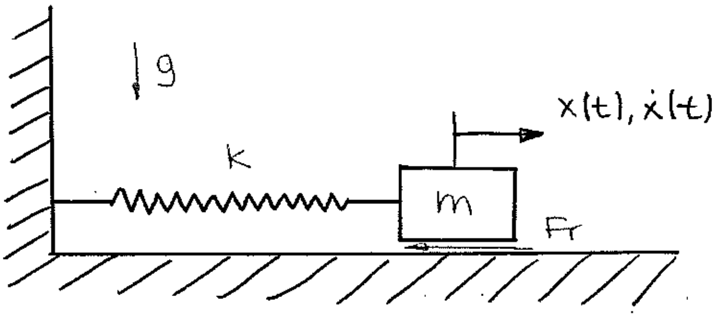
La mayoría de los sistemas mecánicos: amortiguamiento muy pequeño ($\xi \lll 1$). Para estos sistemas la frecuencia de vibración amortiguada se aproxima a su correspondiente FRECUENCIA NATURAL.

En el caso del amortiguamiento crítico ω_D se anula luego el periodo se hace infinito. La amplitud NUNCA atravesará el eje del tiempo, se aproximará a él asintóticamente.

Para valores superiores del amortiguamiento (AMORTIGUAMIENTO SUPERCRÍTICO) la amplitud tiende a cero todavía más lentamente.

AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB.

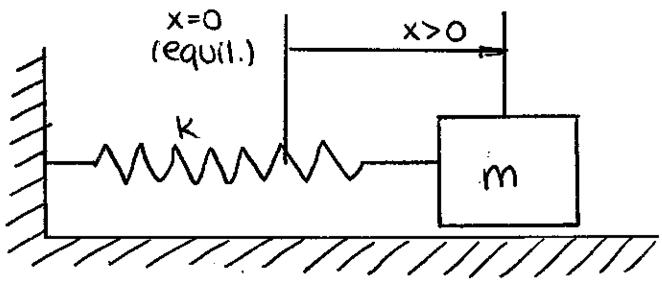
- Las vibraciones se amortiguan como consecuencia del rozamiento seco entre superficies que deslizan entre sí.

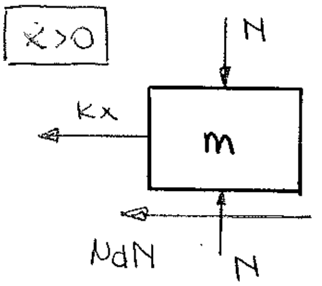


$$F_r = -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\mu_d N$$

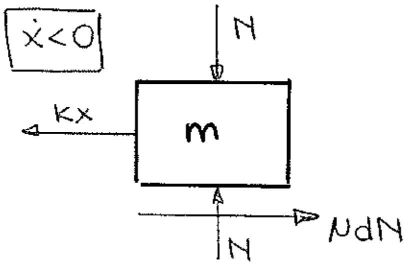
coeficiente de rozamiento dinámico (μ_d)

Para obtener la ecuación de movimiento del sistema; considerando la masa en movimiento fuera de la pos. de equilibrio del muelle.





$$m\ddot{x} + kx = -\mu_d N$$



$$m\ddot{x} + kx = \mu_d N$$

- Primer intervalo:

$\boxed{\dot{x}<0}$: $x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\mu_d N}{k}$

cond. iniciales: $x(0) = x_0 > 0$

$\dot{x}(0) = 0$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_d N}{k}\right)\cos(\omega t) + \frac{\mu_d N}{k}}$$

válida hasta t_1 $\quad \dot{x}(t_1) = 0 \longrightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega} \longrightarrow x_1 = -x_0 + 2\frac{\mu_d N}{k}$

- Segundo intervalo:

$\boxed{\dot{x}>0}$: $x(t) = A.\cos(\omega t) + B.\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\mu_d N}{k}$

cond. iniciales: $x(t_1) = x_1$
$\dot{x}(t_1) = 0.$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - 3\frac{\mu_d N}{k}\right) \cdot \cos\omega t - \frac{\mu_d N}{k}}$$

válida hasta t_2 $\dot{x}(t_2)=0. \longrightarrow t_2 = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow x_2 = x_0 - 4\frac{\mu_d N}{k}$

- i-ésimo intervalo:

$$x_i(t) = \left[x_0 - (2i-1)\frac{\mu_d N}{k}\right]\cos(\omega t) - (-1)^i \frac{\mu_d N}{k} \qquad \forall i = 1,2\ldots n$$

Y la amplitud al final del mismo:

$$x_i = (-1)^i \left(x_0 - 2i\frac{\mu_d N}{k}\right) \quad \forall i = 1,2\ldots n$$

El movimiento llega a su fin cuando $|k.x_j| \leq \mu_e.N$

$$k.\left(x_0 - 2j\frac{\mu_d N}{k}\right) \leq \mu_e N \rightarrow j \geq \frac{kx_0 - \mu_e N}{2\mu_d.N}$$

9. Sistemas con 1GDL: Vibraciones armónicas

- Vibraciones forzadas: se producen como consecuencia de la introducción de energía externa al sistema durante la vibración.
- Para comprobar el comportamiento dinámico de un sistema se buscan determinadas EXCITACIONES TIPO, de forma que la respuesta del sistema frente a dichas acciones caracterice de la manera más completa posible su comportamiento dinámico.
  * Excitaciones armónicas: son fáciles de reproducir físicamente, por ejemplo mediante una masa excéntrica rotatoria. Para caracterizar completamente un modelo, basta estudiar su respuesta para un grado suficientemente amplio de frecuencias de la excitación.
  * Función impulso: es la más simple matemáticamente hablando. Desde un punto de vista físico es una percusión y en un laboratorio se reproduce mediante un simple martillazo.
  * Excitaciones aleatorias: se ajustan a una determinada distribución estadística (acciones del viento, mar en una tormenta, el perfil rugoso de una carretera...)

RESPUESTA ANTE UNA FUERZA ARMÓNICA

La ecuación que rige el movimiento de las ecuaciones forzadas: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$

- FUERZA ARMÓNICA: $\left.\begin{array}{l} f(t)=f_0 \cos(\bar{\omega} t) \\ f(t)=f_0 \operatorname{sen}(\bar{\omega} t) \end{array}\right\}$ Excitación armónica.

* Solución de la ecuación homogénea (amortiguamiento subcrítico)

$$x_h(t)=X e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t-\theta)$$

* Solución particular:

  - Prueba: $x_p(t)=A e^{i\bar{\omega}t}$ (A → constante compleja a determinar)

$$-m\bar{\omega}^2 A e^{i\bar{\omega}t}+c\, i\bar{\omega} A e^{i\bar{\omega}t}+k A e^{i\bar{\omega}t}=f_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

$$A=\frac{f_0}{-m\bar{\omega}^2+ic\bar{\omega}+k}$$

siendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $\xi = \frac{c}{2m\omega}$

$$A = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2 + i.2\xi\frac{\overline{\omega}}{\omega}}$$

Denominando $\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$

* Solución general : $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = X.e^{-\xi\omega t}.\cos(\omega_D t - \theta) + \frac{f_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2+i2\xi\beta}e^{i\overline{\omega}t}$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{x(t) = X.e^{-\xi\omega t}.\cos(\omega_D t - \theta) + \frac{f_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\cdot e^{i(\omega t - \varphi)}}$$

siendo φ el desfase entre solución particular y la excitación:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

→ Desplazamiento estático: $X_{est} = \frac{f_0}{k}$

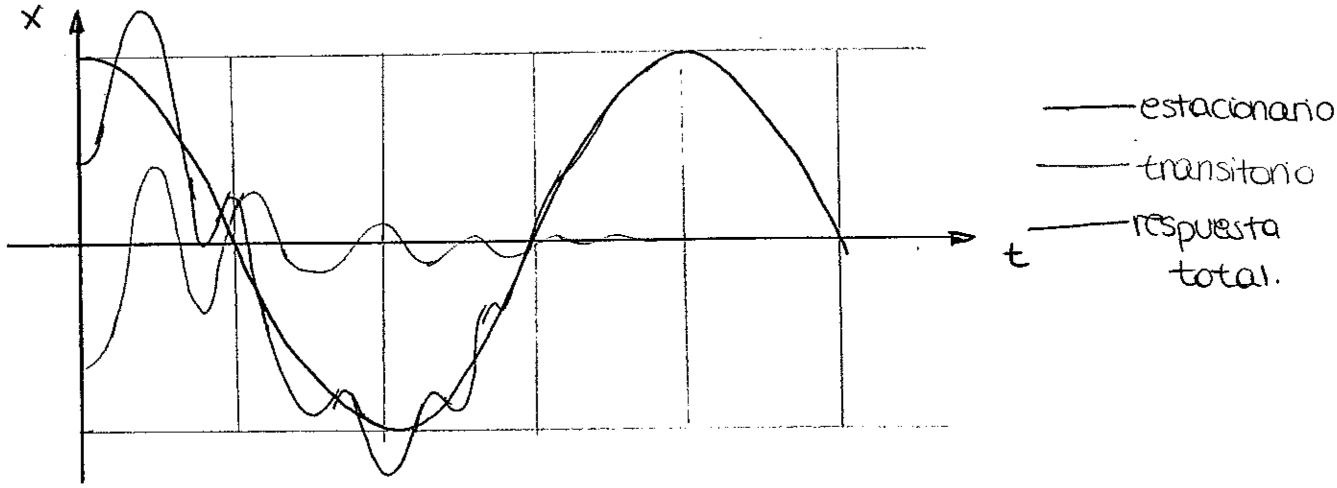
→ Factor de amplificación dinámica: $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$

* Solución para $f(t) = f_0.\cos\overline{\omega}t$: $\boxed{x(t) = X.e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta) + X_{est}.D.\cos(\overline{\omega}t - \varphi)}$

* Solución para $f(t) = f_0.\operatorname{sen}(\overline{\omega}t)$: $\boxed{x(t) = X.e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta) + X_{est}.D.\operatorname{sen}(\overline{\omega}t - \varphi)}$

Los valores de las constantes X y θ de las ecuaciones se obtienen al introducir las condiciones iniciales.

Las expresiones anteriores poseen dos términos claramente diferenciados: el primero se corresponde con la solución de la ecuación homogenea y representa la componente transitoria de la respuesta. El segundo término se corresponde con la solución particular y representa la parte estacionaria de la respuesta.



se asumirá como solución de las VIBRACIONES ARMÓNICAS sólo la componente estacionaria. (No hay que prescindir del estudio del transitorio en los primeros instantes del movimiento.)

$$\boxed{x(t) \simeq \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2+i.2\xi\beta} e^{i\bar{\omega}t}}$$

se define como función de transferencia del sistema

$$\boxed{H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \frac{1}{1-\beta^2+i2\xi\beta}}$$

Esta función compleja depende de los parámetros del sistema: masa, amortiguamiento y rigidez; también depende de la frecuencia de la excitación.

$$x(t) = H(\bar{\omega}) . f(t)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{H(\bar{\omega})} \longrightarrow x(t)$$

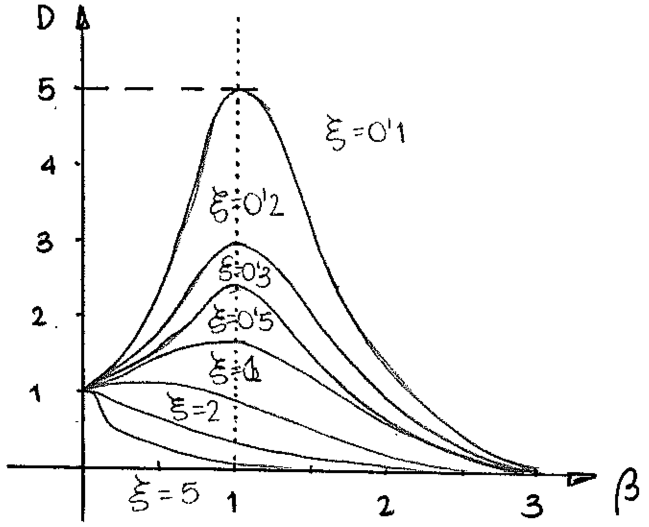
- El desplazamiento estático, es decir, Xest es el desplazamiento que tendría la masa concentrada si la carga fuera aplicada estáticamente.

$$x(t) = X_{est} \cdot D . e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

$$X_{din} = X_{est} \cdot D$$

X_{din} es la amplitud dinámica que representa la amplitud de la respuesta.

Puesto que la amplitud dinámica resulta sencilla de obtener, queda estudiar la variabilidad del factor de amplitud dinámica.



Considerando un valor habitual del amortiguamiento relativo, por ejemplo, $\xi = 0'1$. Para frecuencias de excitación próximas a la natural ($\beta=1$), la amplitud del desplazamiento resultante puede ser hasta cinco veces mayor que el desplazamiento estático.

Para evitar valores altos del factor de amplificación dinámica, existen dos alternativas:

1) Aumentar el amortiguamiento relativo.
2) Escoger los parámetros k y m del modelo para que las posibles frecuencias de excitación estén siempre lejos de la frecuencia natural.

Resonancia: cuando la frecuencia de excitación coincide con la natural del sistema ($\omega = \bar{\omega}$)

COMPROBACIÓN DE LA RESONANCIA.

Caso ideal de una vibración armónica del tipo $f(t) = f_0 \cos(\bar{\omega} t)$ sin amortiguamiento.

Para unas condiciones iniciales de movimiento nulas:

$$x(t) = \pm \frac{X_{est}}{1-\beta^2}(\cos\bar{\omega}t - \cos\omega t)$$

cuando $\beta \to 1$ (RESONANCIA)

$$x(t) = \lim_{\bar{\omega}\to\omega} \pm \frac{X_{est}(\cos\bar{\omega}t - \cos\omega t)}{1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} = \pm \frac{X_{est}\cdot\omega}{2} t \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

OBTENCIÓN DEL VALOR MÁXIMO

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0 \longrightarrow \beta = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow D_{máx} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Para valores pequeños del amortiguamiento relativo ($\xi \leq 0'1$)

$$\beta \approx 1 \quad y \quad D_{máx} \approx \frac{1}{2\xi}$$

En resonancia el desfase angular entre la excitación y la respuesta es siempre 90° para cualquier valor de ξ, excepto para $\xi = 0$. En este último caso, el desfase experimenta una discontinuidad en $\beta = 1$. (para $0 < \beta < 1$: $\varphi = 0°$ y para $\beta > 1$: $\varphi = 180°$).

REPRESENTACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO:

$$f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0.$$

$$f(t) = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$-m\ddot{x} = f_I e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

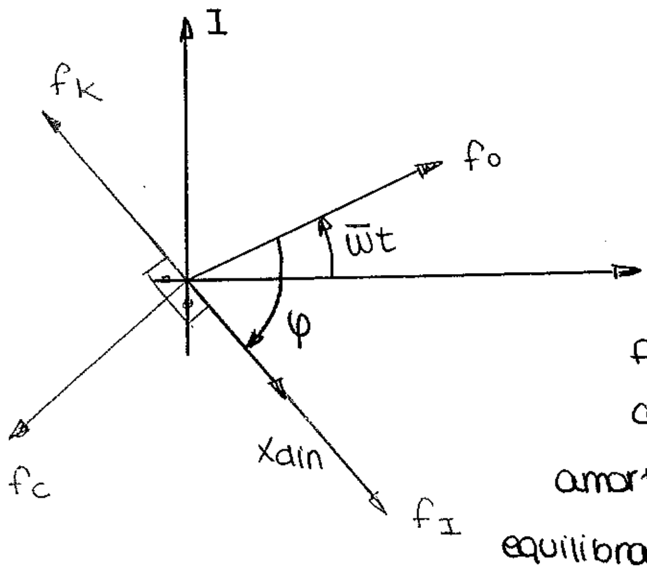
$$-c\dot{x} = f_c \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$-k.x = f_k . e^{i(\bar{\omega}t - \varphi - \pi)}$$

$$-m\ddot{x} = m\bar{\omega}^2 X_{din} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

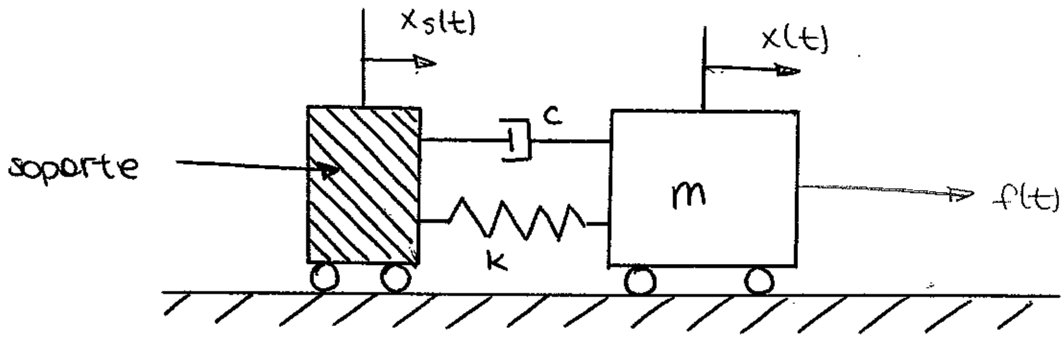
$$-c\dot{x} = -i\bar{\omega} c X_{din} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

$$-k.x = -k. X_{din} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$



En la condición de resonancia cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la excitación se equilibra perfectamente con la fuerza disipativa, y la fuerza de inercia con la elástica. Por esto, cuando el amortiguamiento es muy pequeño sólo puede equilibrarse la fuerza aplicada con un desplazamiento desmesurado.

RESPUESTA ANTE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO DEL SOPORTE



El desplazamiento absoluto de la masa viene dado por:

$$\boxed{x(t) = x_s(t) + x_r(t)}$$

siendo $x_r(t)$ el desplazamiento relativo de la masa respecto del soporte.

Aplicando la 2ª LEY DE NEWTON a la masa m:

$$f(t) - c.\dot{x}_r - k.x_r = m\ddot{x}$$

Luego la ecuación de movimiento en coordenadas absolutas queda:

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) + c\dot{x}_s + k.x_s}$$

Y en coordenadas relativas:

$$\boxed{m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = f(t) - m\ddot{x}_s}$$

Para el caso de que no haya fuerzas exteriores $(f(t)=0)$ y el soporte se mueva armónicamente según la ecuación $x_s(t) = X_s \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega}t$

$$-m\ddot{x}_s = m\bar{\omega}^2 X_s \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega}t)$$

La parte estacionaria de la respuesta correspondiente al movimiento relativo será:

$$x_r(t) = \beta^2 . X_s D. \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \varphi_r)$$

donde φ_r es el desfase angular en el mov. relativo.

La respuesta correspondiente al mov. absoluto de la masa será

$$x(t) = X_s \cdot \operatorname{sen} \bar{\omega}t + X_s \cdot \beta^2 D \operatorname{sen}(\bar{\omega}t - \varphi_r)$$

también puede expresarse como $x(t) = X \cdot sen(\omega t - \varphi)$ donde

$$X = X_s \cdot \sqrt{(1+\beta^2 D \cos\varphi_r)^2 + (\beta^2 D\, sen\varphi_r)^2}$$

y

$$\tan\varphi = \frac{\beta^2 D\, sen\varphi_r}{1+\beta^2 D\cos\varphi_r}$$

Desarrollando dichas ecuaciones se obtiene que:

$$\boxed{\begin{aligned} X &= X_s \cdot D\sqrt{1+(2\beta\xi)^2} \\ tg(\varphi) &= \frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2} \end{aligned}}$$

Obtenemos que

$$x(t) = X_s\, D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2} \cdot sen\left(\bar{\omega} t - arctg\left(\frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2}\right)\right)$$

10. Sistemas con un GDL: Integral de convolución

RESPUESTA ANTE LAS FUNCIONES IMPULSO, ESCALÓN Y RAMPA.

- Fuerza impulso: fuerza F de gran magnitud que actúa durante un periodo de tiempo Δt muy pequeño, de manera que el producto $F\Delta t$ sea una cantidad I finita ($I = F.\Delta t$). (I: impulso mecánico).

  Si el impulso está aplicado en a: $F(t-a) = I.\delta(t-a)$.

  *-Respuesta a la función impulso.

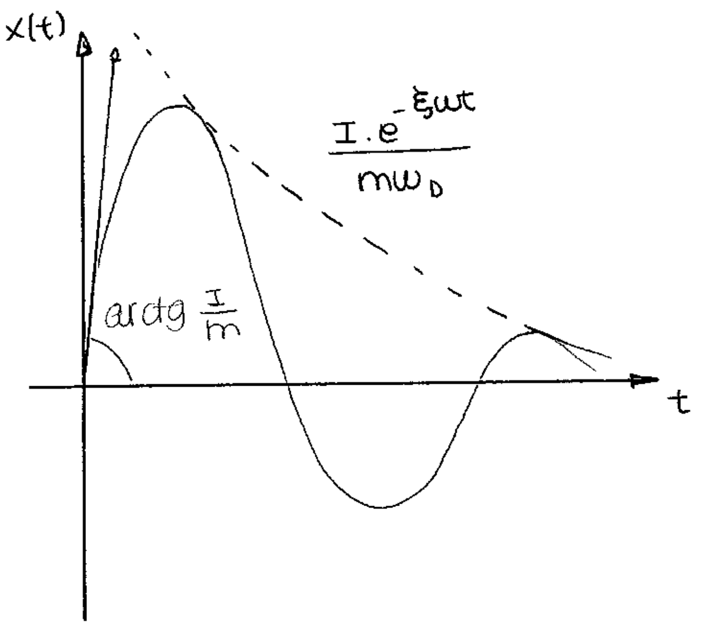
  La ecuación que gobierna el movimiento será: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+x(t)=F(t) = I.\delta(t)$

  La respuesta se obtiene de aplicar a la solución de las vibraciones libres, las condiciones iniciales con las que queda el sistema después de la aplicación del impulso, es decir, $x(0)=0$ y $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$

  De esta forma obtenemos $x(t) = \frac{Ie^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} \cdot \operatorname{sen}\omega_D t$

  Y en caso de que estuviera aplicado en $t=a$.

$$\boxed{x(t) = I.\frac{e^{-\xi\omega(t-a)}}{m\omega_D} \cdot \operatorname{sen}(\omega_D(t-a))}$$



Respuesta a función escalón:

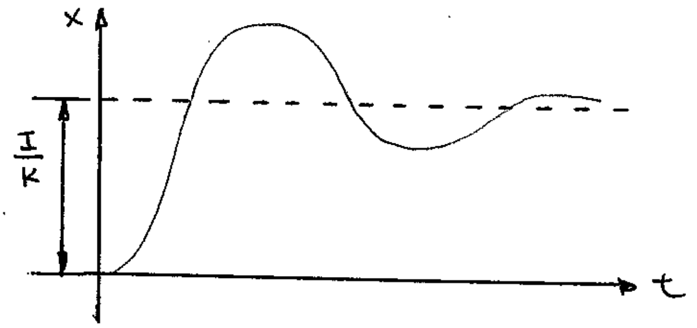
Basta con integrar la respuesta a la función impulso:

$$x(t)=\int_0^t \frac{I.e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D}\cdot sen(\omega_D t)\,dt = \frac{I}{k}\left[1-\frac{e^{-\xi\omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_D t-\theta)\right]$$

siendo $\theta = arctg\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$

o lo que es lo mismo: $x(t)=e^{-\xi\omega t}(A.\cos\omega_D t+B.\cos\omega_D t)+\frac{I}{k}$

$A=-\frac{I}{k}$ y $B=\frac{-\xi\omega I}{k\omega_D}$ (cond. iniciales nulas)

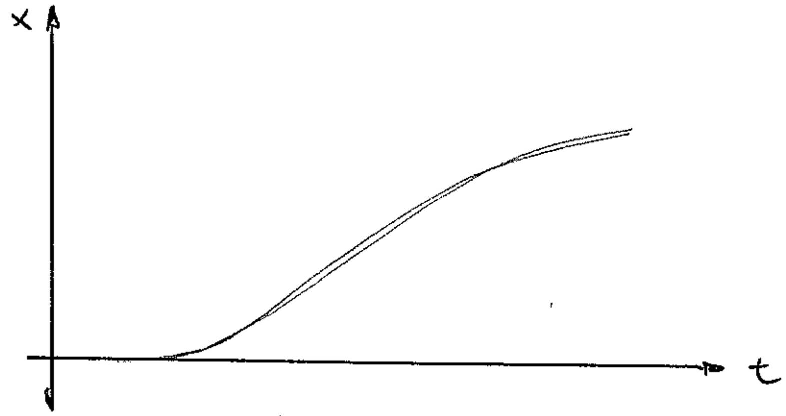


Respuesta a la función rampa:

La respuesta puede obtenerse integrando la función escalón:

$$x(t)=\int_0^t \frac{I}{k}-\int_0^t \frac{Ie^{-\xi\omega t}}{k\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_D t-\theta)\,dt = \frac{I}{k}t-\frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}sen(\omega_D t-2\theta)+2\theta\right]$$

siendo $\theta = arctg\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]$



SOLUCIÓN GENERAL CON COND. INICIALES NO NULAS.

Aplicación del principio de superposición.

- Aplicación del principio de superposición.

La respuesta global se divide en dos sumandos, el primero corresponde a la respuesta de las vibraciones libres sometidas a las condiciones iniciales impuestas. El segundo corresponde a la solución general x_G de las vibraciones forzadas pero con condiciones iniciales nulas. Es decir que por una parte se ha tenido en el efecto de las condiciones iniciales y por otro el de la fuerza exterior. Para el caso de las funciones escalón y rampa:

ESCALÓN: $$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left[x_0 \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\cdot \operatorname{sen}\omega_D t\right] + \frac{I}{K}\left[1 - e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\xi\omega}{\omega_D}\cdot \operatorname{sen}\omega_D t\right)\right]$$

RAMPA: $$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left[x_0 \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\cdot \operatorname{sen}\omega_D t\right] + \frac{I}{k}t - \frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t}\operatorname{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \operatorname{sen}2\theta\right]$$

RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE TIPO GENERAL (INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN)

Se va a obtener la respuesta del sistema frente a una fuerza $f(t)$ que varía de forma cualquiera con el tiempo. Esta fuerza está constituida por la suma de infinitas funciones impulso de valor $f(\tau)$ en cada instante $t=\tau$. En virtud del principio de superposición se obtendrá mediante la suma de las respuestas del sistema ante los infinitos impulsos diferenciales aplicados en instantes anteriores.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \operatorname{sen}[\omega_D(t-\tau)]\,d\tau.$$

Es conocida como la integral de convolución. Si en el momento de aplicación de la fuerza el sistema se encuentra en condiciones iniciales no nulas habría que añadir el correspondiente transitorio.

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left[x_D \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\cdot \operatorname{sen}\omega_D t\right] + \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \operatorname{sen}[\omega_D(t-\tau)]\,d\tau$$

11. Sistemas con 1GDL: Transformada de Fourier

- La mayoría de las acciones que soportan muchos sistemas mecánicos son periódicas. ⟶

⟶ desarrollar la excitación periódica en SERIES DE FOURIER (términos armónicos). La superposición de las respuestas de las componentes de la serie daría como resultado la respuesta a la excitación periódica.

EXCITACIONES PERIÓDICAS: APLICACIÓN DE SERIES DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA.

A) Obtención de la forma compleja de las series de Fourier.

Sea la ecuación de movimiento de un sistema mecánico de 1GDL:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k.x(t) = f(t).$$

donde $f(t)$ es una funcióne periódica de periodo T.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j.\cos j\omega_0 t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j.\operatorname{sen} j\omega_0 t$$

donde
$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \text{ (frecuencia fundamental)} \\ a_j = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos(j\omega_0 t)\,dt \quad j=0,1,2\ldots \\ b_j = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\operatorname{sen}(j\omega_0 t)\,dt \quad j=1,2,3\ldots \end{cases}$$

La serie de Fourier obtenida es convergente y tiene por suma el valor de la función $f(t)$ en los puntos en los que ésta es continua, y el promedio de los valores $f(\tau^+)$ y $f(\tau^-)$ en cada punto τ de discontinuidad.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left[F_j e^{ij\omega_0 t} + \bar{F}_j e^{-ij\omega_0 t}\right]$$ donde $F_j = \frac{1}{2}\left(a_j + \frac{b_j}{i}\right) = \frac{1}{2}(a_j - ib_j)$ y

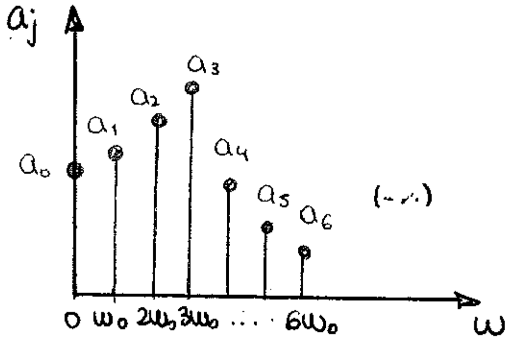
$\bar{F}_j$ es su conjugado.

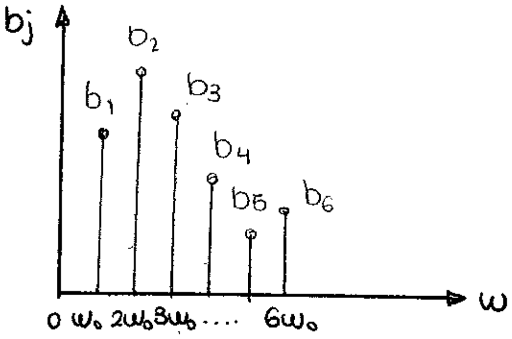
$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j \cdot e^{ij\omega_0 t}$$ Las constantes F_j tienen la forma $$F_j=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ij\omega_0 t}\,dt$$

Las constantes complejas F_j indican la composición en frecuencia de la función periódica.

B) Espectro discreto de frecuencias.

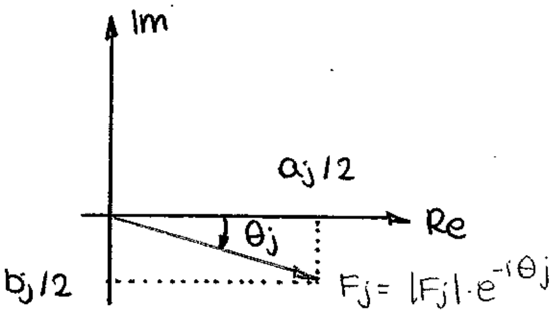
Los términos de la serie de Fourier pueden agruparse según su frecuencia $j\omega_0$. Dichos términos así agrupados se denominan armónicos de la función periódica $f(t)$. El valor de los coeficientes a_j y b_j son una medida de la importancia del armónico $j\omega_0$ en relación con los demás.





c) Interpretación geométrica de la forma compleja de las series de fourier.

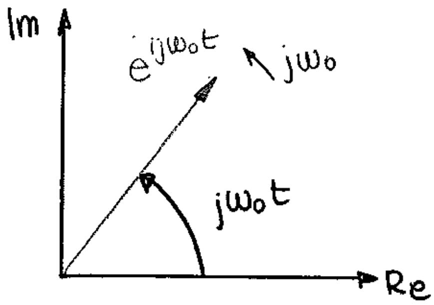
La función $f(t)$ es la suma de los diferentes productos $F_j \cdot e^{ij\omega_0 t}$ siendo F_j números complejos.



$$|F_j|=\frac{1}{2}\sqrt{a_j^2+b_j^2}$$

$$\theta_j=\operatorname{arctg}\left(\frac{b_j}{a_j}\right)$$

Los términos complejos $e^{ij\omega_0 t}$ son vectores giratorios.



Los términos imaginarios de $f(t)$ se anulan para cada término j, de esta forma:

$$\boxed{f(t)=F_0+\sum_{j=1}^{\infty} 2\,|F_j|\cdot\cos(j\omega_0 t-\theta_j)}$$

d) Obtención de la respuesta del sistema.

Superposición $\longrightarrow$ $x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j H(j\omega_0) \cdot e^{ij\omega_0 t}$ donde $H(j\omega_0)$ es la función de transferencia del sistema.

- EXCITACIONES NO PERIÓDICAS: APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

A) Obtención de la respuesta:

Considerando como punto de partida el método de cálculo de la respuesta frente a una excitación periódica de periodo T, cuando $T \to \infty$, la función deja de ser periódica: correspondencia de parámetros:

	$T \to \infty$	
ω_0	$\Rightarrow$	$d\omega$
$j\omega_0$		ω
$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$		$\frac{d\omega}{2\pi}$

Cuando $T \to \infty$, $j\omega_0$ pasa a ser una variable continua, ω y en el límite las funciones discretas a_j y b_j se convierten en funciones continuas.

Para obtener la respuesta a menudo es necesario realizar integraciones de contorno en el plano complejo.

B) Consideraciones adicionales. Interpretación de la transformada de Fourier.

Si se comparan las expresiones de $f(t)$ correspondientes al caso discreto y al caso continuo:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j \cdot e^{ij\omega_0 t} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

F_j es la contribución del armónico j a la función $f(t)$ en el caso de que esta sea una función periódica, la cantidad $\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$ constituye la contribución de cada intervalo de frecuencia $[\omega, \omega + d\omega]$ a la función no periódica $f(t)$

F_j consta de una parte real a_j y una parte imaginaria b_j; así como $F(\omega)$ consta de una parte real $A(\omega)$ y una compleja $B(\omega)$.

$$a_j : \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\pi} A(\omega) d\omega$$

$$b_j : \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} B(\omega) d\omega$$

CASO DISCRETO $\longrightarrow$	CASO CONTINUO
a_j	$A(\omega).\frac{d\omega}{\pi}$
b_j	$B(\omega).\frac{d\omega}{\pi}$
F_j	$F(\omega).\frac{d\omega}{2\pi}$

Puede concluirse que: $F(\omega)= A(\omega)-iB(\omega)$.

APLICACIÓN PRÁCTICA: CÁLCULO DE LA RESPUESTA DE LA FUNCIÓN IMPULSO.

Sea $f(t)$ la excitación definida por un impulso unitario en $t=0$: $f(t)= \delta(t)$

La respuesta a la función impulso se calcula: $\{X(\omega)= H(\omega)\}$

$$h(t)= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

Recíprocamente se cumplirá que: $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-i\omega t}\,dt$

de esta forma, a partir de $h(t)$ y de $H(\omega)$ se puede calcular la respuesta a una excitación de tipo general.

12. Sistemas con 1GDL: aislamiento de vibraciones

METODOS EXPERIMENTALES PARA LA MEDIDA DEL AMORTIGUAMIENTO.

A) Método del decremento logarítmico.

* Procedimiento más simple: consiste en sacar al sistema de su posición de equilibrio mediante la imposición de alguna condición inicial para después dejarlo vibrar libremente. A continuación se mide el desplazamiento del sistema en dos instantes separados por n ciclos.

$$\begin{cases} x_i = e^{-\xi \omega t_i} \cdot X \cdot \cos(\omega_D \cdot t_i - \theta) \\ x_{i+n} = e^{-\xi \omega t_{i+n}} \cdot X \cos(\omega \cdot t_{i+n} - \theta) \end{cases}$$

con $t_{i+n} = t_i + nT_D$, siendo $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$

$$\frac{x_i}{x_{i+n}} = e^{\xi \omega n T_D}$$

$$\delta = L \frac{x_i}{x_{i+n}} = \xi \omega n \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi n \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta}}}$$

donde δ es el decremento logarítmico. Si como es frecuente $\xi \leq 0{,}1$ puede hacerse la aproximación

$$\xi \simeq \frac{\delta}{2\pi n}$$

B) Método de la amplificación a la frecuencia de resonancia.

Se basa en la curva de amplificación dinámica.

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$. Para la condición de resonancia $\overline{\omega} = \omega$ y $\beta = 1$

$$D(\text{resonancia}) = D_R = \frac{1}{2\xi}$$

El método consiste en obtener el factor de amplificación dinámica en la condición de resonancia: $D_R = \frac{X_R}{X_{est}}$. Para ello se mide el desplazamiento del sistema en condición de resonancia, X_R, y el desplazamiento estático a frecuencia cero, X_{est}.

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2D_R}}$$

En la práctica resulta complicado ajustar la excitación a la frecuencia de resonancia. Es más sencillo obtener el desplazamiento máximo $D_{máx}$:

$$D_{máx} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{X_{máx}}{X_{est}}$$

En el caso de que $\xi \ll 1$: $D_{máx} = \frac{1}{2\xi} \rightarrow \boxed{\xi \approx \frac{1}{2D_{máx}}}$

cuando el amortiguamiento relativo es pequeño $D_{max} \approx D_R$.

C) Método de la anchura de banda

Determina el factor de amortiguamiento a partir de las frecuencias a las cuales el desplazamiento alcanza un valor igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ veces su valor en resonancia X_R, es decir, $D_R X_{es}/\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta^4 + 2(2\xi^2 - 1)\beta^2 + (1 - 8\xi^2) = 0. \text{ (Ec. bicuadrada).}$$

$$\begin{cases} \beta_1^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \\ \beta_2^2 = 1 - 2\xi^2 + 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \end{cases}$$

$$(\beta_2^2-\beta_1^2) = 4\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

si el amortiguamiento es pequeño $\xi < 0'1$:

$$\xi = \frac{\beta_2^2-\beta_1^2}{4} = \frac{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2+\beta_1)}{4}$$

como β_1 y β_2 son valores prácticamente equidistantes de $\beta=1$:

$$\frac{\beta_2+\beta_1}{2} \approx 1$$

por tanto

$$\xi \approx \frac{\beta_2-\beta_1}{2} \quad \text{y por tanto} \longrightarrow \boxed{\xi = \frac{\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1}{2\omega}}$$

D) Método de la medida en resonancia.

Se excita la estructura con una fuerza armónica $f(t)=f_0.\text{sen}(\bar{\omega}t)$ mediante un excitador electromagnético. Consecuencia de esto, un punto de la viga vibra armónicamente según la ley $x(t)=X.\text{sen}(\bar{\omega}t-\varphi)$

El método consiste en someter al sistema a una excitación armónica de modo que se encuentre en condición de resonancia $(\omega=\bar{\omega})$. En esta condición el desfase entre la excitación y la respuesta es $\varphi=\frac{\pi}{2}$, la representación en el osciloscopio es una elipse cuyos semiejes coinciden con los ejes coordenados. Cuando el osciloscopio reconoce la forma de la elipse el frecuenciómetro digital mide la frecuencia.

En resonancia se cumple que $\boxed{c=\frac{f_0}{\omega X_R}}$ donde f_0 y x_R son las amplitudes registradas en el osciloscopio y ω es la frecuencia de resonancia del sistema.

E) Método de la energía perdida por ciclo.

Igual que el anterior pero se calcula el área encerrada por la elipse, que coincide con la energía disipada en un ciclo vibratorio.

$$\boxed{c=\frac{W_D}{\pi\omega \cdot X_R^2}}$$

F) Amortiguamiento equivalente

Las características vibratorios de los sistemas físicos con amortiguamientos de coulomb o el estructural son bastante similares a las de los sistemas que tienen amortiguamiento viscoso lineal. Se puede obtener por tanto el amortiguamiento equivalente

$$\boxed{C_{eq} = \frac{\pi \cdot f_0^2}{\omega W_D}}$$

AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO O ESTRUCTURAL

- Amortiguamiento producido por la fricción entre planos internos que deslizan cuando el material sufre deformación.

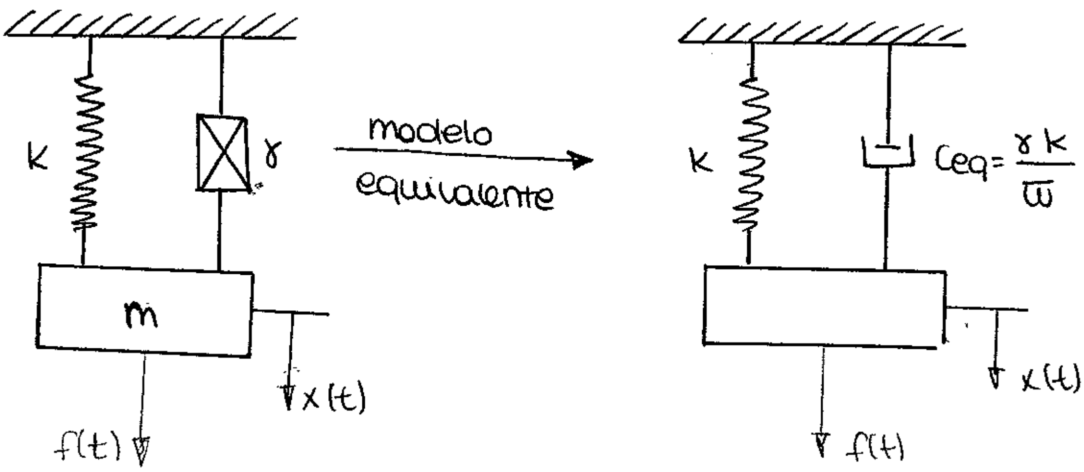
$$W_D = \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot X^2$$

X = amplitud del desplazamiento

k = rigidez equivalente

γ = constante adimensional: factor de amortiguamiento estructural.

$$\boxed{C_{eq} = \frac{\gamma k}{\omega}}$$



La ecuación del movimiento será del tipo $m\ddot{x} + \frac{\gamma k}{\omega} \cdot \dot{x} + k \cdot x = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega} t}$

ya que suponemos $f(t)$ una fuerza armónica.

La solución de la ecuación diferencial es del tipo:

$$x(t) = A \cdot e^{i\bar{\omega}t} \longrightarrow \dot{x}(t) = A i\bar{\omega} \cdot e^{i\bar{\omega}t} = i\bar{\omega} \cdot x(t)$$

$m\ddot{x} + k(1+\gamma i) \cdot x = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t}$: esta ecuación del movimiento está más de acuerdo con la hipótesis de amortiguamiento estructural.

La solución estacionario será: $\boxed{x_E(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2+\gamma i} e^{i\bar{\omega}t}}$

y la función de transferencia $H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2+\gamma i}$

La ecuación correspondiente a la respuesta estacionaria puede expresarse por:

$$x_E(t) = \frac{f_0}{k} D \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} \quad \text{siendo } D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \gamma^2}}$$

CONTROL Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES.

- Métodos pasivos para el control de vibraciones

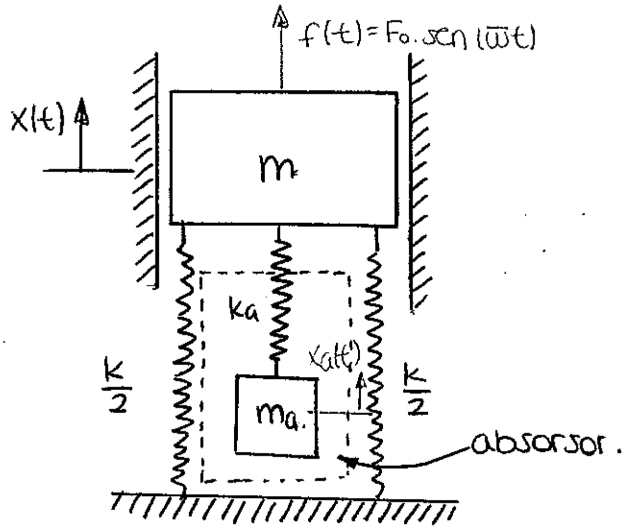
* CONTROL DE LAS FRECUENCIAS NATURALES: cuando la frecuencia de la fuerza dinámica actúa en las cercanías de la resonancia, el sistema sufre grandes deformaciones que pueden generar tensiones altas en el material. Es fundamental conseguir que las frecuencias de excitación estén alejadas de las frecuencias de resonancia del sistema.

En la mayoría de los casos la frecuencia de excitación no puede ser modificada luego hay que actuar sobre la frecuencia natural del sistema que depende de la masa y rigidez del mismo.

* INTRODUCCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO: en sistemas que trabajan con un amplio rango de velocidades no es posible evitar la resonancia en todas las condiciones de trabajo. En estos casos se debe introducir amortiguamiento en el sistema para evitar una excesiva amplificación dinámica.

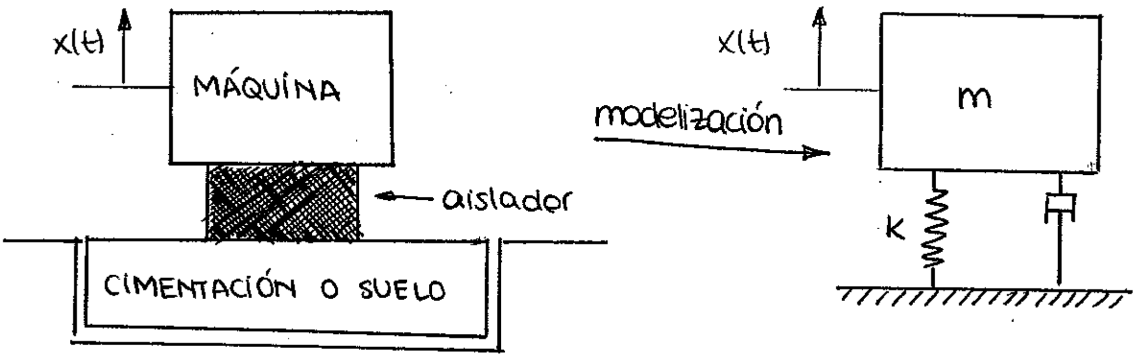
* ABSORSORES: en casos en que la frecuencia excitadora es muy cercana a la frecuencia natural del sistema existe una alternativa, consistente en utilizar un absorsor o neutralizador de vibraciones. Es un sistema formado por un muelle y por una

masa, que unido al sistema mecánico hace posible la reducción de vibraciones. Al añadir el absorsor, el nuevo sistema posee dos grados de libertad y por tanto, dos frecuencias naturales. Se dice que el absorsor se ha sintonizado a cierta frecuencia de excitación cuando se han ajustado sus parámetros para que el factor de amplificación dinámica sea mínimo.



◎ Métodos pasivos para el aislamiento de vibraciones. Transmisibilidad.

El elemento AISLANTE puede tener dos funciones distintas: reducir las vibraciones transmitidas desde la máquina a la cimentación o reducir las vibraciones que transmite la cimentación a la máquina. La transmisibilidad hace referencia a la efectividad en ambos casos.



◎ Fuerza armónica $f(t) = f_0 . sen(\bar{\omega} t) \longrightarrow T_r = \frac{f_T}{f_0} = \frac{\text{módulo de la f.transmitida}}{\text{módulo de la f.excitadora.}}$

La respuesta de la máquina frente a dicha excitación es:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} D \, sen(\bar{\omega} t - \varphi)$$

Así, la transmisibilidad adopta la forma $Tr = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

considerando ahora que a la máquina le llegue una vibración a través de la cimentación, suponiendo que dicha cimentación posee un movimiento armónico $x_s(t) = X_s \operatorname{sen}(\omega t)$ la transmisibilidad tomaría la forma

$$Tr = \frac{X}{X_s} = \frac{\text{amplitud de la respuesta}}{\text{amplitud del movimiento}}$$

De esta forma $Tr = D\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}$

La mejor manera de reducir la vibración entre la máquina y la cimentación es disminuir la frecuencia natural del sistema para situarse en la zona de aislamiento de vibraciones. En esta zona, cuanto menor sea el amortiguamiento relativo ξ, menor será la transmisibilidad.

Si no fuera posible conseguir el valor de β necesario para situarse en la zona de aislamiento de vibraciones se deberá aumentar el amortiguamiento relativo para conseguir valores de transmisibilidad suficientemente bajos.

Métodos activos para el aislamiento y control de vibraciones.

* Son aquellos que eliminan o reducen los efectos indeseables de las vibraciones recurriendo a un sistema de actuación externo. La ventaja es la capacidad de adaptación a diferentes condiciones de trabajo permitiendo la atenuación de vibraciones en un amplio rango de frecuencias y tipos de perturbaciones. El aislamiento activo modifica alguno de los parámetros mecánicos del sistema.

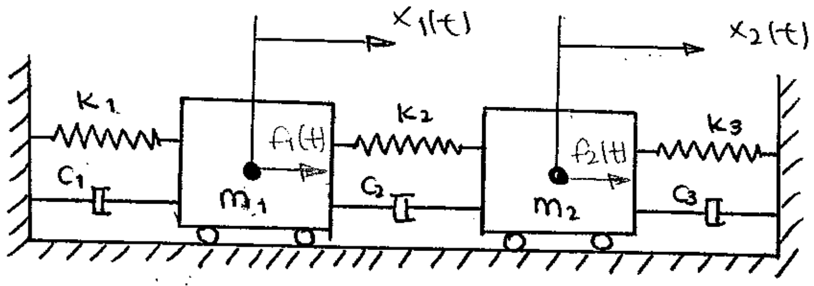
* <u>CONTROL ACTIVO MEDIANTE FUERZAS</u>: Las características mecánicas del sistema no se alteran. Se auxilia de una fuente de potencia externa que genera esfuerzos sobre la máquina tendentes a disminuir la amplitud de la vibración.

13. Sistemas con varios GDL. Vibraciones libres

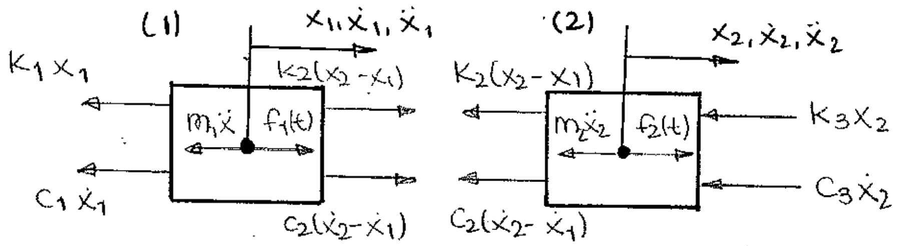
En el caso de los sistemas con varios grados de libertad no siempre se saca a este sistema de su posición de reposo se produce una vibración si no únicamente cuando las condiciones iniciales cumplen unas determinadas relaciones.

En el caso particular de sistemas con 2 gdl's, cuando vibran son posibles dos frecuencias naturales de vibración; lo cual implica que existen dos frecuencias de resonancia y dos valores máximos en la curva de amplificación dinámica. En la práctica muchos sistemas pueden ser modelizados con 2 gdl.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA UN SISTEMA DE 2GDL.



Planteamos el equilibrio de fuerzas suponiendo $x_2 > x_1$ y $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$



$$\begin{cases} -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - m_1\ddot{x}_1 + k_2(x_2-x_1) + c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + f_1(t) = 0. \\ -k_2(x_2-x_1) - c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - m_2\ddot{x}_2 + f_2(t) - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Reordenando los términos:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\cdot\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\cdot\dot{x}_1 + (c_2+c_3)\cdot\dot{x}_2 - k_2\cdot x_1 + (k_2+k_3)x_2 = f_2 \end{cases}$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\}}$$

- Propiedades de las matrices:
  1) son simétricas
  2) La matriz de masa ha de ser definida positiva.
  3) Matriz de masa concentrada → matriz de masa diagonal. (≠ matriz de masa consistente)
  4) Matriz de rigidez es definida positiva o semidefinida positiva.
  5) Sistema estáticamente desacoplado → matriz de rigidez diagonal. Si además la matriz de masa es concentrada → sistema dinámicamente desacoplado.

VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Ecuación general con dos grados de libertad:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A) Frecuencias naturales y modos de vibración.

Considerando que el sistema tenga un movimiento armónico síncrono, es decir, que las dos masas vibren en fase con la misma frecuencia:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega t) \\ x_2 = X_2 \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 \\ k_{12}-m_{12}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ → sistema homogeneo con solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

Desarrollando el determinante llegamos a una ecuación bicuadrada de la forma

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

Las dos raíces ω_1^2 y ω_2^2 son siempre positivas (o nulas), por lo tanto existen dos valores de la frecuencia ω con los que el sistema puede vibrar de manera síncrona. ω_1 y ω_2. A estas frecuencias se las denomina frecuencias naturales del sistema.

Las frecuencias naturales del sistema son las raíces cuadradas de los valores propios y las correspondientes amplitudes de los grados de libertad (modos de vibración) son los vectores propios asociados.

Dichos modos de vibración se obtienen para cada frecuencia natural.

$$\omega_1 \longrightarrow \frac{X_1^1}{X_2^1} = \frac{-k_{12}+\omega_1^2 m_{12}}{k_{11}-\omega_1^2 m_{11}} = -\frac{k_{22}-\omega_1^2 m_{22}}{k_{12}-\omega_1^2 m_{12}} \longrightarrow (X_1^1, X_2^1)$$

$$\omega_2 \longrightarrow \frac{X_1^2}{X_2^2} = -\frac{k_{12}-\omega_2^2 m_{12}}{k_{11}-\omega_2^2 m_{11}} = -\frac{k_{22}-\omega_2^2 m_{22}}{k_{12}-\omega_2^2 m_{12}} \longrightarrow (X_1^2, X_2^2)$$

Cuando el sistema mecánico es real, el número de gdl es infinito y también lo es su número de frecuencias naturales y modos de vibración.

B) Propiedades de los modos de vibración.

* Ortogonales entre sí respecto de las matrices de rigidez y masa.

$$\{X^1\}^T[M]\{X^2\}=0 \; ; \; \{X^1\}^T[K]\{X^2\}=0.$$

Los modos pueden NORMALIZARSE

C) Solución general para las vibraciones libres no amortiguadas.

Para un sistema de ecuaciones lineales, la expresión de la solución general adopta la siguiente forma.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11}+m_{11}s^2 & k_{12}+m_{12}s^2 \\ k_{12}+m_{12}s^2 & k_{22}+m_{22}s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

La solución distinta de la trivial viene dada por la anulación del determinante:

$$a.s^4+b.s^2+c=0$$

cuyas raíces son $s_1=i\omega_1$; $s_2=-i\omega_1$; $s_3=i\omega_2$; $s_4=-i\omega_2$

La solución general puede explesarse como:

$$\boxed{\{x(t)\} = A\begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix}\cos\omega_1 t + B\begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_1 t + C\begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix}\cos\omega_2 t + D\cdot\begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_2 t}$$

o

$$\boxed{\{x(t)\} = F_1\begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix}\cos(\omega_1 t - \theta_1) + F_2\begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix}\cos(\omega_2 t - \theta_2)}$$

para que ubre cond. iniciales que anulen uno de ellos

↓

condiciones iniciales correspondientes a los modos

COORDENADAS MODALES O NATURALES.

- Matriz de modos:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

cumple las siguientes propiedades → $[X]^T[M][X] = [m_j^M]$

$[X]^T[K][X] = [k_j^M]$

Donde los términos k_j^M y m_j^M son respectivamente rigidez modal y masa modal correspondientes al modo j.

Realizando el cambio de coordenadas: $\{x\} = [X]\{y\}$

$$[M][X]\{\ddot{y}\} + [K][X]\{y\} = \{0\}$$

$$\boxed{[m_j^M]\{\ddot{y}\} + [k_j^M]\{y\} = \{0\}}$$

si la transformación se realiza con la matriz de modos normalizada:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 \cdot y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 \cdot y_2 = 0. \end{cases}$$

Por tanto, cada término $\sqrt{\dfrac{k_j^M}{m_j^M}}$ es precisamente la frecuencia natural ω_j asociada al correspondiente nodo j.

De esta forma se reduce un problema de 2 gdl a dos de 1 gdl. A las coordenadas $\{y(t)\}$ se las denomina coordenadas modales o naturales.

se han de transformar así mismo las condiciones iniciales a coordenadas naturales.

$$\{y_0\} = [X]^{-1}\{x_0\}$$

$$\{\dot{y}_0\} = [X]^{-1}\{\dot{x}_0\}$$

En el caso de que los modos estén normalizados: $[X]^{-1} = [X]^T[M]$

En caso contrario: $[X]^{-1} = \left[\frac{1}{m_j^M}\right][X]^T[M]$

VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS.

A) Obtención de la respuesta.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sustituyendo la solución general:

$$\begin{bmatrix} m_{11}\cdot s^2 + c_{11}\cdot s + k_{11} & m_{12}\cdot s^2 + c_{12}s + k_{12} \\ m_{12}s^2 + c_{12}s + k_{12} & m_{22}\cdot s^2 + c_{22}\cdot s + k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Igual que antes, tendrá una solución distinta de la trivial en caso de que la matriz tenga determinante nulo. Esto da lugar a una ecuación de 4° orden del tipo $As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$ donde A, B, C, D y E son constantes reales.

La respuesta será de la forma.

$$x(t) = F_1 \cdot e^{at}\begin{Bmatrix} A\cos(bt + \varphi_A - \theta_1) \\ B\cos(bt + \varphi_B - \theta_1) \end{Bmatrix} + F_2 e^{ct}\begin{Bmatrix} C\cos(dt + \varphi_C - \theta_2) \\ D\cdot\cos(dt + \varphi_D - \theta_2) \end{Bmatrix}$$

En caso de que las condiciones iniciales se correspondan con los desplazamientos de un modo, el sistema vibrará con su correspondiente frecuencia amortiguada. Pero los grados de libertad vibrarán desfasados.

B) Amortiguamiento proporcional.

En el caso de vibraciones libres amortiguadas el cambio a coordenadas modales no garantiza el desacoplamiento de las ecuaciones si se intenta realizar este cambio se obtiene

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{y}\}+[X]^T[C][X]\{\dot{y}\}+[X]^T[K][X]\{y\}=\{0\}$$

teniendo en cuenta las propiedades de los modos:

$$[I]\{\ddot{y}\}+[X]^T[C][X]\{\dot{y}\}+[\omega_j^2]\{y\}=\{0\}$$

esta transformación no tiene porqué diagonalizar la matriz C. Cuando no es posible su diagonalización se dice que el amortiguamiento es no proporcional. Hay ciertos sistemas cuyo amortiguamiento sí permite desacoplar las ecuaciones del movimiento, dicho amortiguamiento es conocido como amortiguamiento proporcional. Las condiciones en las que actúa el amortiguamiento en los sistemas reales es poco conocida $\longrightarrow$ HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS.

- Adoptar para el amortiguamiento un modelo matemático que permita diagonalizar [C]. Un procedimiento usual es ajustar $[C]=\alpha[K]+\beta[M]$. El amortiguamiento obtenido de esta manera se denomina amortiguamiento de Rayleigh.

Obtendremos que:

$$[X]^T[C][X]=\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}\omega_1^2&0\\0&\omega_2^2\end{bmatrix}=[\alpha\omega_i^2+\beta]$$

14. sistemas con varios GDL: vibraciones forzadas.

VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS. EXCITACIÓN ARMÓNICA.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega} t}$$

una solución particular tendría la forma

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega} t}$$

operando

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ f_2 & k_{22} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{vmatrix}}{|D|} \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\bar{\omega}^2 & f_1 \\ k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 & f_2 \end{vmatrix}}{|D|}$$

para $\bar{\omega} = \omega_1$ o $\bar{\omega} = \omega_2$ el determinante $|D|$ se anula

VIBRACIONES AMORTIGUADAS. EXCITACIÓN ARMÓNICA.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega} t}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + ic_{11}\bar{\omega} - m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12} - ic_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12} + ic_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22} - ic_{22}\bar{\omega} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

La solución queda de la forma.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |X_1| e^{i\varphi_1} \\ |X_2| e^{i\varphi_2} \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega} t} = \begin{Bmatrix} |X_1| e^{i(\bar{\omega} t + \varphi_1)} \\ |X_2| e^{i(\bar{\omega} t + \varphi_2)} \end{Bmatrix}$$

Es imposible que estas magnitudes $|X_1|$ y $|X_2|$ se hagan infinitas para valores reales de $\bar{\omega}$, pero ambas presentan dos máximos en las inmediaciones de las frecuencias naturales ω_1 y ω_2.

Se observa que el desfase es diferente para cada GDL.

Procedimiento válido para sistemas de pocos gdl.

RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE TIPO GENERAL

* Sistema no amortiguado o con amortiguamiento proporcional.

Realizando un cambio de variable:

$$[X]^T[M][X]\{\ddot{y}\} + [X]^T[C][X]\{\dot{y}\} + [X]^T[K][X]\{y\} = [X]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} m_1^M & 0 \\ 0 & m_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^M & 0 \\ 0 & c_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^M & 0 \\ 0 & k_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^M \\ f_2^M \end{Bmatrix}$$

En el caso de que estén normalizados respecto de la matriz masa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^M(t) \\ f_2^M(t) \end{Bmatrix}$$

Que es un sistema desacoplado de dos ecuaciones que se resuelve independientemente. Se obtendría la solución en coordenadas reales deshaciendo el cambio.

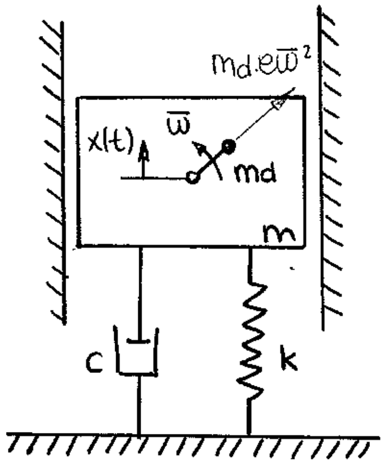
* Sistema con amortiguamiento no proporcional.

No queda otro remedio que realizar la integración numérica.

APLICACIÓN PRÁCTICA: ABSORSORES.

A) Desequilibrio en máquinas. Factor de amplificación por desequilibrio.

- El desequilibrio de componentes mecánicos constituye la fuente más importante de problemas vibratorios en máquinas rotativas.



El sistema se ve sometido a una fuerza de valor: $f_0 = m_d \cdot e\bar{\omega}^2$ que gira con una velocidad angular $\bar{\omega}$.

La componente vertical puede expresarse como:

$$f_v(t) = m_d e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega} t)$$

que es la componente que excita el grado de libertad vertical.

La respuesta estacionaria del sistema sería

$$x(t) = \frac{m_d e \bar{\omega}^2}{k} D \cdot \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$D_d = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$ que se conoce como factor de amplificación por desequilibrio. siendo su máximo valor

$$D_{d,max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$ para el valor de $$\beta_{d,max} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

Para valores de ξ muy pequeños ($\xi \leq 0'1$)

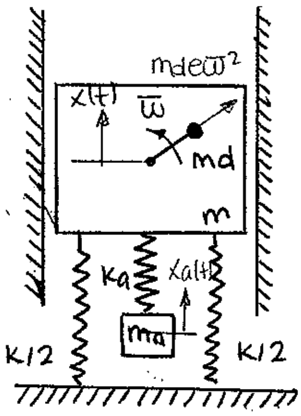
$$D_{d,máx} = \frac{1}{2\xi} \quad \text{para} \quad \beta_{d,max} \approx 1$$

Para el caso en que el sistema no tenga amortiguamiento:

$$x_d = e \frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{|1-\beta^2|}$$

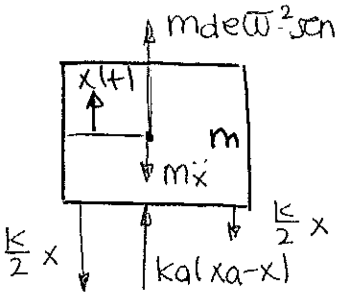
B) Adición de un absorsor.

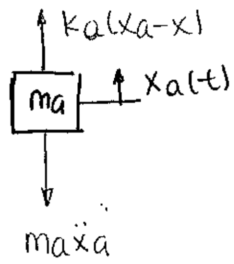
considerando el sistema no amortiguado:



sistema de dos grados de libertad. suponiendo

$x_a(t) > x(t)$





EQUILIBRIO: $m\ddot{x} + Kx + K_a \cdot x - K_a \cdot x_a = m_d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot sen(\bar{\omega} t)$

$m_a \ddot{x}_a + k_a \cdot x_a - k_a \cdot x = 0.$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a + k & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_d e \bar{\omega}^2 sen(\bar{\omega} t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La amplitud X del sistema se anularía para

$$m_d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 (k_a - m_a \bar{\omega}^2) = 0$$

Lo que conduce a $\bar{\omega} = \sqrt{\dfrac{k_a}{m_a}}$

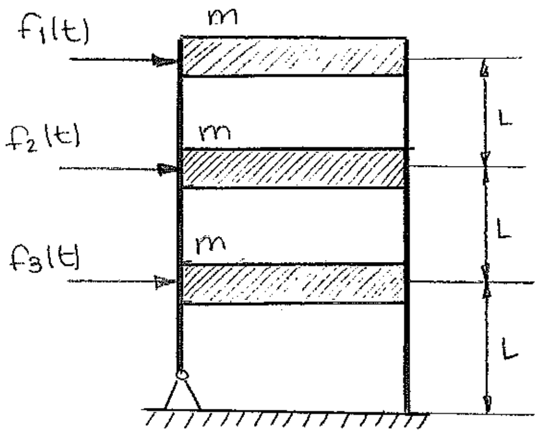
cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia de resonancia del absorsor ω_a, este está sintonizado a la frecuencia del sistema.

Bajo esta condición,

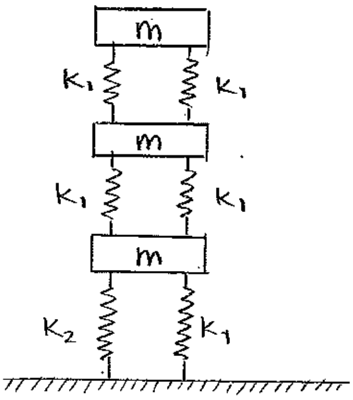
$$|X_a| = \frac{m_d e}{m_a} \quad y \quad f_o = -k_a \cdot X_a$$

Problemas propuestos.

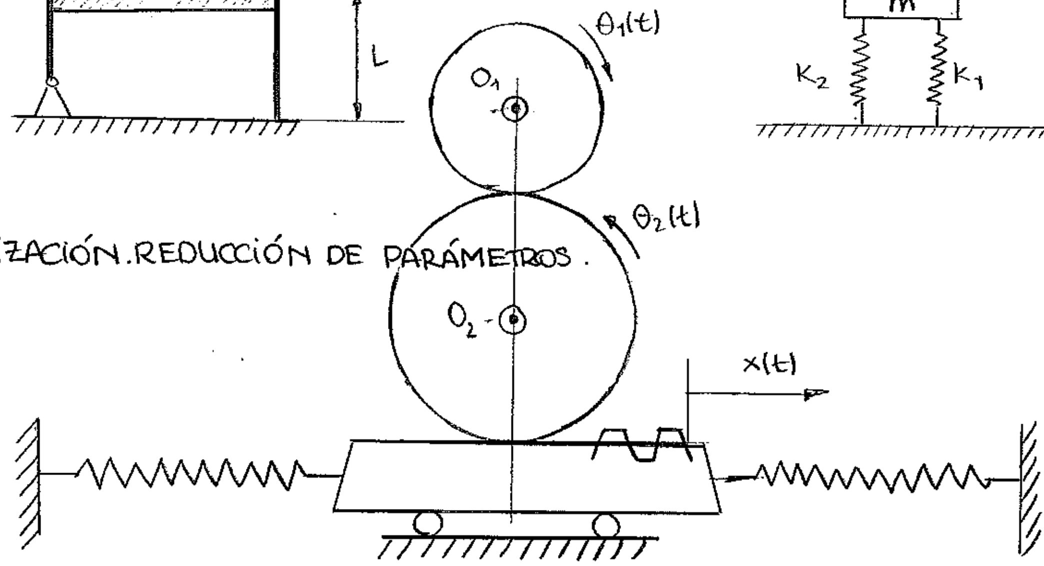
1) MODELIZACIÓN. REDUCCIÓN DE PARÁMETROS.



Sistema de parámetros concentrados.



2) MODELIZACIÓN. REDUCCIÓN DE PARÁMETROS.



Para obtener la inercia reducida buscamos la equivalencia de energías cinéticas.

$$\frac{1}{2} J_1 \cdot \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2 + \frac{1}{2} m\, x^2(t) = \frac{1}{2} I^*(\theta_1) \cdot \dot\theta_1^2$$

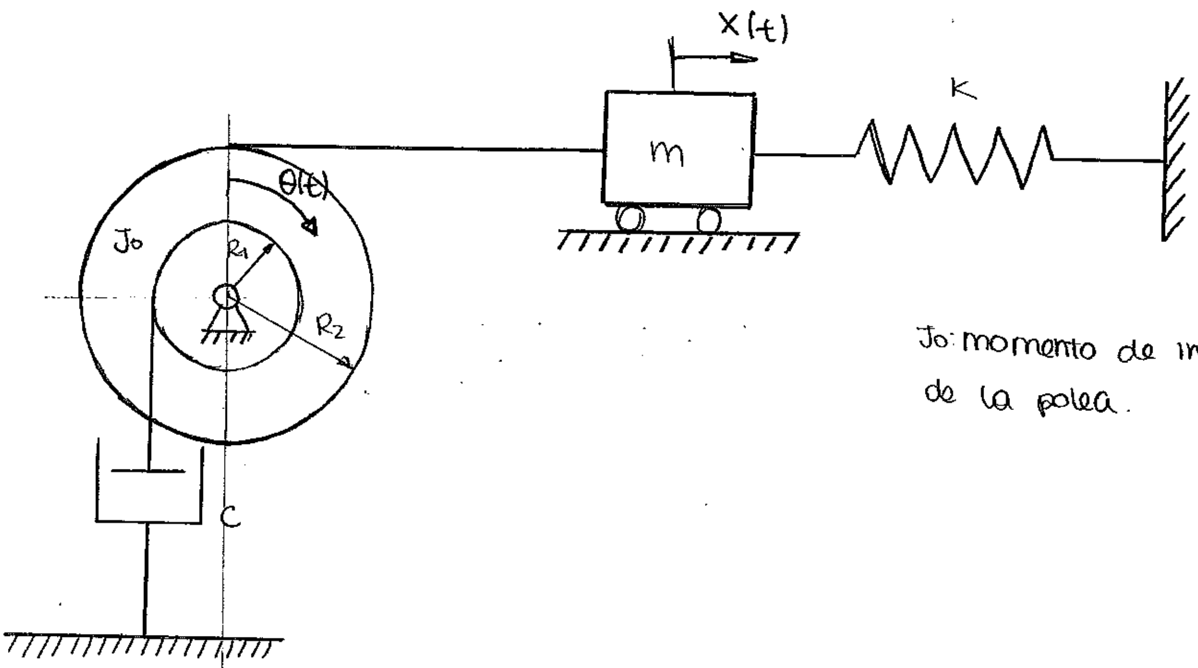
RELACIONES CINEMÁTICAS.

$$\begin{cases} \dot\theta_2 \cdot R_2 = \dot\theta_1 \cdot R_1 \rightarrow \dot\theta_2 = \dot\theta_1 \dfrac{R_1}{R_2} \\ \dot x(t) = \dot\theta_2 \cdot R_2 = \dot\theta_1 \cdot \dfrac{R_1}{R_2} \cdot R_2 = \dot\theta_1 \cdot R_1 \end{cases}$$

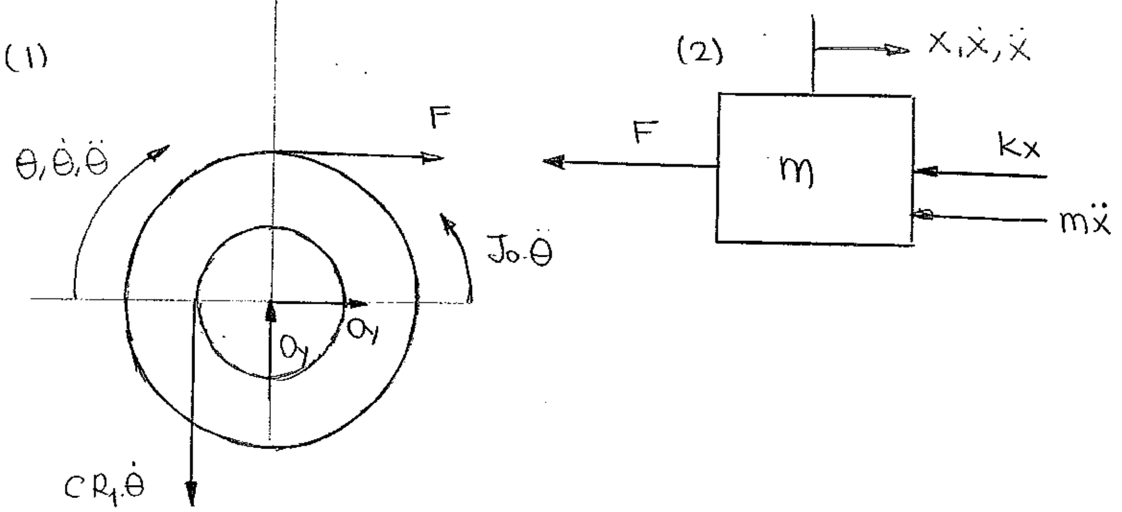
$$\frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m R_1^2 \cdot \dot\theta_1^2 = \frac{1}{2} I^*(\theta_1) \cdot \dot\theta_1^2$$

$$\boxed{I^* = J_1 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + m R_1^2}$$

③ SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.



Jo: momento de inercia de la polea.



(1) $F . R_2 - cR_1^2\dot{\theta} - J_0 . \ddot{\theta} = 0$

(2) $m\ddot{x} + kx + F = 0.$

<u>RELACIÓN CINEMÁTICA</u> (1 GDL: 1 coordenada generalizada)

$x = \theta R_2 \; ; \; \dot{x} = \dot{\theta} R_2 \; ; \; \ddot{x} = \ddot{\theta} R_2$

- Ec. diferencial en función de x:

$$F = \frac{1}{R_2} \cdot \left(cR_1^2 \cdot \frac{\dot{x}}{R_2} + \frac{J_0}{R_2} \cdot \ddot{x} \right)$$

$$\boxed{\left(m + \frac{J_0}{R_2^2} \right) \ddot{x} + \left(c \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \dot{x} + kx = 0}$$

- Ecuación diferencial en función de θ

$$\boxed{\left(mR_2+\frac{J_o}{R_2}\right)\ddot{\theta}+\left(cR_2+\frac{R_1^2}{R_2}\right)\dot{\theta}+kR_2\,\theta=0}$$

De la ecuación diferencial

$$\left(m+\frac{J_o}{R_2^2}\right)\ddot{x}+\left(c\ \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)\dot{x}+kx=0$$

deducimos que es un sistema de vibraciones libres amortiguado cuyos parámetros del sistema son:

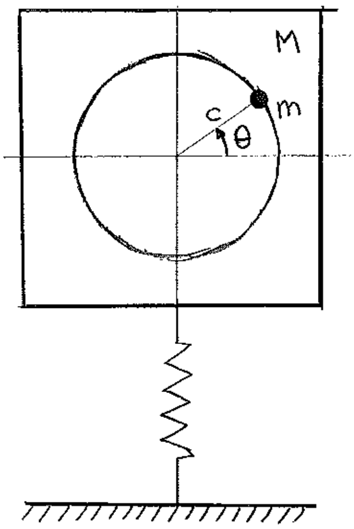
- Masa del sistema: $m_{eq}=m+\frac{J_o}{R_2^2}$
- Amortiguamiento del sistema: $C_{eq}=c\,\frac{R_1^2}{R_2^2}$
- Rigidez del sistema: $K_{eq}=k$

La frecuencia natural del sistema viene dada por:

$$w=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{J_o}{R_2^2}}}=\sqrt{\frac{R_2^2k}{R_2^2m+J_o}}$$

$$\boxed{w=\sqrt{\frac{R_2^2k}{R_2^2m+J_o}}}$$

4) SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA. DESEQUILIBRIO ARMÓNICO.



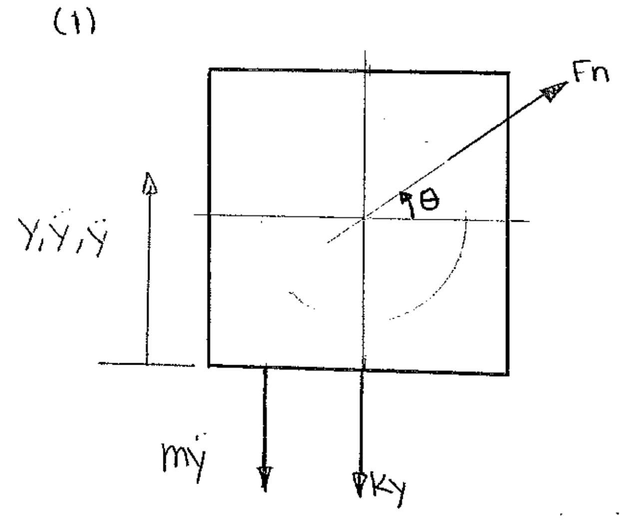
$M=100\,kg$

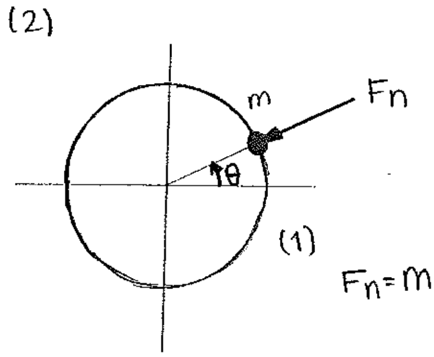
$m=1\,kg$

$c=4\,cm$

$\delta_{ST}=4\,mm$

$\dot{\theta}=1500\ rpm\ \frac{2\pi rad}{1 rev}\ \frac{1 min}{60 s}=50\pi\ \frac{rad}{s}$





$$F_n = m.a_n = m\frac{(\dot{\theta}R)^2}{R} = mR.\dot{\theta}^2 =$$

$$= 1kg . 0'04m \left(50\pi \frac{rad}{s}\right)^2 =$$

$$= 100\pi^2 N$$

- Para hallar k: EQUILIBRIO (sin que gire el tambor)

$$Mg = k.\delta_{ST} \quad : \quad k = \frac{100kg . 10 \frac{m}{s^2}}{0'004m} = 250.000 \frac{N}{m}$$

(2) $m\ddot{y} + ky - F_n . sen\theta = 0.$

$m\ddot{y} + ky - F_n . sen(\dot{\theta}t) = 0.$

$\boxed{100\ddot{y} + 250.000\ y = 100\pi^2 . sen(50\pi t)}$ Ecuación diferencial del movimiento

- Vibración forzada no amortiguada con parámetros del sistema:

$m_{eq} = 100$

$k = 250.000$

$f_0 = 100\pi^2$

$\overline{\omega} = 50\pi$

→ solución general $\quad y(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot sen(50\pi t)$

$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} = \frac{50\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \pi$

$\xi = 0$ (no hay amortiguamiento)

$y(t) = 4{,}451 . 10^{-4}\ sen(50\pi t)$

$\boxed{Y_{máx} = 4{,}451 . 10^{-4} m = 0'4451 mm}$

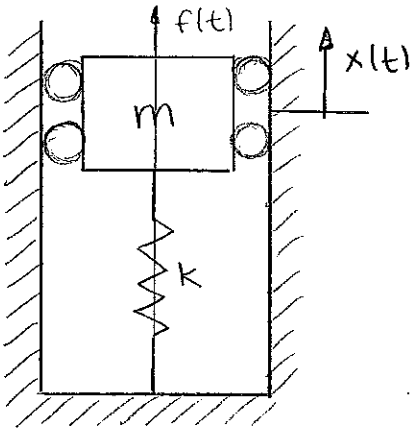
- La fuerza que le transmite al suelo es la del muelle:

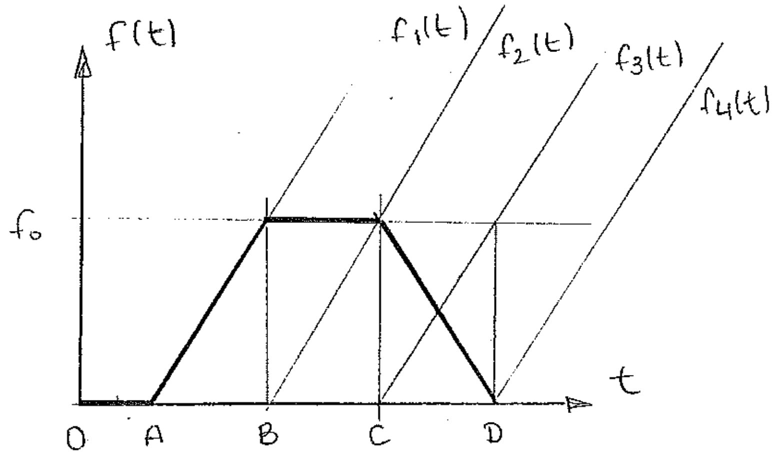
$F_s = k.y = 111{,}274\ sen(50\pi t)$

Le tenemos que sumar la componente estática:

$\boxed{F_{s,total} = Mg \pm ky = 1000 \pm 111{,}274\ sen(50\pi t)}$

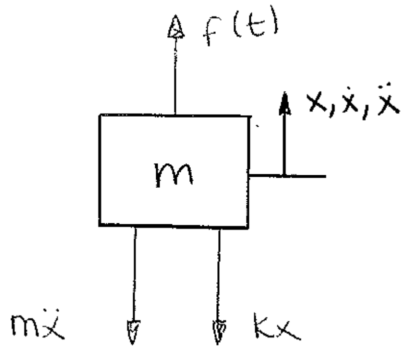
6 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA. SUPERPOSICIÓN





- condiciones iniciales: $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=V \end{cases}$

- Obtenemos la ecuación de movimiento



→ Ecuación diferencial del movimiento

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = f(t)}$$

- Obtención de la respuesta: SUPERPOSICIÓN: $f(t) = f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) + f_4(t)$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)$$

- Respuesta a función rampa: con cond. iniciales nulas

pendiente

$$x(t) = \frac{I}{k} t - \frac{I}{k\omega_D}\left[e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t - 2\theta) + \sin(2\theta)\right]$$

donde $\theta = \arctan \dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

No hay amortiguamiento: $\xi = 0 \to \theta = 0$

$\to \omega_D = \omega$

$\to \sin(2\theta) = 0$

1. Ecuación diferencial de mov. con d'Alembert.
2. Según la ec: forzada / libre
3. sabemos las respuestas según el tipo de fuerza (sino combinación)
4. Resp. total: homog + trans.

$$\boxed{I_1 = \frac{f_0}{B-A}} \quad \boxed{I_2 = \frac{f_0}{B-A}} \quad \boxed{I_3 = \frac{f_0}{C-B}} \quad \boxed{I_4 = \frac{f_0}{D-C}}$$

$\boxed{f_1(t) \quad A<t<B}$

$$x_1(t) = \frac{f_0}{B-A}\,\frac{t-A}{K} - \frac{f_0}{(B-A)K\omega}\cdot sen[\omega(t-A)] =$$

$$= \frac{f_0}{(B-A)K}\left[(t-A) - \frac{sen[\omega(t-A)]}{\omega}\right]$$

$\boxed{f_2(t) \quad B<t<C}$

$$x_2(t) = \frac{f_0}{(B-A)K}\left[(t-B) - \frac{sen[\omega(t-B)]}{\omega}\right]$$

$\boxed{f_3(t) \quad C<t<D}$

$$x_3(t) = \frac{f_0}{(C-B)K}\left[(t-C) - \frac{sen[\omega(t-C)]}{\omega}\right]$$

$\boxed{f_4(t) \quad D<t}$

$$x_4(t) = \frac{f_0}{(D-C)K}\left[(t-D) - \frac{sen[\omega(t-D)]}{\omega}\right]$$

$$x_p(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)$$

$$\boxed{x_p(d) = x_1(d) - x_2(d) - x_3(d) - x_4(d)}$$

Para hallar la respuesta transitoria resolvemos la ecuación homogénea

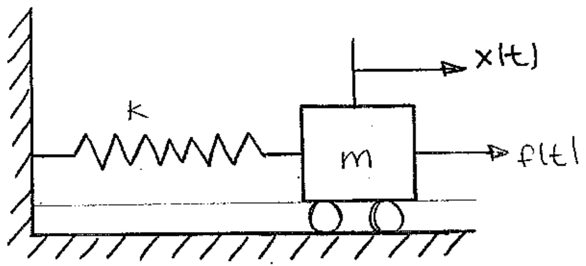
$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

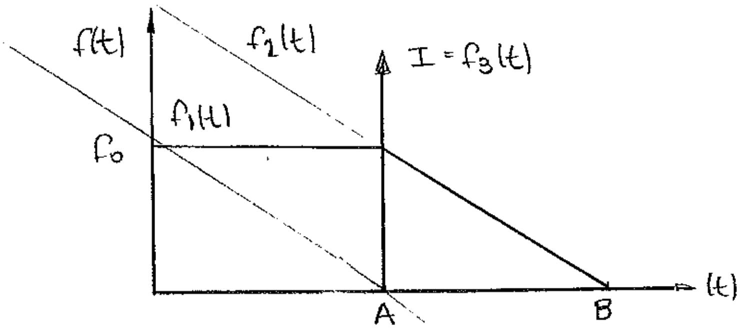
$$\left.\begin{array}{l} x = A.\cos(\omega t) + B\,sen(\omega t) \\ x(0) = A = 0 \\ \dot{x}(0) = B\omega = V \;;\; B = \frac{V}{\omega} \end{array}\right\} \boxed{x_h(t) = \frac{V}{\omega}\,sen(\omega t)}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(d)$$

$$\boxed{x(d) = x_h(d) + x_p(d)}$$

7) SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE RESPUESTAS. SUPERPOSICIÓN.

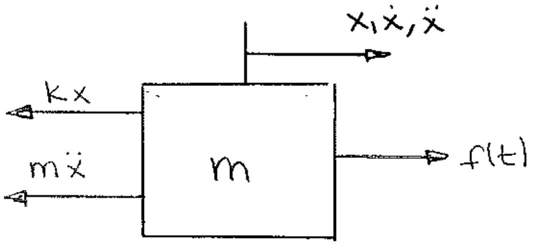




- COND. INICIALES

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

- solución a rampa: $x(t) = \frac{I}{k} t - \frac{I}{k\omega_D}\left(e^{-\xi\omega t} sen(\omega_D t - 2\theta) + sen\, 2\theta\right)$
- solución a impulso: $x(t) = \frac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_D} sen(\omega_D t)$
- obtenemos la ecuación del movimiento



$$\boxed{m\ddot{x} + kx = f(t)}$$

<u>SUPERPOSICIÓN</u>: $f(t) = -f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$

$\boxed{f_1(t) \quad 0<t<A}$

$$I_1 = \frac{f_0}{B-A} \longrightarrow x(t) = \frac{f_0}{(B-A)k}(t-A) - \frac{f_0}{(B-A)k\omega} \cdot (sen\,\omega(t-A)) = \frac{f_0}{(B-A)k}\left[(t-A) - \frac{sen\,\omega(t-A)}{\omega}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = 0 \text{ (no hay amortiguamiento)} \\ \theta = 0 \rightarrow sin(2\theta) = 0 \\ \omega_D = \omega \end{array}\right\}$$

$\boxed{f_2(t) \quad A<t}$

$$I_2 = \frac{f_0}{B-A} \longrightarrow x(t) = \frac{f_0}{(B-A)k}(t-B) - \frac{f_0}{(B-A)k\omega} sen(\omega(t-B))$$

$\boxed{f_3(t) \quad t = A}$

$$x_3(t) = \frac{I}{m\omega} \cdot \operatorname{sen}(\omega t - A))$$

- superposición

$$x_p(t) = -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_p(b) = -x_1(b) + x_2(b) + x_3(b) \longrightarrow \text{solución estacionaria}$$

- solución de la homogenea (PARTE TRANSITORIA)

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$x_h(t) = A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$x(0) = B = 0$$

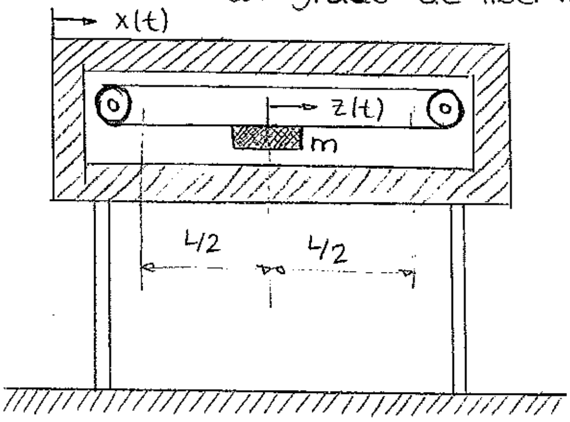
$$\dot{x}(0) = 0 = A\omega = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$x_h(t) = 0$$

$$x(t) = x_p(t)$$

$$\boxed{x(b) = x_p(b)}$$

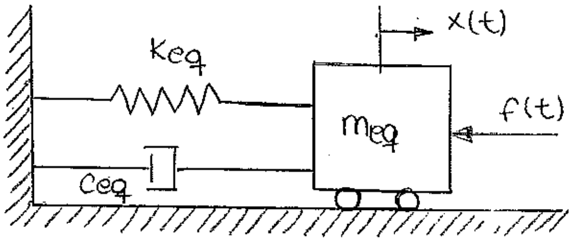
⑩ Sistemas de un grado de libertad. Desequilibrio armónico + absorsor.

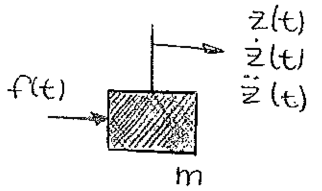


$z(t) = \frac{L}{2} \cdot \cos(\bar{\omega} t)$

$\begin{cases} L = 1m \\ m = 0{,}2kg \end{cases}$

A)





B)

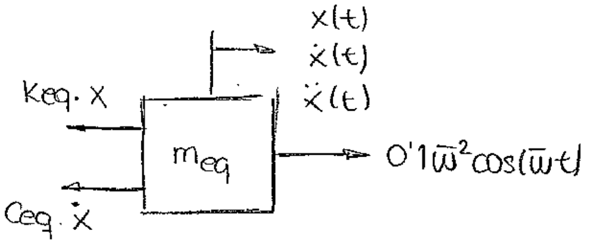
$\Rightarrow$ $f(t) = m.\ddot{z} + \ddot{x} \simeq m.\ddot{z}$

$\dot{z} = -\frac{L}{2}\bar{\omega}\, sen(\bar{\omega} t)$

$\ddot{z} = -\frac{L}{2}\bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega} t)$

$f(t) = -m.\frac{L}{2}\bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega} t)$

$\boxed{f(t) = -0'1\bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega} t)}$



$Keq\, x + Ceq\,\dot{x} - 0'1\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega} t) = -meq.\ddot{x}$

$\Rightarrow$ $meq\,\ddot{x} + Ceq\,\dot{x} + Keq\,x = 0'1\,\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega} t)$

$\left.\begin{matrix} Fest = 25N \\ Xest = 2cm \end{matrix}\right\} \boxed{Keq = \frac{Fest}{Xest} = \frac{25\,N}{2cm} = 1250\,\frac{N}{m}}$

- MÉTODO DEL DECREMENTO LOGARÍTMICO:

$\delta = L\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right)$; $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}}$

$\delta = L\left(\frac{1'6}{1'3}\right) = 0'2076$; $\boxed{\xi_{eq} = 0'033}$

$$T_d=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 4\,\frac{rad}{s} = \omega\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega = 4{,}002\,\frac{rad}{s} \approx 4\,\frac{rad}{s} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

$$\boxed{m_{eq}=\frac{k_{eq}}{\omega^2}=78{,}125\ kg}$$

C) Teoría

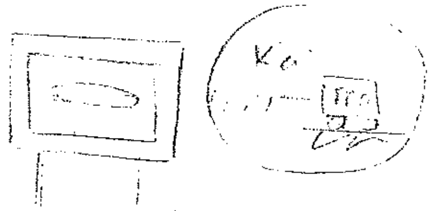
D) Frecuencia del movimiento = frecuencia del movimiento $(\bar{\omega}=\omega)$

? $f(t)=0'1\cdot\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t) = 0'1\,4^2\cdot\cos(4t) = 1'6\cos(4t)$ $\quad \varphi=\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$?

$$x_p(t)=\frac{1'6/1250}{\sqrt{(1-1)^2+(2\cdot 0'033\cdot 1)^2}}\cos(4t-\varphi) = \frac{1'6/1250}{0'066}\cos\left(4t-\frac{\pi}{2}\right) = 0'01939\,sen(4t)$$

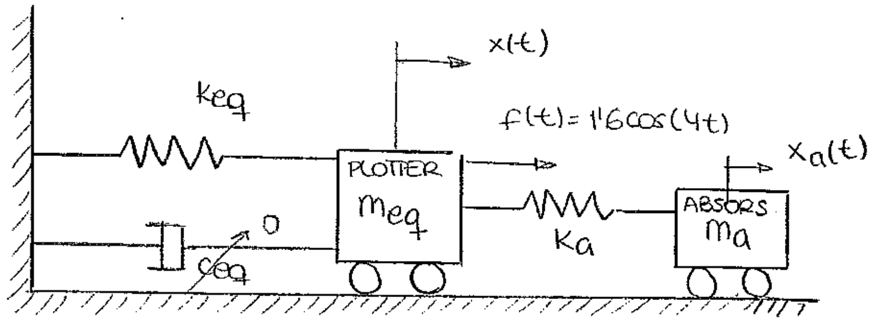
$$\boxed{x_p(t)=0'01939\,sen(4t)}$$

E) Teoría



posible absorsor...

F)



(1) $1'6\cos(4t)+k_a(x_a-x)-k_{eq}\cdot x = m_{eq}\ddot{x} \Rightarrow 78{,}125\ddot{x}+(1250+k_a)x-k_a x_a = 1'6\cdot\cos(4t)$

(2) $-k_a(x_a-x)=m_a\cdot\ddot{x}_a \Rightarrow m_a\ddot{x}_a-k_a\cdot x+k_a x_a=0$

$$\begin{bmatrix}78'125 & 0\\ 0 & m_a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{x}_a\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1250+k_a & -k_a\\ -k_a & k_a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ x_a\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1'6\cdot\cos(4t)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x(t) = X\cdot\cos(4t) & x_a(t) = x_a\cdot\cos(4t) \\ \dot{x}(t) = -4X\cdot\text{sen}(4t) & \dot{x}_a(t) = -4\cdot x_a\cdot\sin(4t) \\ \ddot{x}(t) = -16X\cos(4t) & \ddot{x}_a(t) = -16\,x_a\cdot\cos(4t) \end{array}\right\}$$

$$-16\begin{bmatrix} 78'125 & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1250+k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

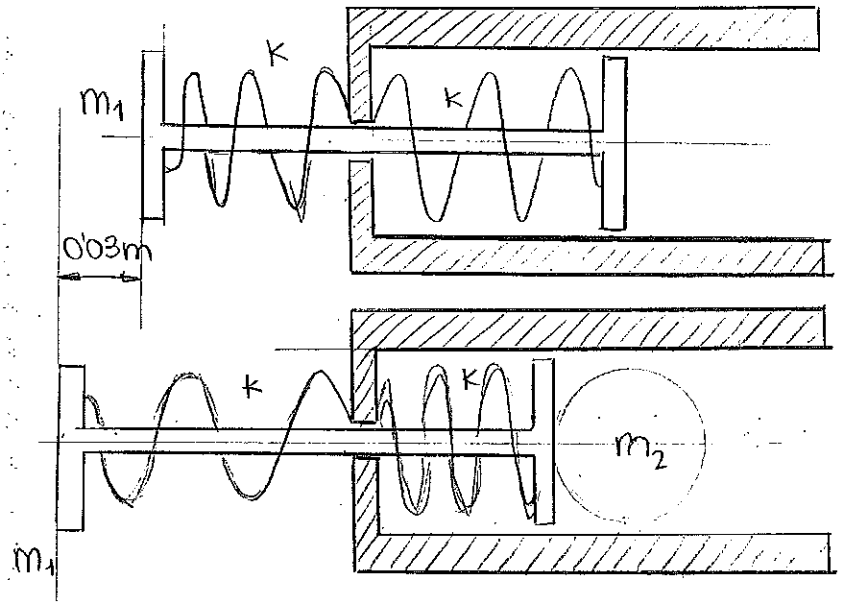
$$\begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ k_a & k_a-16m_a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que no vibre: $X=0$: $X = \dfrac{\begin{vmatrix} 1'6 & -k_a \\ 0 & k_a-16m_a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_a & -k_a \\ k_a & k_a-16m_a \end{vmatrix}} = \dfrac{1'6(k_a-16m_a)}{|\;|} = 0$

$$\boxed{k_a - 16m_a = 0}$$

G) Teoría.

(12) SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA.

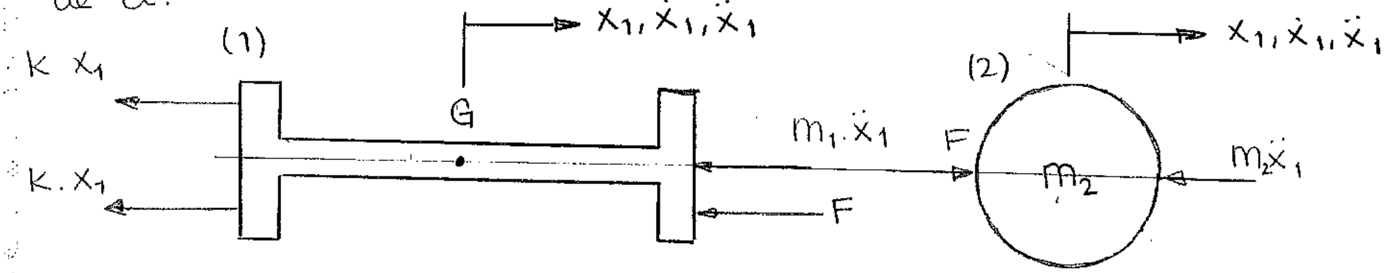


(posición de equilibrio)

(posición inicial t=0)

$$\begin{cases} m_1 = 0'06\,kg \\ m_2 = 0'04\,kg \\ k = 500\,\frac{N}{m} \end{cases}$$

1) Ecuación del movimiento del vástago impulsor antes de que la bola se separe de él.



$$\left.\begin{array}{l} (1)\ m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 + F = 0. \\ (2)\ m_2\ddot{x}_1 - F = 0 \end{array}\right\} \quad (m_1+m_2)\,\ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0$$

$$\boxed{0'1\,.\ddot{x}_1 + 1000\,x_1 = 0}$$

2) Instante t_1 en el que la bola se separa del vástago impulsor.

- cuando la bola se separa $\Rightarrow \boxed{F = 0 = m_2\ddot{x}_1}$

$x_1(t) = A.\cos(\omega t) + B.\text{sen}(\omega t) \qquad \left\{\omega = \sqrt{\frac{1000}{0'1}} = 100\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(0) = -0'03\,m \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1(0) = A = +0'03 \\ \dot{x}_1(0) = B\omega = 0 \rightarrow B = 0 \end{array} \quad \Big\} \ \boxed{x_1(t) = +0'03.\cos(100t)}$$

$\dot{x}_1(t) = +3\,\text{sen}(100t)$

$\ddot{x}_1(t) = 300 \cdot \cos(100t)$

$F=0 \longrightarrow \ddot{x}_1(t)=0:\ 300 \cdot \cos(100t)=0.$

$$100t = \frac{\pi}{2}$$
$$t = \frac{\pi}{200}\ s \qquad \boxed{t_1 = \frac{\pi}{200}\ s}$$

3) Velocidad con la que sale despedida la bola.

$$V = \dot{x}_1(t_1) = 3 \cdot \text{sen}\left(100 \cdot \frac{\pi}{200}\right) = 3\ \frac{m}{s} < 3'5\ \frac{m}{s}$$

$\boxed{V = 3\ \frac{m}{s}.\ \text{NO consigue bola extra}}$

4) Ecuación del movimiento del vástago impulsor después de que la bola se haya separado de él.

$$m_1\ddot{x}_1 + 2Kx_1 = 0.$$
$$0'06\,\ddot{x}_1 + 1000\,x_1 = 0.$$

COND. INICIALES: $x_1(t_1) = 0$

$\dot{x}_1(t_1) = 3\ \frac{m}{s}$

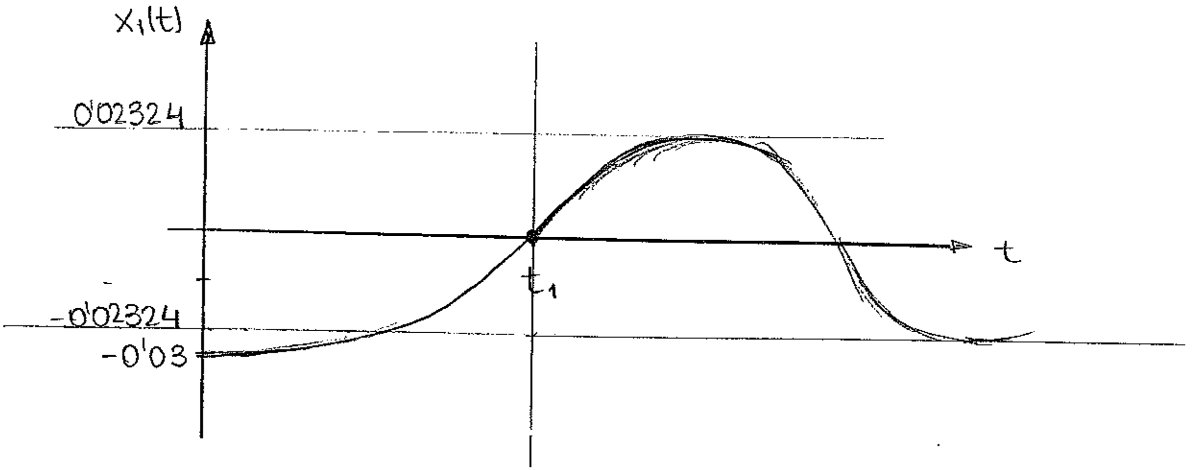
$x_1(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{1000}{0'06}} = 129{,}099\ \frac{rad}{s}$

$x_1(t_1) = B = 0.$

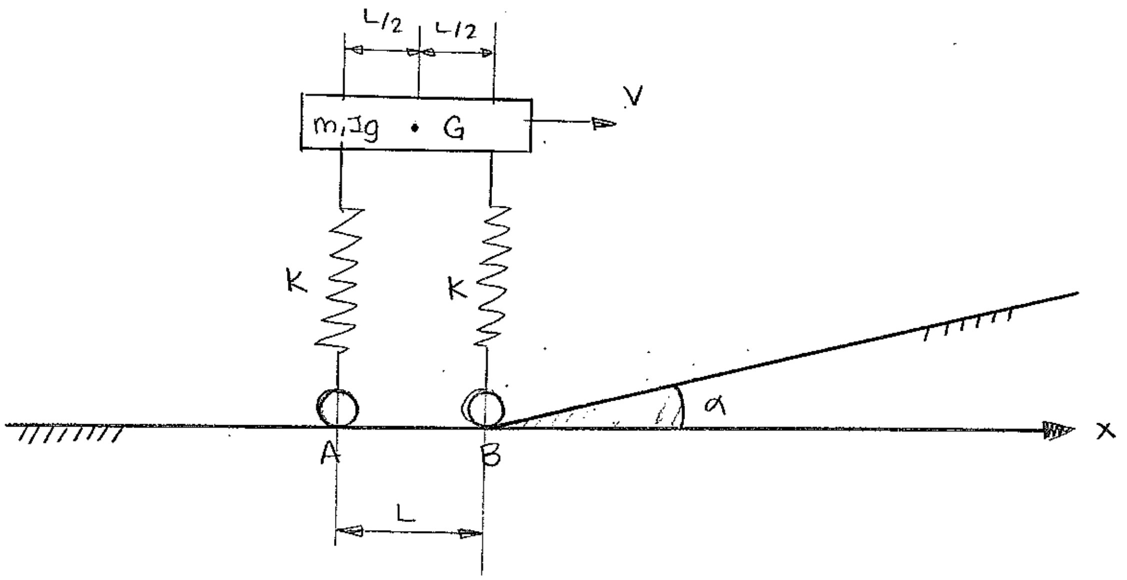
$\dot{x}_1(t_1) = 3 = -A \cdot 129{,}099 \rightarrow A = 0'02324.$

$\boxed{x_1(t) = 0'02324\cos(129{,}099t)}$

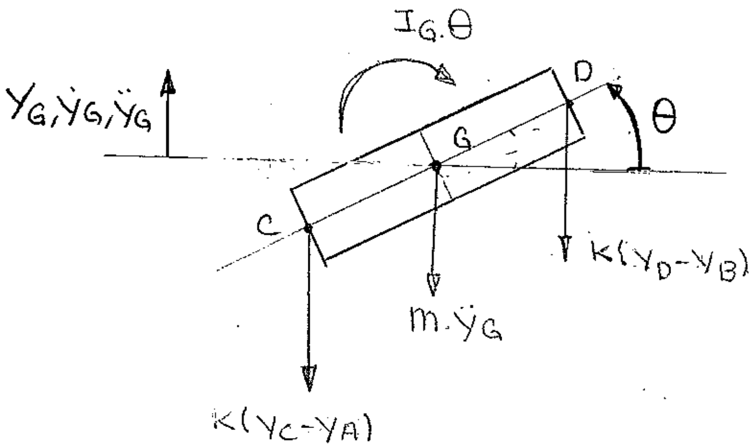
5) Dibujar aproximadamente la ley del movimiento del vástago impulsor.



(13) SISTEMAS DE VARIOS GDL. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



1) Sistema de ecuaciones que define el movimiento del vehículo.



$Y_A = (-L + vt)\alpha$ (cuando $y_A \neq 0$).

$Y_B = vt\alpha$

$Y_C = Y_G - \frac{L}{2}\theta$

$Y_D = Y_G + \frac{L}{2}\theta$

(1) $m\ddot{y}_G + k(y_C - y_A) + k(y_D - y_B) = 0.$

$m\ddot{y}_G + k(y_G - \frac{L}{2}\theta - y_A) + k(y_G + \frac{L}{2}\theta - y_B) = 0.$

$m\ddot{y}_G + 2ky_G = k(y_B + y_A)$

(2) $I_G\ddot{\theta} + k(y_D - y_B)\cdot\frac{L}{2} - k(y_C - y_A)\cdot\frac{L}{2} = 0$

$I_G\ddot{\theta} + \frac{kL}{2}(y_G + \frac{L}{2}\theta - y_B) - \frac{kL}{2}(y_G - \frac{L}{2}\theta - y_A) = 0$

$I_G\ddot{\theta} + \frac{kL^2}{2}\theta = -\frac{kL}{2}(-y_A + y_B)$

$$\begin{cases} m\ddot{y}_G + 2ky_G = 2kvt\alpha - kL\alpha \\ I_G\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = \frac{kL^2}{2}\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_G \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2kvt\alpha - kL\alpha \\ \frac{kL^2}{2}\alpha \end{bmatrix}}$$

2) Las frecuencias naturales del sistema

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 . m & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_g \end{vmatrix} = (2k - \omega^2 m)(k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_g) = 0$$

$$2k - \omega^2 m = 0 . \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

$$k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_g = 0 : \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{kL^2}{2I_G}}}$$

3) La respuesta total del sistema cuando A sigue sobre el plano horizontal y la B está sobre el plano vertical.

$y_A = 0$

$y_B = vt\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\ m\ddot{y}_G + 2ky_G = ky_B = kvt\alpha \\ &(2)\ I_g\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = -\frac{kL}{2}vt\alpha \end{aligned}}$$

(1) $m\ddot{y}_G + 2ky_G = kv.\alpha.t$ ← rampa de pendiente $kv.\alpha$.

$$\boxed{y(t) = \frac{v.\alpha.t}{2} - \frac{v\alpha}{2\omega_1} \cdot sen(\omega_1 t)}$$

$$I_g \cdot \ddot{\theta} + \frac{kL^2}{2}\theta = \left(+\frac{kL}{2} vt \cdot \alpha\right)$$ ← rampa de pendiente $+\frac{kL}{2} v\alpha$

$$\theta(t) = \frac{+\frac{kL}{2}v\alpha}{\frac{kL^2}{2}} \cdot t - \frac{+\frac{kL}{2}v\alpha}{\frac{kL^2}{2}\omega_2} \cdot sen(\omega_2 t) = +\frac{v\alpha}{L}t - \frac{v\alpha}{L\omega_2} \cdot sen(\omega_2 t)$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v\alpha}{L}t - \frac{v\alpha}{L\omega_2} sen(\omega_2 t)}$$

4) La respuesta total del sistema cuando las dos ruedas están sobre el plano inclinado.

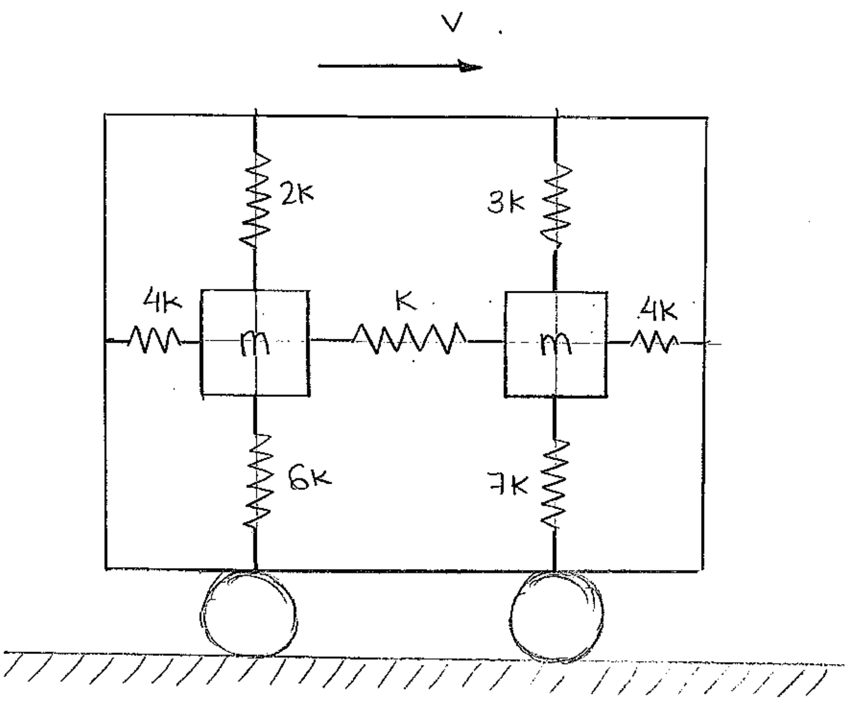
$$m\ddot{y}_G + 2ky_G = \left(2kvt \cdot \alpha - k \cdot L\right)$$ rampa de pendiente $2kv\alpha$ desplazada $t = \frac{L}{2v\alpha}$

$$\boxed{y(t) = v\alpha t - \frac{v\alpha}{\omega_1} sen\left(\omega_1\left(t - \frac{L}{2v\alpha}\right)\right)}$$

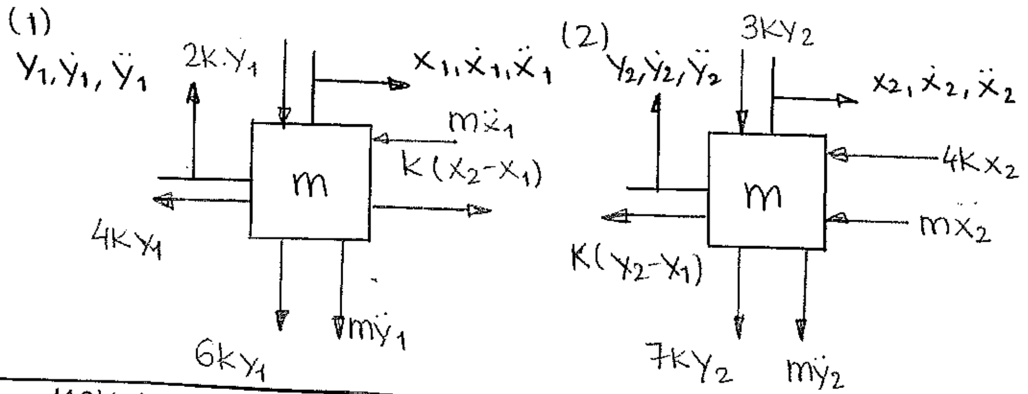
$$I_G\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = \left(\frac{kL^2}{2}\right)$$ escalón desplazado $t = \frac{L}{2v\alpha}$

(...)

14) SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



1) Las ecuaciones que definen el movimiento de las masas $x_2 > x_1$



MOV. HORIZONTAL

(1) $m\ddot{x}_1 + 4kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0$

(2) $m\ddot{x}_2 + 4kx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$

MOV VERTICAL

(3) $m\ddot{y}_1 + 6ky_1 + 2ky_1 = 0$

(4) $m\ddot{y}_2 + 7ky_2 + 3ky_2 = 0$.

2) Las frecuencias naturales del sistema;

MOV. HORIZONTAL:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 5k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

• Frecuencias naturales.

$$|[K]-\omega^2[M]|=0.$$

$$\begin{vmatrix} 5k-\omega^2 m & -k \\ -k & 5k-\omega^2 m \end{vmatrix} = (5k-\omega^2 m)^2-k^2=0.$$

$$5k-\omega^2 m=+k \qquad 5k-\omega^2 m=-k$$

$$\omega^2 m=4k \qquad \omega^2 m=6k$$

$$\boxed{\omega_1^2=4\frac{k}{m}} \qquad \boxed{\omega_2^2=6\frac{k}{m}}$$

MOV VERTICAL

$$(3)\ m\ddot{y}_1+8ky_1=0 \longrightarrow \boxed{\omega_3^2=8\frac{k}{m}}$$

$$(4)\ m\ddot{y}_2+10ky_2=0 \longrightarrow \boxed{\omega_4^2=10\frac{k}{m}}$$

3) Los modos naturales del sistema.

$\boxed{\omega_1}$:

$$\begin{bmatrix} 5k-4k & -k \\ -k & 5k-4k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+k\,x_1-kx_2=0: \quad x_1=x_2$$

$$\boxed{\text{modo 1: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$\boxed{\omega_2}$

$$\begin{bmatrix} 5k-6k & -k \\ -k & 5k-6k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-kx_1-kx_2=0: \quad x_1=-x_2$$

$$\boxed{\text{modo2: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$\boxed{\omega_3}$ $\boxed{\text{modo 3: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$

$\boxed{\omega_4}$ $\boxed{\text{modo 4: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}$

4) Las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales.

Para transformarlo a coordenadas modales:

$$[X]^T[M][X][\ddot{z}] + [X]^T[k][X][z] = [0]$$

$$[X]^T[M][X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m & +m & 0 & 0 \\ m & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[X]^T[k][X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4k & 4k & 0 & 0 \\ +6k & -6k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix}$$

- Ecuaciones del movimiento en coordenadas modales:

$$\boxed{\begin{cases} 2m\ddot{z}_1 + 8kz_1 = 0 \\ 2m\ddot{z}_2 + 12kz_2 = 0 \\ m\ddot{z}_3 + 8kz_3 = 0 \\ m\ddot{z}_4 + 10kz_4 = 0 \end{cases}}$$

5) La respuesta si el container choca contra un muro y pasa instantáneamente a velocidad nula.

$x_1(0)=0$

$\dot{x}_1(0)=V$

$x_2(0)=0$

$\dot{x}_2(0)=V$

$$\begin{Bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1(0) \\ \dot{z}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}$$

$$[X]^{-1} = \left[\frac{1}{m_j^M}\right]\begin{bmatrix} X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & \frac{1}{2m} \\ \frac{1}{2m} & -\frac{1}{2m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1(0) \\ \dot{z}_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V \\ V \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2V \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(1) $2m\ddot{z}_1 + 8kz_1 = 0.$ $\qquad z_1(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)$

$z_1(0)=0$ $\qquad z_1(0) = A = 0$

$\dot{z}_1(0)=V$ $\qquad \dot{z}_1(0) = B\omega_1 = V \rightarrow B = \frac{V}{\omega_1}$

$$z_1(t) = \frac{V}{\omega_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)$$

(2) $2m\ddot{z}_2 + 12kz_2 = 0.$ $\qquad z_2(t) = A\cos(\omega_2 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_2 t) = 0.$

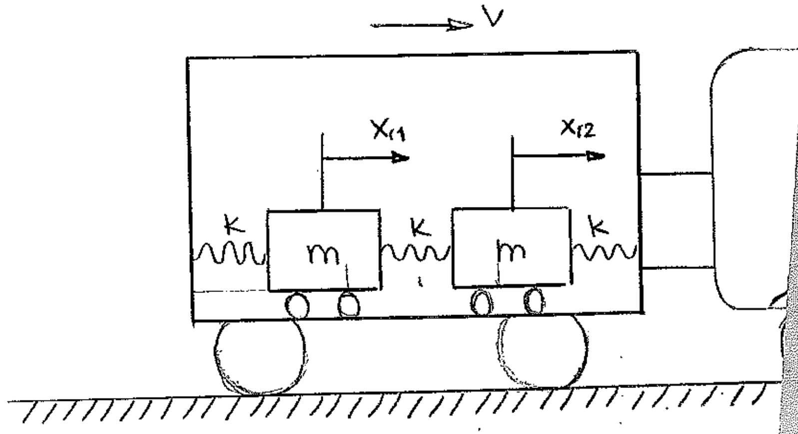
$z_2(0) = 0.$

$\dot{z}_2(0) = 0$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{V}{\omega_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{V}{\omega_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) \\ \frac{V}{\omega_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{V}{\omega_1}\cdot\mathrm{sen}(\omega_1 t) \\ x_2(t) &= \frac{V}{\omega_1}\cdot\mathrm{sen}(\omega_1 t) \\ y_1(t) &= 0 \\ y_2(t) &= 0. \end{aligned}}$$

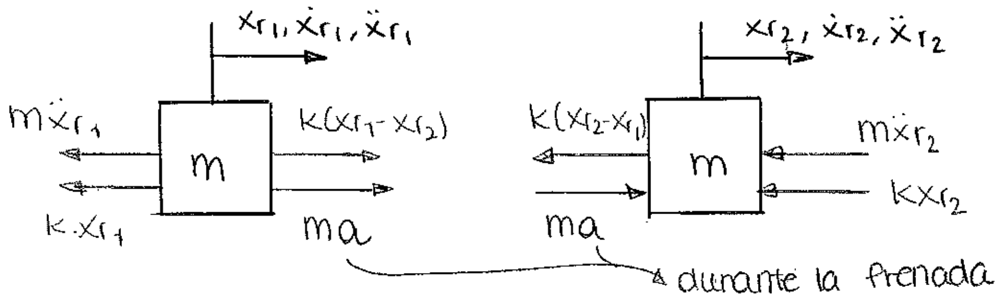
15) SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



Frecuencias naturales
↓
modos (matriz de modos)
↓
cambio vble
↓
$\boxed{\text{SISTEMA DESACOPLADO}}$

- Frenado: $\Delta t = \tau$
  a

1) ¿A qué fuerzas están sometidas las masas durante el proceso de frenado?



$\boxed{x_{r_2} > x_{r_1}}$

2) Calcular la respuesta durante la frenada.

$$\begin{cases} m\cdot\ddot{x}_{r_2} + 2kx_{r_2} - kx_{r_1} = ma \\ m\ddot{x}_{r_1} + 2kx_{r_1} - kx_{r_2} = ma \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{r_2} \\ \ddot{x}_{r_1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{r2} \\ x_{r1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}$$

- Frecuencias naturales

$$|[K]-\omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = (2k-\omega^2 m)^2 - k^2 = 0. \begin{cases} 2k-\omega^2 m = k \longrightarrow \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \\ 2k-\omega^2 m = -k \longrightarrow \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

MODOS:

ω_1 $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$kX_1 - kX_2 = 0 \rightarrow X_1 = X_2$: modo 1: $\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

ω_2 $\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$-kX_1 - kX_2 = 0 \longrightarrow X_1 = -X_2$: modo 2: $\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Matriz de modos:

$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Cambio de Vble: $[X]^T[M][X][\ddot{y}] + [X]^T[K][X][y] = [X]^T\{f\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2ma \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos dos ecuaciones desacopladas

(1) $2m\ddot{y}_2 + 2ky_2 = 2ma$

(2) $2m\ddot{y}_1 + 6k y_1 = 0$

(1) $y_2(t) = A\cos\omega_1 t + B\,\text{sen}\,\omega_1 t + \frac{ma}{k}$

cond iniciales

$\left.\begin{array}{l} y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 2v \end{array}\right\}$ $0 = A + \frac{ma}{k}$: $A = -\frac{ma}{k}$

$2v = B\omega_1$: $B = \frac{v}{\omega_1}$

$$\boxed{y_2(t) = \frac{ma}{k}(1 - \cos\omega_1 t) + \frac{v}{\omega_1}\,\text{sen}\,\omega_1 t}$$

$$\boxed{y_1(t) = 0}$$

$\begin{Bmatrix} \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{Bmatrix} = [X]^{-1}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix}$

$[X]^{-1} = \left[\frac{1}{m_M^j}\right][X][M] =$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ 0 \end{Bmatrix}$

⑩ cambio de vble

$$\begin{Bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_2(t) = Y_2(t)$$

$$x_1(t) = Y_2(t)$$

$$\boxed{x_1(t) = x_2(t) = \frac{ma}{k}(1-\cos\omega_1 t) + \frac{2v}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t}$$

3) Calcular la respuesta después de la frenada.

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_1^e(t)$$

$$x_1^e(t) = -\frac{ma}{k}(1-\cos\omega_1(t-\tau)).$$

$$\boxed{x_1'(t) = x_2'(t) = \frac{ma}{k}(1-\cos\omega_1 t) + \frac{2v}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t - \frac{ma}{k}(1-\cos\omega_1(t-\tau))}$$