

VIBRACIONES (1GDL)

① Vibraciones libres.

* No amortiguadas: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$

* Amortiguadas:

⊗ supercrítico ($\xi > 1$): $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

$$\begin{cases} s_1 = \omega(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ s_2 = \omega(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

⊗ crítico ($\xi = 1$): $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\omega t}$

⊗ subcrítico ($\xi < 1$): $x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cdot \cos \omega_D t + B \cdot \sin \omega_D t)$

$$e^{-\xi \omega t} \left(x_0 \cdot \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right)$$

② Vibraciones forzadas

* Respuesta ante una fuerza armónica: $x_p(t) = X_{est} \cdot D \cdot \begin{cases} \cos(\bar{\omega} t - \varphi) \\ \sin(\bar{\omega} t - \varphi) \end{cases}$

$$\begin{cases} X_{est} = f_0/k \\ D = 1/\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ \varphi = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \end{cases}$$

* Respuesta ante un movimiento armónico del soporte.

$$x_p(t) = X_s \cdot D \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \cdot \sin\left(\bar{\omega} t - \arctg \frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2 + (2\xi\beta)^2}\right)$$

* Respuesta a la función impulso.

$$x(t) = I \cdot \frac{e^{-\xi \omega t - a}}{m \omega_D} \cdot \sin(\omega_D t - a)$$

* Respuesta a función escalón

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cdot \cos \omega_D t + B \cdot \sin \omega_D t) + \frac{I}{k}$$

$$\text{si cond. iniciales nulas: } A = -\frac{I}{k}, B = -\frac{\xi \omega I}{k \omega_D}$$

* Respuesta a una función rampa

$$x(t) = \frac{I}{k} \cdot t - \frac{I}{k \omega_D} \left[e^{-\xi \omega t} \cdot \sin(\omega_D t - 2\theta) + \cos(2\theta) \right]$$

$$\theta = \arctg \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$$

* Amortiguamiento histérico o estructural:

$$x_E = \frac{f_0}{k} D \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \delta^2}} \quad \text{y} \quad \varphi = \arctg \frac{\delta}{1-\beta^2}$$

VIBRACIONES (2 GDL)

Para frecuencias naturales:

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

6. Introducción a la teoría de vibraciones

- Carga dinámica: su magnitud, dirección, sentido y/o punto de aplicación varían con el tiempo.
- Oscilación: movimiento periódico o cuasi-periódico de un sistema alrededor de su posición de referencia (vibración \rightarrow tiene que aparecer energía de deformación).
- Parámetros concentrados: masa \rightarrow inercia.
rigidez \rightarrow f. elástica
amortiguamiento \rightarrow f. disipación.
- Principio de superposición: consideradas dos acciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$ que aplicadas al sistema provocan unas respuestas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la respuesta a una acción combinada $AF_1(t) + BF_2(t)$ es $Ax_1(t) + Bx_2(t)$, donde A y B son dos constantes.

- Sistema semidefinido: mov. sólido rígido y def. propia (automóviles)
- Sistema definido: no tiene mov. sólido rígido (estructura)

VIBRACIONES

- Libres: se producen en ausencia de fuerzas exteriores, exclusivamente por unas determinadas condiciones iniciales de velocidad y/o desplazamiento.
- Forzados: se producen en presencia de fuerzas variables con el tiempo.

7. Modelización de sistemas mecánicos.

● DISEÑO DE SISTEMAS MECÁNICOS DEFORMABLES.

1. concepción del sistema mecánico.
2. Análisis teórico o experimental (o ambos).
3. Comprobación del cumplimiento de los requisitos de funcionamiento y modificación de los parámetros de diseño en su caso.

● ANÁLISIS TEÓRICO.

1. creación del modelo matemático: idealización del sistema físico real mediante hipótesis simplificadoras.
2. Obtención de las ecuaciones del movimiento: se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del sistema.
3. Solución de las ecuaciones del movimiento: El estudio dinámico se completa con la utilización de las relaciones deformación-desplazamiento del medio continuo y de las ecuaciones constitutivas del material, que llevan al conocimiento del campo de tensiones del sistema.
4. Interpretación de resultados: previsión que el modelo matemático hace del comportamiento dinámico del sistema.

● MODELIZACIÓN: REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE MUELLES, AMORTIGUADORES Y MASAS.

Elementos:

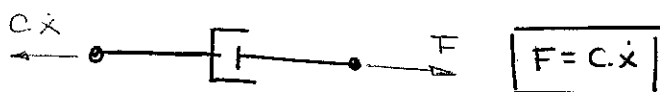
- * Resortes sin masa: almacenan energía elástica (k)
- * Masas indeformables: adquieren energía cinética (M)
- * Amortiguadores (ideales): disipan energía mientras el elemento vibra (c).

1. Resortes.

- * Tracción-compresión: $F = k \cdot x$
- * Muelle a torsión: $T = k_T \cdot \theta$

2. Amortiguadores. El mecanismo mediante el cual la energía vibratoria se convierte progresivamente en calor y ruido se conoce con el nombre de amortiguamiento. El amortiguador asume en exclusiva la capacidad de disipación de energía. (No posee masa ni capacidad para almacenar energía y la fuerza.

* Amortiguamiento viscoso: La disipación de energía es debida al rozamiento entre el elemento y el fluido.



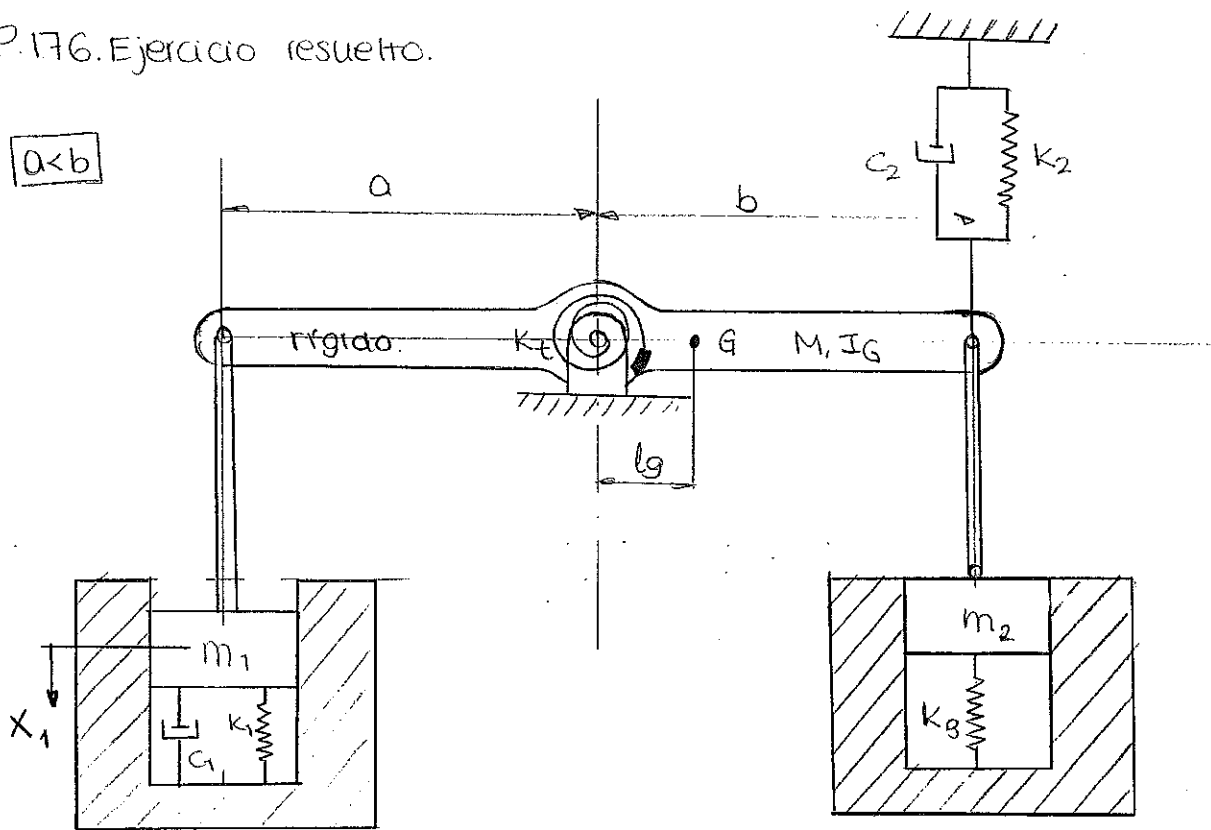
→ AMORTIGUADORES EN PARALELO: $c_{eq} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$

→ AMORTIGUADORES EN SERIE: $\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$

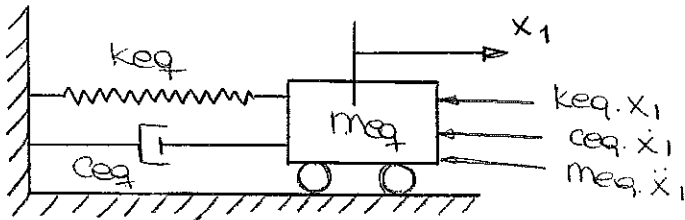
3. Masas e Inercias: se trata de reducir el conjunto de masas que aparecen en un sistema mecánico a una única masa equivalente. (Equivalencia entre el sistema modelizado y el equivalente o reducido.)

P.176. Ejercicio resuelto.

$a < b$

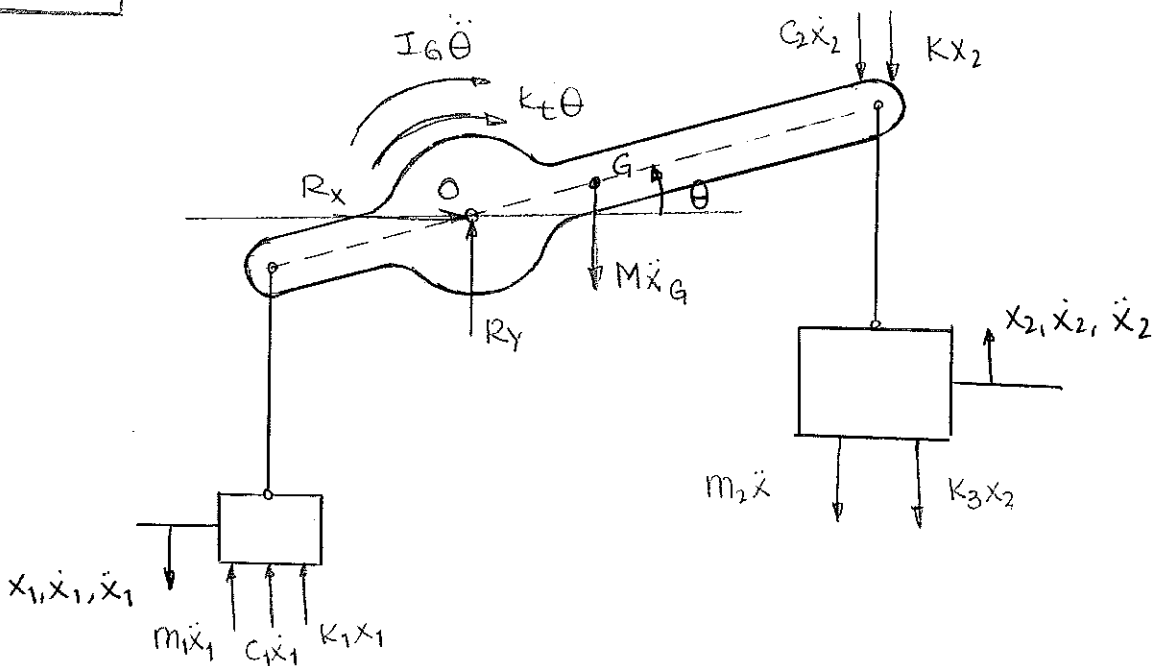


SISTEMA DE 1GDL EQUIVALENTE



$$m_{eq} \ddot{x}_1 + c_{eq} \dot{x}_1 + k_{eq} x_1 = 0$$

D'Alembert



⊗ Relaciones cinemáticas: ($\theta \ll 1$)

$$x_2 = b \cdot \theta$$

$$x_1 = a \cdot \theta \longrightarrow \theta = \frac{x_1}{a} \longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_1}{a}$$

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{b}{a} \longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{b}{a} \cdot \dot{x}_1 \longrightarrow \ddot{x}_2 = \frac{b}{a} \cdot \ddot{x}_1$$

$$x_G = \theta \cdot l_g = \frac{l_g}{a} \cdot x_1 \longrightarrow \dot{x}_G = \frac{l_g}{a} \cdot \dot{x}_1 \longrightarrow \ddot{x}_G = \frac{l_g}{a} \cdot \ddot{x}_1$$

⊗ Principio de d'Alembert:

$$\Sigma M_0 = 0: (m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_3 \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot \dot{x}_2) b \cdot \cos \theta + (m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1) a \cdot \cos \theta + M \ddot{x}_G \cdot l_g \cdot \cos \theta + I_G \ddot{\theta} + k_t \theta = 0.$$

$$\left(m_2 \cdot \frac{b^2}{a} + m_1 + M \frac{l_g^2}{a} + I_G \cdot \frac{1}{a} \right) \ddot{x}_1 + \left(c_2 \cdot \frac{b^2}{a} + c_1 \right) \dot{x}_1 + \left(k_3 \frac{b^2}{a} + k_2 \cdot \frac{b^2}{a} + k_1 \cdot a + k_t \cdot \frac{1}{a} \right) x_1 = 0$$

Para reducirlo según el gdl $x_1 \rightarrow$ entre a. (para las unidades)

$$\left(m_2 \cdot \frac{b^2}{a^2} + m_1 + M \cdot \frac{l_g^2}{a^2} + I_G \cdot \frac{1}{a^2} \right) \ddot{x}_1 + \left(c_2 \cdot \frac{b^2}{a^2} + c_1 \right) \dot{x}_1 + \left(k_3 \frac{b^2}{a^2} + k_2 \frac{b^2}{a^2} + k_1 + k_t \cdot \frac{1}{a^2} \right) x_1 = 0.$$

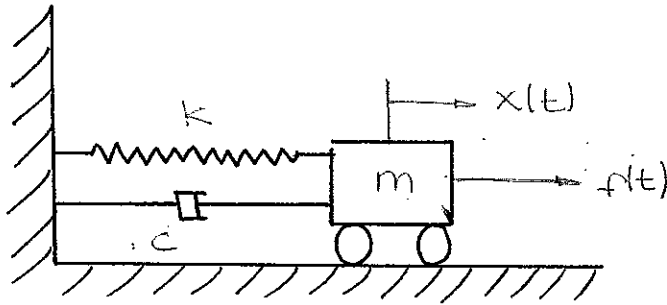
Identificándolo con la ecuación del sist equivalente

$$m_{eq} = m_2 \cdot \frac{b^2}{a^2} + m_1 + M \cdot \frac{l_g^2}{a^2} + I_G \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$c_{eq} = c_2 \frac{b^2}{a^2} + c_1$$

$$k_{eq} = k_3 \cdot \frac{b^2}{a^2} + k_2 \frac{b^2}{a^2} + k_1 + k_t \cdot \frac{1}{a^2}$$

8. Sistemas con un GDL I: Vibraciones libres



Modelo de 1GDL

⊗ Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS.

$$\begin{cases} f(t) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

⊗ VIGA EMPOTRADA:

$$k_{\text{flexión}} = \frac{3EI}{L^3}$$

La ecuación a resolver es: $m\ddot{x} + kx = 0$.

→ solución: $x(t) = C \cdot e^{st}$

Hay que determinar C y s.

$$C(ms^2 + k) \cdot e^{st} = 0$$

$$ms^2 + k = 0$$

$$s = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

→ Solución general: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \text{sen}(\omega t)$

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

A través de las condiciones iniciales impuestas se determinan A y B.

$$x(0) = x_0 = A + B$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = B \cdot \omega$$

$$\longrightarrow A = x_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$x^2 = A^2 + B^2$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{B}{A}$$

$$x(t) = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \cos \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \right)$$

⊗ Frecuencia natural: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

$$f(t) = 0$$

La ecuación a resolver es $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

→ Solución: $x(t) = C \cdot e^{st}$

Se obtienen las raíces: $s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

⊗ Amortiguamiento crítico (\bar{c})

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \rightarrow \bar{c} = 2m\omega$$

* Amortiguamiento supercrítico ($c > \bar{c}$)

* Amortiguamiento crítico ($c = \bar{c}$)

* Amortiguamiento subcrítico ($c < \bar{c}$)

⊗ Amortiguamiento relativo (ξ): $\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2m\omega}$

1) Amortiguamiento supercrítico ($\xi > 1$)

$$s_1 = \omega(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$s_2 = \omega(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

→ solución general: $x(t) = C_1 \cdot e^{s_1 t} + C_2 \cdot e^{s_2 t}$

2) Amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

$$s_1 = s_2 = -\omega$$

→ solución general: $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\omega t}$

3) Amortiguamiento subcrítico ($\xi < 1$)

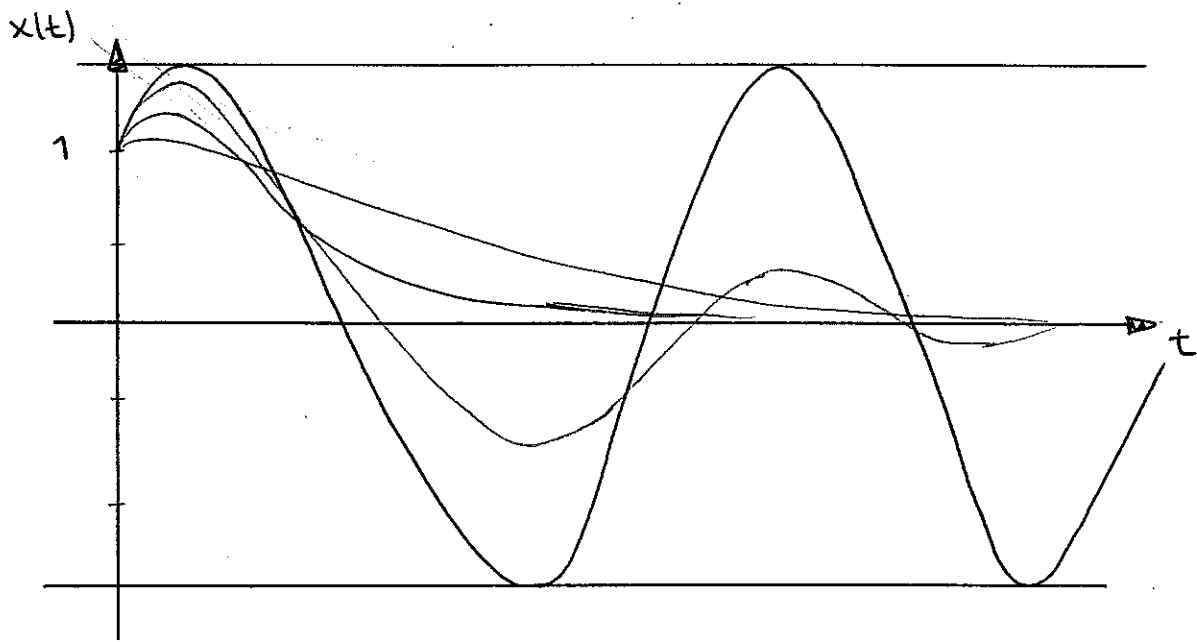
$$s_1 = \omega (-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})$$

$$s_2 = \omega (-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})$$

siendo $\omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$: frecuencia de vibración amortiguada.

→ Solución general: $x(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cdot \cos \omega_D t + B \cdot \sin \omega_D t)$$



- sin amortiguamiento
- amortiguamiento subcrítico.
- amortiguamiento crítico
- amortiguamiento supercrítico.

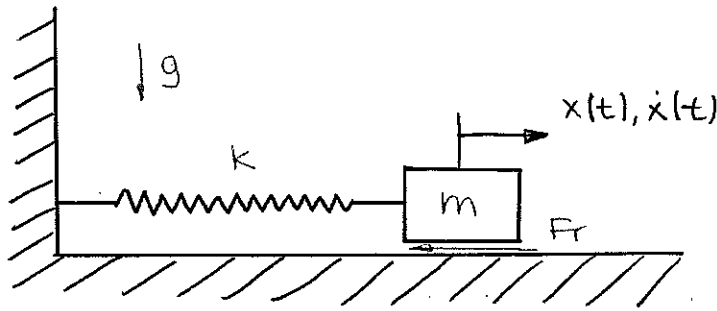
La mayoría de los sistemas mecánicos: amortiguamiento muy pequeño ($\xi \ll 1$).
Para estos sistemas la frecuencia de vibración amortiguada se aproxima a su correspondiente FRECUENCIA NATURAL.

En el caso del amortiguamiento crítico ω_D se anula luego el periodo se hace infinito. La amplitud NUNCA atravesará el eje del tiempo, se aproximará a él asintóticamente.

Para valores superiores del amortiguamiento (AMORTIGUAMIENTO SUPERCRÍTICO) la amplitud tiende a cero todavía más lentamente.

AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB.

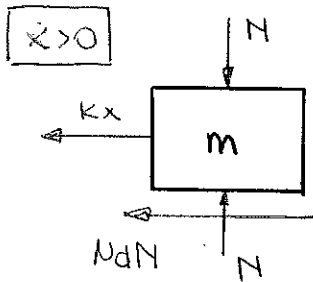
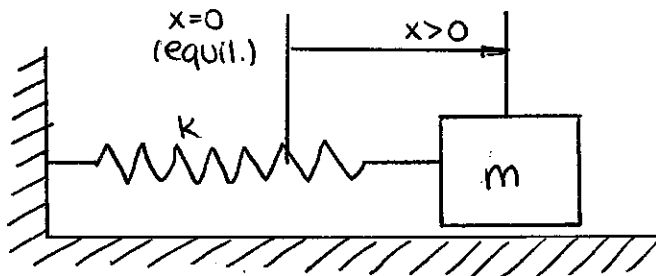
Las vibraciones se amortiguan como consecuencia del rozamiento seco entre superficies que deslizan entre si.



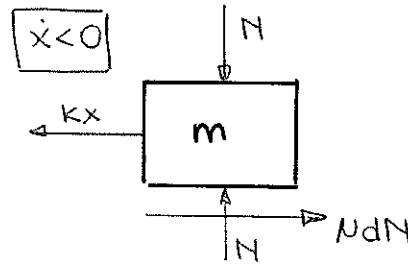
coeficiente de rozamiento dinámico.

$$F_r = -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \mu_d \cdot N$$

Para obtener la ecuación de movimiento del sistema; considerando la masa en movimiento fuera de la pos. de equilibrio del muelle.



$$m\ddot{x} + kx = -\mu_d N$$



$$m\ddot{x} + kx = \mu_d N$$

Primer intervalo:

$\dot{x} < 0$: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_d N}{k}$

cond. iniciales: $x(0) = x_0 > 0$
 $\dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_d N}{k} \right) \cos(\omega t) + \frac{\mu_d N}{k}$$

válida hasta t_1 $\dot{x}(t_1) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega} \rightarrow x_1 = -x_0 + 2 \frac{\mu_d N}{k}$

⊙ Segundo intervalo:

$$\boxed{\dot{x} > 0} : x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) - \frac{\mu d N}{k}$$

cond. iniciales: $x(t_1) = x_1$
 $\dot{x}(t_1) = 0.$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - 3 \frac{\mu d N}{k} \right) \cdot \cos \omega t - \frac{\mu d N}{k}}$$

válida hasta t_2 $\dot{x}(t_2) = 0 \rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow x_2 = x_0 - 4 \frac{\mu d N}{k}$

⊙ i-ésimo intervalo:

$$x_i(t) = \left[x_0 - (2i-1) \frac{\mu d N}{k} \right] \cos(\omega t) - (-1)^i \frac{\mu d N}{k} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Y la amplitud al final del mismo:

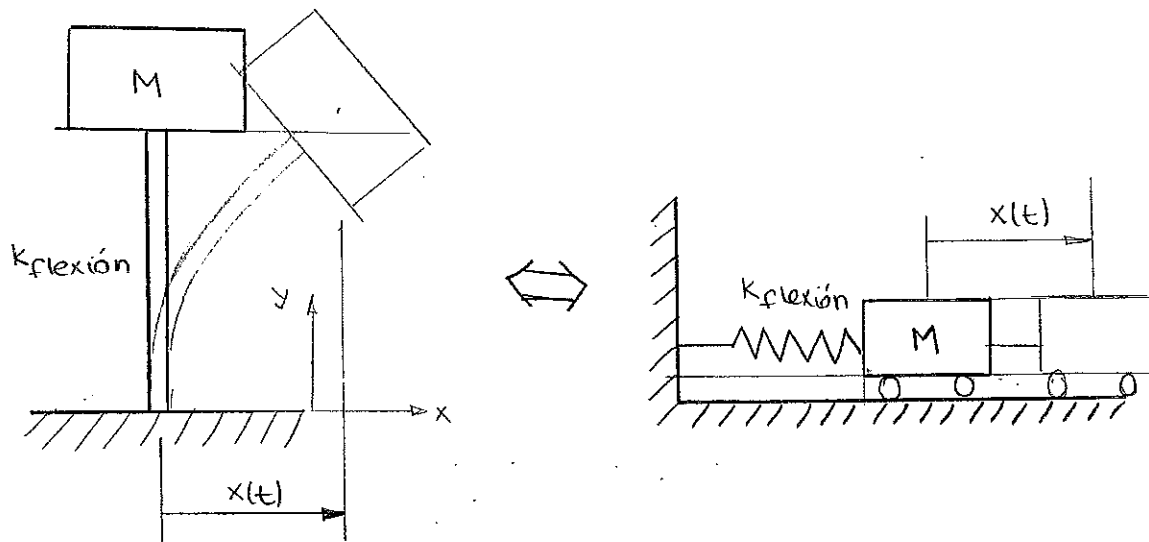
$$x_i = (-1)^i \left(x_0 - 2i \frac{\mu d N}{k} \right) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

El movimiento llega a su fin cuando $|k \cdot x_j| \leq N_0 \cdot N$

$$k \cdot \left(x_0 - 2j \frac{\mu d N}{k} \right) \leq N_0 \cdot N \rightarrow j \geq \frac{k x_0 - N_0 \cdot N}{2 \mu d \cdot N}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

P.195. Ejercicio resuelto.



$$L = 100\text{m}$$

$$d_o = 3\text{m}$$

$$d_i = 2.5\text{m}$$

$$M = 3 \cdot 10^5 \text{Kg}$$

La rigidez de la viga es $K_{\text{flexión}} = \frac{3EI}{L^3}$

$$E = 20.58 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = 2.058 \text{m}^4$$

$$L^3 = 100^3 \text{m}^3$$

$$K_{\text{flexión}} = 127.06 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

frecuencia natural del sistema: $\omega = \sqrt{\frac{K_{\text{flexión}}}{M}} = 2.058 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

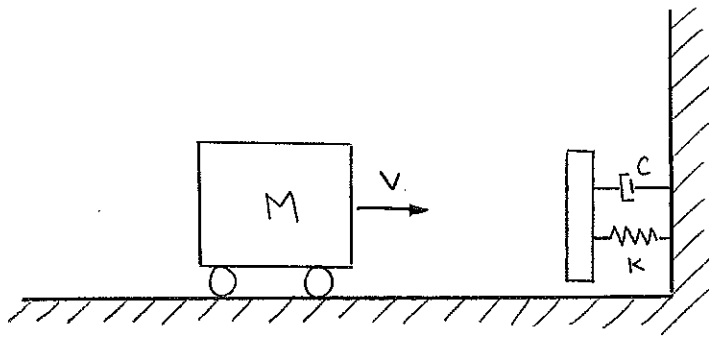
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.3275 \text{Hz}$$

En el caso que la masa de la columna no pudiera considerarse despreciable:

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L dm \cdot v^2(y, t) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A dy (\dot{x} \delta(y))^2$$

$$m_{\text{eq}} = M + \rho \cdot AL \cdot \frac{33}{140}$$

P.196. Ejercicio resuelto.



$$M = 2500 \text{ kg}$$

$$v = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$k = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$c = 35 \frac{\text{Ns}}{\text{mm}}$$

● Tipo de amortiguamiento del sistema:

$$\bar{c} = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 17320,51 \text{ kg/s}$$

$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} = 2,0207 > 1: \text{amortiguamiento supercrítico}$$

La respuesta de un sistema de 1gdl con amortiguamiento supercrítico

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

$$\text{siendo } s_1 = \omega(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -0,91725$$

$$s_2 = \omega(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -13,08256$$

$$x(t) = C_1 e^{-0,91725t} + C_2 e^{-13,08256t}$$

condiciones iniciales.

$$(1) x_0 = 0.$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0.$$

$$(2) \dot{x}_0 = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 2,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x'(0) = -0,91725 C_1 - 13,08256 C_2 = 2,78$$

$$C_1 = 0,2285 \text{ m}$$

$$C_2 = -0,2285 \text{ m}$$

$$x(t) = 0,2285 e^{-0,91725t} - 0,2285 e^{-13,08256t}$$

La posición de desplazamiento máximo será tal que

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 = -0,91725 \cdot 0,2285 e^{-0,91725t} - 0,2285 \cdot (-13,08256) e^{-13,08256t} = 0$$

$$t = 0,2184 \text{ s}$$

$$x(0,2184 \text{ s}) = 0,174 \text{ m}$$

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes the need for transparency and accountability in financial reporting.

2. The second part of the document outlines the various methods and techniques used to collect and analyze data. It includes a detailed description of the experimental procedures and the statistical tools employed.

3. The third part of the document presents the results of the study, showing the trends and patterns observed in the data. It includes several tables and graphs to illustrate the findings.

4. The fourth part of the document discusses the implications of the results and provides recommendations for future research. It highlights the areas that need further exploration and the potential applications of the findings.

5. The final part of the document is a conclusion that summarizes the key points of the study and reiterates the importance of the research.

9. Sistemas con 1 GDL: Vibraciones armónicas

- Vibraciones forzadas: se producen como consecuencia de la introducción de energía externa al sistema durante la vibración.
- Para comprobar el comportamiento dinámico de un sistema se buscan determinadas EXCITACIONES TIPO, de forma que la respuesta del sistema frente a dichas acciones caracterice de la manera más completa posible su comportamiento dinámico.
 - * Excitaciones armónicas: son fáciles de reproducir físicamente, por ejemplo mediante una masa excéntrica rotatoria. Para caracterizar completamente un modelo, basta estudiar su respuesta para un grado suficientemente amplio de frecuencias de la excitación.
 - * Función impulso: es la más simple matemáticamente hablando. Desde un punto de vista físico es una percusión y en un laboratorio se reproduce mediante un simple martillozo.
 - * Excitaciones aleatorias: se ajustan a una determinada distribución estadística (acciones del viento, mar en una tormenta, el perfil rugoso de una carretera...)

RESPUESTA ANTE UNA FUERZA ARMÓNICA

La ecuación que rige el movimiento de las ecuaciones forzadas: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$.

● FUERZA ARMÓNICA: $f(t) = f_0 \cdot \cos(\omega t)$
 $f(t) = f_0 \cdot \sin(\omega t)$ } Excitación armónica.

* Solución de la ecuación homogénea (amortiguamiento subcrítico)

$$x_h(t) = X \cdot e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta)$$

* Solución particular:

- Prueba: $x_p(t) = A \cdot e^{i\bar{\omega} t}$ ($A \rightarrow$ constante compleja a determinar)

$$-m \cdot \bar{\omega}^2 A e^{i\bar{\omega} t} + c \cdot i \bar{\omega} \cdot A e^{i\bar{\omega} t} + k \cdot A e^{i\bar{\omega} t} = f_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{f_0}{-m\bar{\omega}^2 + i c \bar{\omega} + k}$$

siendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $\xi = \frac{c}{2m\omega}$

$$A = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2 + i \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega}}$$

Denominando $\beta = \frac{\omega}{\omega}$

* solución general: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = X \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \cos(\omega_0 t - \theta) + \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\xi\beta} e^{i\omega t}$

o lo que es lo mismo

$$x(t) = X \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot \cos(\omega_0 t - \theta) + \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

siendo φ el desfase entre solución particular y la excitación:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

→ Desplazamiento estático: $X_{est} = \frac{f_0}{k}$

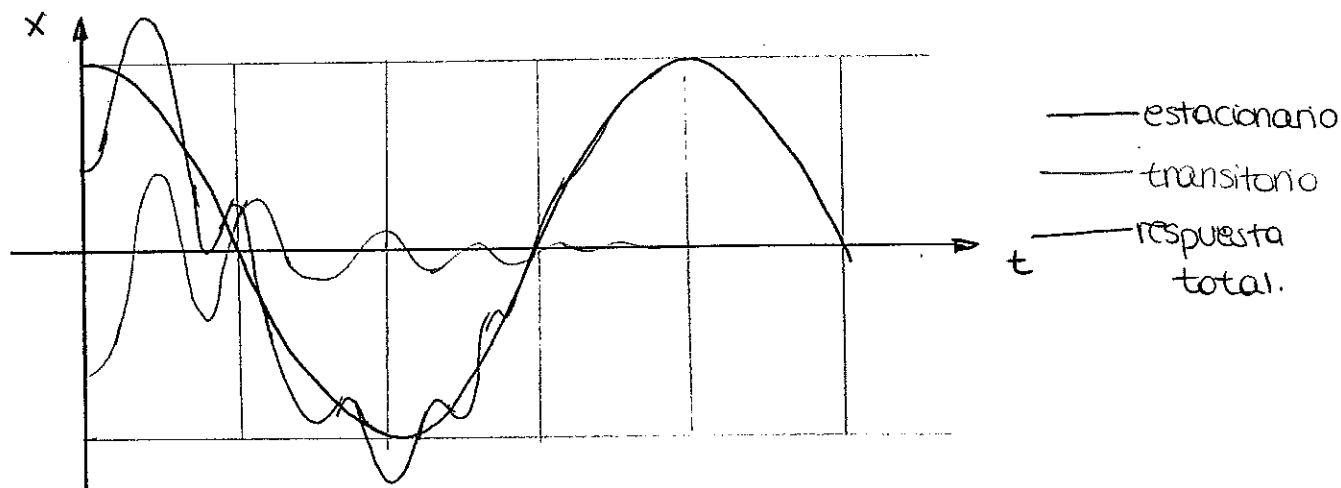
→ Factor de amplificación dinámica: $D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

* Solución para $f(t) = f_0 \cdot \cos \omega t$: $x(t) = X \cdot e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_0 t - \theta) + X_{est} \cdot D \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

* Solución para $f(t) = f_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$: $x(t) = X \cdot e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_0 t - \theta) + X_{est} \cdot D \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi)$

Los valores de las constantes X y θ de las ecuaciones se obtienen al introducir las condiciones iniciales.

Las expresiones anteriores poseen dos términos claramente diferenciados: el primero se corresponde con la solución de la ecuación homogénea y representa la componente transitoria de la respuesta. El segundo término se corresponde con la solución particular y representa la parte estacionaria de la respuesta.



se asumirá como solución de las VIBRACIONES ARMÓNICAS sólo la componente estacionaria. (No hay que prescindir del estudio del transitorio en los primeros instantes del movimiento.)

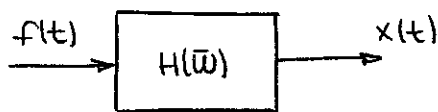
$$x(t) \approx \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\zeta\beta} e^{i\omega t}$$

Se define como función de transferencia del sistema

$$H(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i 2\zeta\beta}$$

Esta función compleja depende de los parámetros del sistema: masa, amortiguamiento y rigidez; también depende de la frecuencia de la excitación.

$$x(t) = H(\omega) \cdot f(t)$$



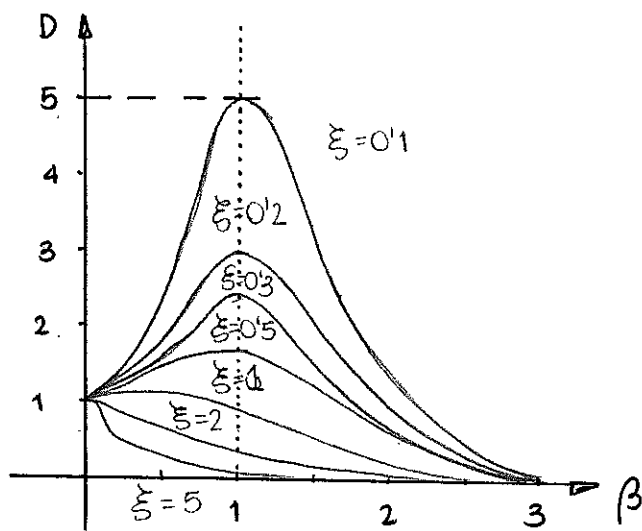
El desplazamiento estático, es decir, x_{est} es el desplazamiento que tendría la masa concentrada si la carga fuera aplicada estáticamente.

$$x(t) = x_{est} \cdot D \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$x_{din} = x_{est} \cdot D$$

x_{din} es la amplitud dinámica que representa la amplitud de la respuesta.

Puesto que la amplitud dinámica resulta sencilla de obtener, queda estudiar la variabilidad del factor de amplitud dinámica.



⊙ Considerando un valor habitual del amortiguamiento relativo, por ejemplo, $\xi = 0.1$. Para frecuencias de excitación próximas a la natural ($\beta = 1$), la amplitud del desplazamiento resultante puede ser hasta cinco veces mayor que el desplazamiento estático.

Para evitar valores altos del factor de amplificación dinámica, existen dos alternativas:

- 1) Aumentar el amortiguamiento relativo.
- 2) Escoger los parámetros k y m del modelo para que las posibles frecuencias de excitación estén siempre lejos de la frecuencia natural.

⊙ Resonancia: cuando la frecuencia de excitación coincide con la natural del sistema ($\omega = \bar{\omega}$)

COMPROBACIÓN DE LA RESONANCIA.

Caso ideal de una vibración armónica del tipo $f(t) = f_0 \cos(\bar{\omega}t)$ sin amortiguamiento.

Para unas condiciones iniciales de movimiento nulas:

$$x(t) = \pm \frac{x_{est}}{1 - \beta^2} (\cos \bar{\omega}t - \cos \omega t)$$

cuando $\beta \rightarrow 1$ (RESONANCIA)

$$x(t) = \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \omega} \pm \frac{x_{est}(\cos \bar{\omega}t - \cos \omega t)}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} = \pm \frac{x_{est} \cdot \omega}{2} t \cdot \text{sen}(\omega t)$$

OBTENCIÓN DEL VALOR MÁXIMO

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow D_{\text{máx}} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Para valores pequeños del amortiguamiento relativo ($\xi \leq 0.1$)

$$\beta \approx 1 \text{ y } D_{\text{máx}} \approx \frac{1}{2\xi}$$

En resonancia el desfase angular entre la excitación y la respuesta es siempre 90° para cualquier valor de ξ , excepto para $\xi=0$. En este último caso, el desfase experimenta una discontinuidad en $\beta=1$. (para $0 < \beta < 1$: $\varphi=0^\circ$ y para $\beta > 1$: $\varphi=180^\circ$).

REPRESENTACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO:

$$f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0.$$

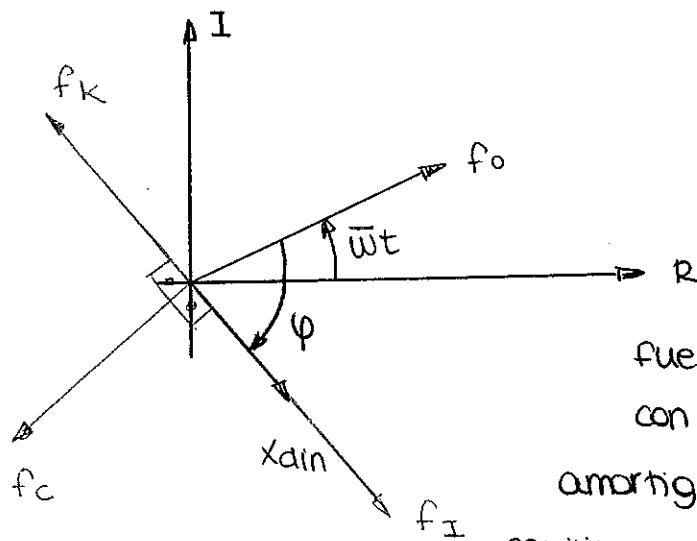
$$f(t) = f_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$-m\ddot{x} = f_I \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$-c\dot{x} = f_c \cdot e^{i(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$-k \cdot x = f_k \cdot e^{i(\omega t - \varphi - \pi)}$$

$$\begin{aligned} -m\ddot{x} &= m\omega^2 X \sin e^{i(\omega t - \varphi)} \\ -c\dot{x} &= -i\omega c X \sin e^{i(\omega t - \varphi)} \\ -k \cdot x &= -k \cdot X \sin e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned}$$



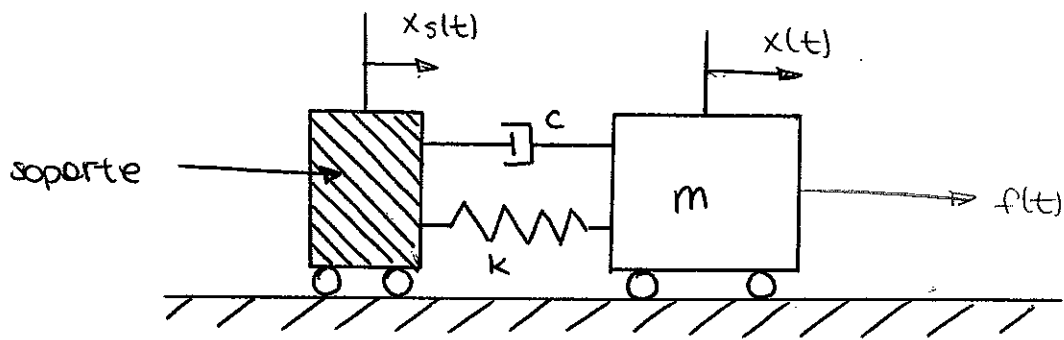
En la condición de resonancia cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la excitación se

equilibra perfectamente con la

fuerza disipativa, y la fuerza de inercia con la elástica. Por esto, cuando el

amortiguamiento es muy pequeño sólo puede equilibrarse la fuerza aplicada con un desplazamiento desmesurado.

RESPUESTA ANTE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO DEL SOPORTE



El desplazamiento absoluto de la masa viene dado por:

$$x(t) = x_s(t) + x_r(t)$$

siendo $x_r(t)$ el desplazamiento relativo de la masa respecto del soporte.

Aplicando la 2ª LEY DE NEWTON a la masa m :

$$f(t) - c \cdot \dot{x}_r - k \cdot x_r = m \ddot{x}$$

Luego la ecuación de movimiento en coordenadas absolutas queda:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f(t) + c \dot{x}_s + k \cdot x_s$$

Y en coordenadas relativas:

$$m \ddot{x}_r + c \dot{x}_r + kx_r = f(t) - m \ddot{x}_s$$

Para el caso de que no haya fuerzas exteriores ($f(t)=0$) y el soporte se mueva armónicamente según la ecuación $x_s(t) = x_s \cdot \text{sen } \omega t$

$$- m \ddot{x}_s = m \omega^2 x_s \cdot \text{sen } (\omega t)$$

La parte estacionaria de la respuesta correspondiente al movimiento relativo será:

$$x_r(t) = \beta^2 \cdot x_s D \cdot \text{sen } (\omega t - \psi_r)$$

donde ψ_r es el desfase angular en el mov. relativo.

La respuesta correspondiente al mov. absoluto de la masa será

$$x(t) = x_s \cdot \text{sen } \omega t + x_s \cdot \beta^2 D \cdot \text{sen } (\omega t - \psi_r)$$

también puede expresarse como $x(t) = X \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi)$ donde

$$X = X_s \cdot \sqrt{(1 + \beta^2 D \cos \varphi_r)^2 + (\beta^2 D \text{sen} \varphi_r)^2}$$

y

$$\tan \varphi = \frac{\beta^2 D \text{sen} \varphi_r}{1 + \beta^2 D \cos \varphi_r}$$

Desarrollando dichas ecuaciones se obtiene que:

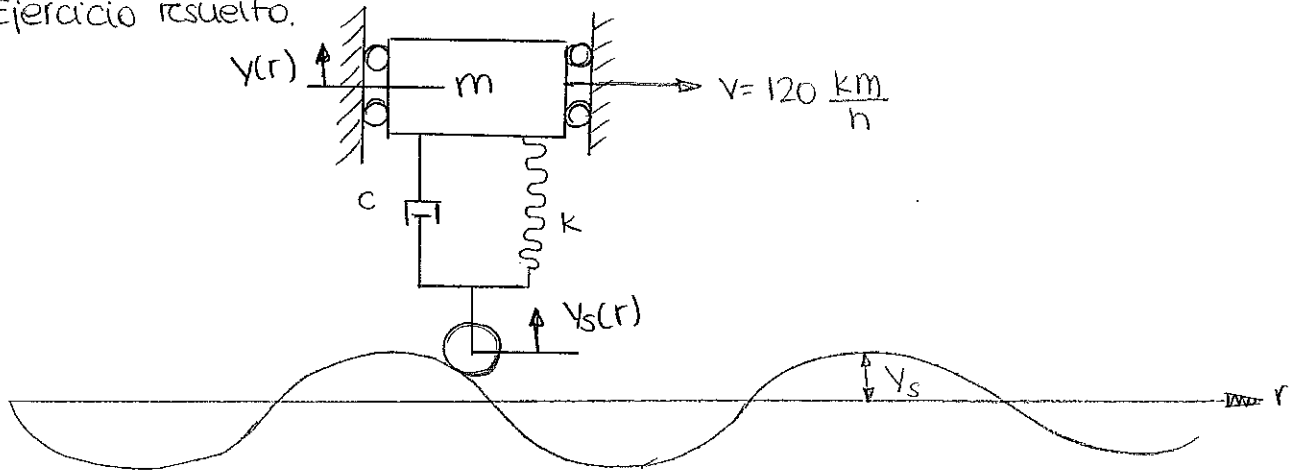
$$\begin{aligned} X &= X_s \cdot D \sqrt{1 + (2\beta\xi)^2} \\ \text{tg}(\varphi) &= \frac{2\xi\beta^3}{1 - \beta^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$x(t) = X_s D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \cdot \text{sen} \left(\omega t - \arctg \left(\frac{2\xi\beta^3}{1 - \beta^2 + (2\xi\beta)^2} \right) \right)$$

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

P.112. Ejercicio resuelto.



$m = 1500 \text{ kg}$

$K = 600 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$\xi = 0.6$

- perfil de la onda: sinusoidal
 - amplitud $y_s = 0.04 \text{ m}$
 - long. de onda $\lambda = 8 \text{ m}$

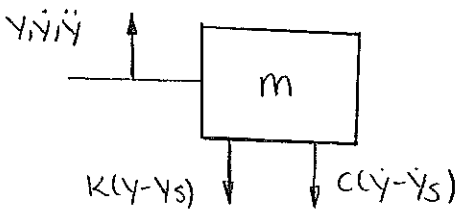
→ longitud de onda:
 $y(r) = y_s \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)$
 luego hacemos cambio de
 vble ($r = vt$)

A) Amplitud del desplazamiento absoluto del vehículo.

$y_s(r) = y_s \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)$

realizando el cambio de vble $r = vt$

$y_s(t) = y_s \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt\right) = y_s \cdot \sin(\omega t) \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v}$



Equación de equilibrio:

$-K(y - y_s) - c(\dot{y} - \dot{y}_s) = m \cdot \ddot{y}$

$m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = c\dot{y}_s + K y_s$

$\left\{ \begin{array}{l} y_s = y_s \sin(\omega t) \\ \dot{y}_s = y_s \omega \cos(\omega t) \end{array} \right\} m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = K \cdot y_s \sin(\omega t) + c \cdot y_s \omega \cos(\omega t)$

considerando $\left\{ \begin{array}{l} K \cdot y_s = A \cos \alpha \\ c \omega y_s = A \sin \alpha \end{array} \right\} \boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = A \sin(\omega t + \alpha)}$

$\hookrightarrow A = y_s \sqrt{K^2 + c^2 \omega^2}$

$\alpha = \arctg \frac{c \omega}{K}$

El problema es EQUIVALENTE a aplicar una fuerza armónica de amplitud A y desfase α .

⊗ Respuesta estacionaria:

$$y(t) = \frac{A}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

donde $\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

$$Y = Y_{est. D} = \frac{A}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$A = Y_s \sqrt{k^2 + c^2 \cdot \omega^2}$$

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \frac{2\pi}{8m} \cdot 120 \frac{km}{h} \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 26,18 \frac{rad}{s} \rightarrow A = 44890,3757$$

$$c = \xi \cdot 2m\omega = 36000 \frac{kg}{s}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1,309$$

$$Y = 0,0465m$$

B) Máxima elongación del muelle.

La elongación del muelle viene dada por el desplazamiento relativo entre el vehículo y la carretera.

$$y_r(t) = y(t) - y_s(t)$$

Equilibrio en coordenadas relativas:

$$m \cdot \ddot{y}_r + c \cdot \dot{y}_r + k \cdot y_r = -m \ddot{y}_s = m \cdot \omega^2 y_s \cdot \sin \omega t$$

La respuesta por tanto

$$y_r = \frac{m \omega^2 y_s}{k} \cdot D \cdot \sin(\omega t - \varphi_r) \quad \left. \vphantom{y_r} \right\} y_{r, \text{máx}} = 0,0428m$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0,6246$$

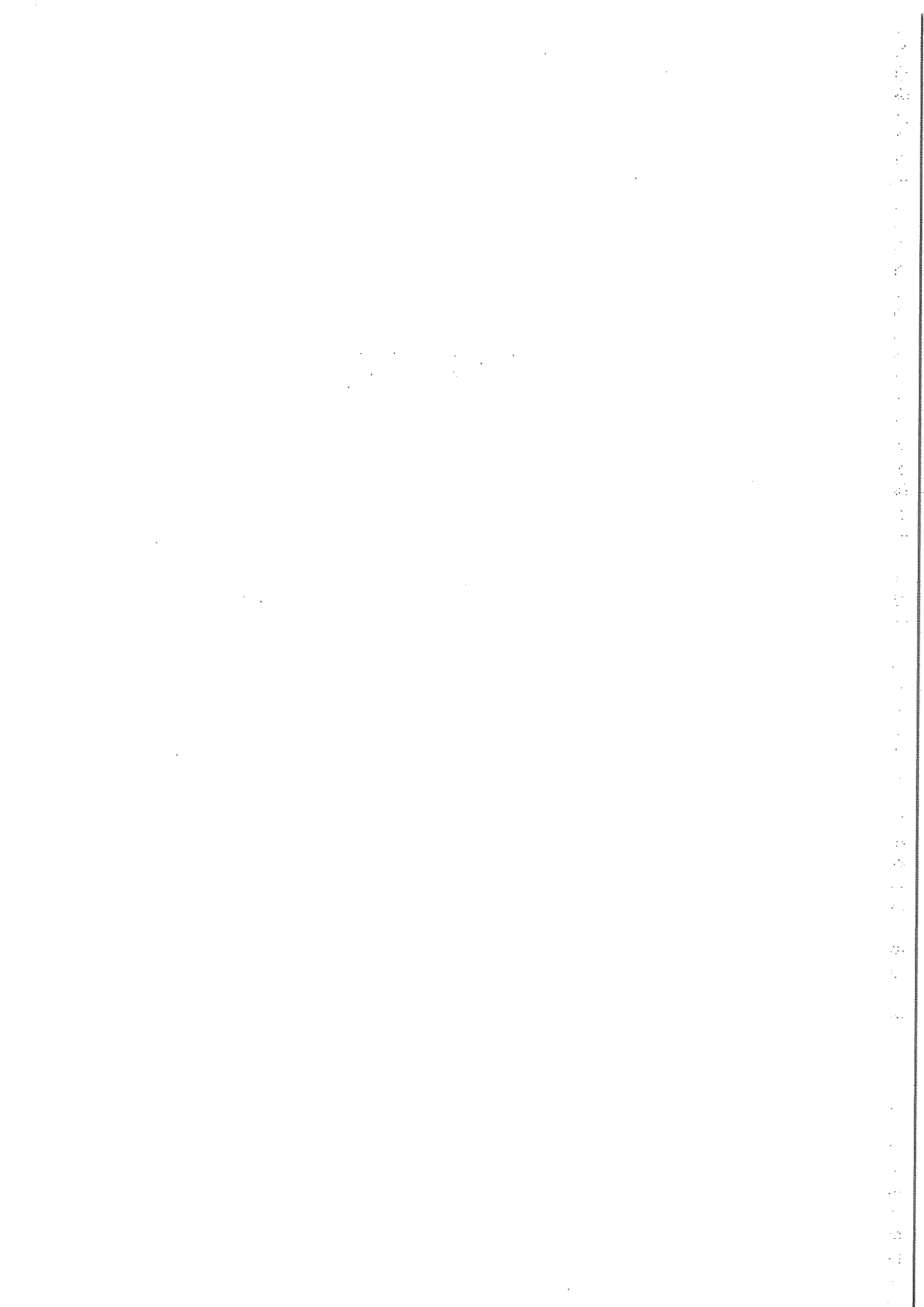
c) Fuerza transmitida a la carretera

Resultante de las fuerzas en el muelle y en el amortiguador:

$$f = k \cdot y_r + c \cdot \dot{y}_r = -m \ddot{y} = m \cdot Y \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$F = m Y \cdot \omega^2 = 47'806 \text{ kN}$$

$$F = 47'806 \text{ kN}$$



10. Sistemas con un GDL: Integral de Convolución

RESPUESTA ANTE LAS FUNCIONES IMPULSO, ESCALÓN Y RAMPA.

● Fuerza impulso: fuerza F de gran magnitud que actúa durante un periodo de tiempo Δt muy pequeño, de manera que el producto $F \Delta t$ sea una cantidad I finita ($I = F \cdot \Delta t$). (I : impulso mecánico).

si el impulso está aplicado en a : $F(t-a) = I \cdot \delta(t-a)$.

* Respuesta a la función impulso.

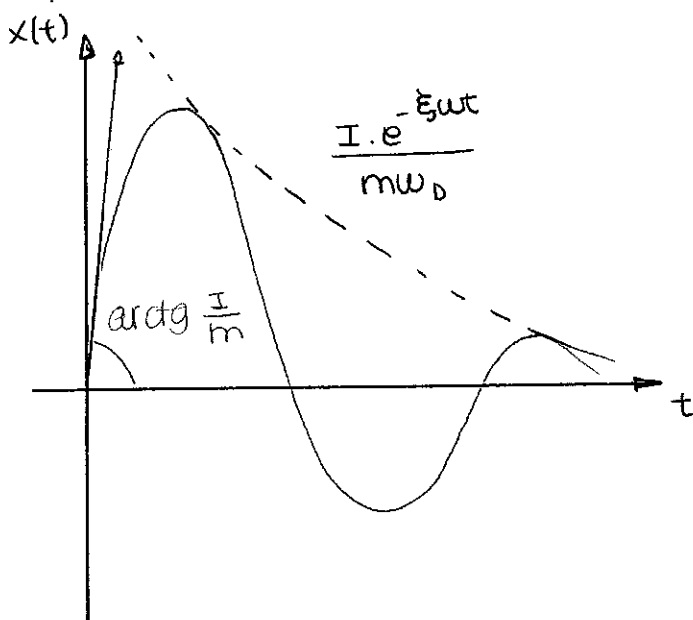
La ecuación que gobierna el movimiento será: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + x(t) = F(t) = I \cdot \delta(t)$

La respuesta se obtiene de aplicar a la solución de las vibraciones libres, las condiciones iniciales con las que queda el sistema después de la aplicación del impulso, es decir, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$

De esta forma obtenemos $x(t) = \frac{I e^{-\xi \omega t}}{m \omega_D} \cdot \sin \omega_D t$

Y en caso de que estuviera aplicada en $t=a$.

$$x(t) = I \cdot \frac{e^{-\xi \omega (t-a)}}{m \omega_D} \cdot \sin(\omega_D (t-a))$$



⊗ Respuesta a función escalón:

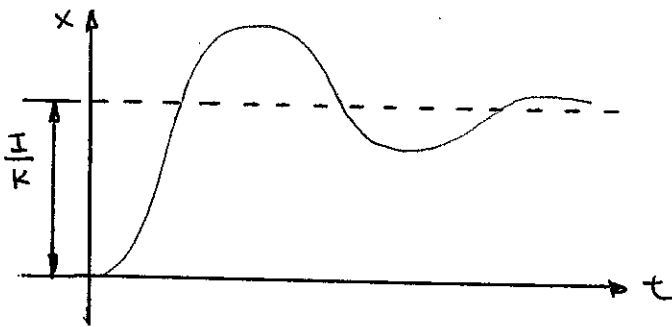
Basta con integrar la respuesta a la función impulso:

$$x(t) = \int_0^t \frac{I \cdot e^{-\xi \omega t}}{m \omega_0} \cdot \cos(\omega_0 t - \theta) dt = \frac{I}{K} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_0 t - \theta) \right]$$

siendo $\theta = \arctg \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$

o lo que es lo mismo: $x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t) + \frac{I}{K}$

$A = -\frac{I}{K}$ y $B = \frac{-\xi \omega I}{k \omega_0}$ (cond. iniciales nulas)

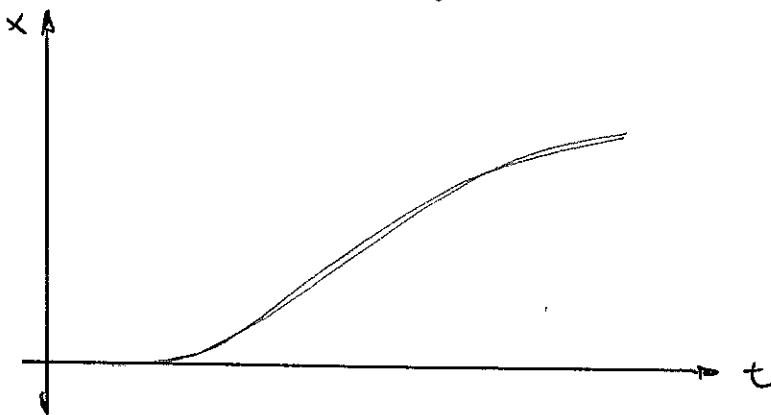


⊗ Respuesta a la función rampa:

La respuesta puede obtenerse integrando la función escalón:

$$x(t) = \int_0^t \frac{I}{K} - \int_0^t \frac{I e^{-\xi \omega t}}{K \sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_0 t - \theta) dt = \frac{I}{K} t - \frac{I}{K \omega_0} \left[e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_0 t - 2\theta) + 2\theta \right]$$

siendo $\theta = \arctg \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$



SOLUCIÓN GENERAL CON COND. INICIALES NO NULAS.

Aplicación del principio de superposición.

● Aplicación del principio de superposición.

La respuesta global se divide en dos sumandos, el primero corresponde a la respuesta de las vibraciones libres sometidas a las condiciones iniciales impuestas. El segundo corresponde a la solución general x_s de las vibraciones forzadas pero con condiciones iniciales nulas. Es decir que por una parte se ha tenido en el efecto de las condiciones iniciales y por otro el de la fuerza exterior. Para el caso de las funciones escalón y rampa:

$$\text{ESCALÓN: } x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \cdot \text{sen}\omega_D t \right] + \frac{I}{K} \left[1 - e^{-\xi\omega t} \left(\cos\omega_D t + \frac{\xi\omega}{\omega_D} \cdot \text{sen}\omega_D t \right) \right]$$

$$\text{RAMPA: } x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \cdot \text{sen}\omega_D t \right] + \frac{I}{K} t - \frac{I}{K\omega_D} \left[e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t - 2\theta) + \text{sen}2\theta \right]$$

RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE TIPO GENERAL (INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN)

Se va a obtener la respuesta del sistema frente a una fuerza $f(t)$ que varía de forma cualquiera con el tiempo. Esta fuerza está constituida por la suma de infinitas funciones impulso de valor $f(\tau)$ en cada instante $t = \tau$. En virtud del principio de superposición se obtendrá mediante la suma de las respuestas del sistema ante los infinitos impulsos diferenciales aplicados en instantes anteriores.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_D(t-\tau)) d\tau.$$

Es conocida como la integral de convolución. Si en el momento de aplicación de la fuerza el sistema se encuentra en condiciones iniciales no nulas habrá que añadir el correspondiente transitorio.

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_D \cdot \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_D + \xi\omega x_D}{\omega_D} \cdot \text{sen}\omega_D t \right] + \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

11. Sistemas con 1GDL: Transformada de Fourier

● La mayoría de las acciones que soportan muchos sistemas mecánicos son periódicas. →
→ desarrollar la excitación periódica en SERIES DE FOURIER (términos armónicos). La superposición de las respuestas de las componentes de la serie daría como resultado la respuesta a la excitación periódica.

● EXCITACIONES PERIÓDICAS: APLICACIÓN DE SERIES DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA.

● Obtención de la forma compleja de las series de Fourier.

Sea la ecuación de movimiento de un sistema mecánico de 1GDL:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

donde $f(t)$ es una función periódica de período T .

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega_0 t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega_0 t$$

$$\text{donde } \begin{cases} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ (frecuencia fundamental)} \\ a_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(j\omega_0 t) dt \quad j=0,1,2,\dots \\ b_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(j\omega_0 t) dt \quad j=1,2,3,\dots \end{cases}$$

La serie de Fourier obtenida es convergente y tiene por suma el valor de la función $f(t)$ en los puntos en los que ésta es continua, y el promedio de los valores $f(\tau^+)$ y $f(\tau^-)$ en cada punto τ de discontinuidad.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[F_j e^{ij\omega_0 t} + \bar{F}_j e^{-ij\omega_0 t} \right] \quad \text{donde } F_j = \frac{1}{2} \left(a_j + \frac{b_j}{i} \right) = \frac{1}{2} (a_j - ib_j) \text{ y}$$

\bar{F}_j es su conjugado.

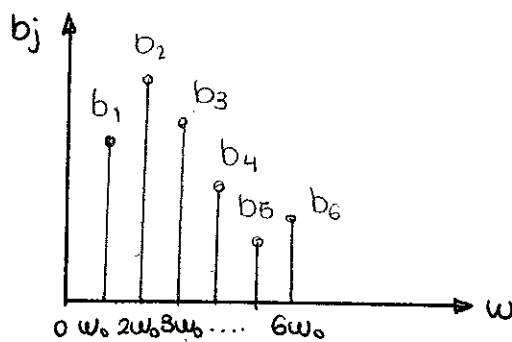
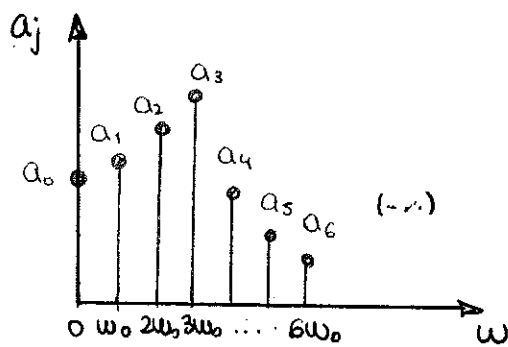
$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j \cdot e^{ij\omega_0 t}$$

Las constantes F_j tienen la forma $F_j = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) e^{-ij\omega_0 t} dt$

Las constantes complejas F_j indican la composición en frecuencia de la función periódica.

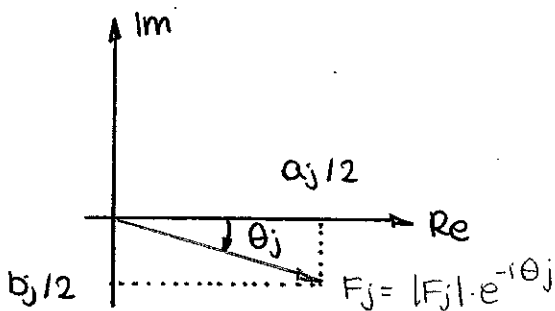
B) Espectro discreto de frecuencias.

Los términos de la serie de Fourier pueden agruparse según su frecuencia $j\omega_0$. Dichos términos así agrupados se denominan armónicos de la función periódica $f(t)$. El valor de los coeficientes a_j y b_j son una medida de la importancia del armónico $j\omega_0$ en relación con los demás.



c) Interpretación geométrica de la forma compleja de las series de Fourier.

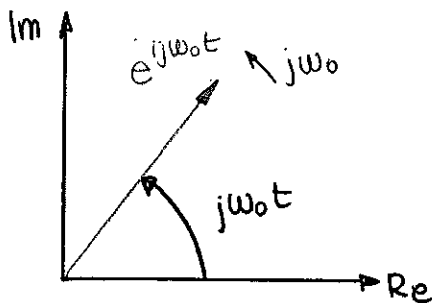
La función $f(t)$ es la suma de los diferentes productos $F_j \cdot e^{ij\omega_0 t}$ siendo F_j números complejos.



$$|F_j| = \frac{1}{2} \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

$$\theta_j = \arctg\left(\frac{b_j}{a_j}\right)$$

Los términos complejos $e^{ij\omega_0 t}$ son vectores giratorios.



Los términos imaginarios de $f(t)$ se anulan para cada término j , de esta forma:

$$f(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2|F_j| \cdot \cos(j\omega_0 t - \theta_j)$$

d) Obtención de la respuesta del sistema.

superposición $\rightarrow x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$ donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia del sistema.

EXCITACIONES NO PERIÓDICAS: APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Obtención de la respuesta:

considerando como punto de partida el método de cálculo de la respuesta frente a una excitación periódica de periodo T , cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica: correspondencia de parámetros:

ω_0	$T \rightarrow \infty$	$d\omega$
$j\omega_0$	\rightarrow	ω
$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$		$\frac{d\omega}{2\pi}$

cuando $T \rightarrow \infty$, $j\omega_0$ pasa a ser una variable continua, ω y en el límite las funciones discretas a_j y b_j se convierten en funciones continuas.

para obtener la respuesta a menudo es necesario realizar integraciones de contorno en el plano complejo.

B) Consideraciones adicionales. Interpretación de la transformada de Fourier.

si se comparan las expresiones de $f(t)$ correspondientes al caso discreto y al caso continuo:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j e^{j\omega_0 t} \quad , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

F_j es la contribución del armónico j a la función $f(t)$ en el caso de que esta sea una función periódica, la cantidad $\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$ constituye la contribución de cada intervalo de frecuencia $[\omega, \omega + d\omega]$ a la función no periódica $f(t)$

F_j consta de una parte real a_j y una parte imaginaria b_j ; así como $F(\omega)$ consta de una parte real $A(\omega)$ y una compleja $B(\omega)$.

$$a_j: \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} A(\omega) d\omega$$

$$b_j: \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} B(\omega) d\omega$$

Caso DISCRETO	→	Caso CONTINUO
a_j		$A(\omega) \cdot \frac{d\omega}{\pi}$
b_j		$B(\omega) \cdot \frac{d\omega}{\pi}$
F_j		$F(\omega) \cdot \frac{d\omega}{2\pi}$

Puede concluirse que: $F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$.

APLICACIÓN PRÁCTICA: CÁLCULO DE LA RESPUESTA DE LA FUNCIÓN IMPULSO.

Sea $f(t)$ la excitación definida por un impulso unitario en $t=0$: $f(t) = \delta(t)$

La respuesta a la función impulso se calcula: $\{X(\omega) = H(\omega)\}$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

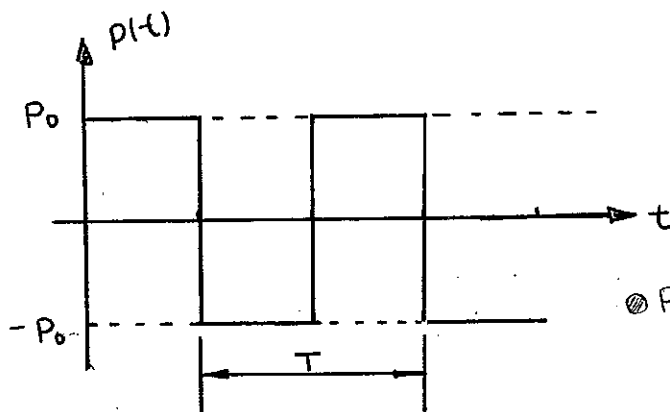
Recíprocamente se cumplirá que: $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$

de esta forma, a partir de $h(t)$ y de $H(\omega)$ se puede calcular la respuesta a una excitación de tipo general.

P.249. Problema resuelto.

sistema 16DL $\begin{cases} \xi = 0 \\ \text{masa: } m \\ \text{rigidez: } k \end{cases}$

⊗ Determinar la parte ESTACIONARIA de la respuesta a partir del desarrollo de Fourier.



⊗ Periodo $T \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

⊗ Desarrollo en serie de Fourier de $p(t)$: $p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \text{sen}(j\omega_0 t)$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos j\omega_0 t dt \quad j=0,1,2,\dots$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen} j\omega_0 t dt \quad j=1,2,3,\dots$$

$a_0 = \langle \text{valor medio de la función} \rangle = 0$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} P_0 \cos j\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -P_0 \cos j\omega_0 t dt = 0$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} P_0 \text{sen} j\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -P_0 \text{sen} j\omega_0 t dt = 0 =$$

$$= \frac{4}{T} \frac{1}{j\omega_0} P_0 [\cos(j\omega_0 \frac{T}{2}) + 1] = \frac{4}{T} \cdot \frac{T}{2\pi j} \cdot P_0 [\cos(j \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}) + 1] =$$

$$= \frac{-2P_0}{\pi j} [\cos(\pi j) - 1]$$

$$p(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P_0}{\pi j} (1 - \cos(\pi j)) \cdot \text{sen}(j\omega_0 t) = \frac{4P_0}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{j} \text{sen} j\omega_0 t$$

La respuesta estacionaria del sistema de 16DL no amortiguado frente a una excitación armónica es:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \text{sen}(\omega t)$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{j\omega_0}{\omega} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = \frac{4p_0}{\pi k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\omega_0 t}{j \left[1 - \left(\frac{j\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

12. Sistemas con 1GDL: aislamiento de vibraciones

MÉTODOS EXPERIMENTALES PARA LA MEDIDA DEL AMORTIGUAMIENTO.

A) Método del decremento logarítmico.

* Procedimiento más simple: consiste en sacar al sistema de su posición de equilibrio mediante la imposición de alguna condición inicial para después dejarlo vibrar libremente. A continuación se mide el desplazamiento del sistema en dos instantes separados por n ciclos.

$$\begin{cases} x_i = e^{-\xi \omega t_i} \cdot X \cdot \cos(\omega_D t_i - \theta) \\ x_{i+n} = e^{-\xi \omega t_{i+n}} \cdot X \cdot \cos(\omega_D t_{i+n} - \theta) \end{cases}$$

con $t_{i+n} = t_i + nT_D$, siendo $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$

$$\frac{x_i}{x_{i+n}} = e^{\xi \omega n T_D}$$

$$\delta = L \frac{x_i}{x_{i+n}} = \xi \omega n \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi n \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}}}$$

donde δ es el decremento logarítmico. Si como es frecuente $\xi \leq 0,1$ puede hacerse la aproximación

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi n}$$

B) Método de la amplificación a la frecuencia de resonancia.

se basa en la curva de amplificación dinámica.

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \text{Para la condición de resonancia } \bar{\omega} = \omega \text{ y } \beta = 1$$

$$D(\text{resonancia}) = D_R = \frac{1}{2\xi}$$

El método consiste en obtener el factor de amplificación dinámica en la condición de resonancia: $D_R = \frac{x_R}{x_{est}}$. Para ello se mide el desplazamiento del sistema en condición de resonancia, x_R , y el desplazamiento estático a frecuencia cero, x_{est} .

$$\xi = \frac{1}{2D_R}$$

En la práctica resulta complicado ajustar la excitación a la frecuencia de resonancia. Es más sencillo obtener el desplazamiento máximo $D_{m\acute{a}x}$:

$$D_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{x_{m\acute{a}x}}{x_{est}}$$

En el caso de que $\xi < 0.1$: $D_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2\xi} \rightarrow \xi \approx \frac{1}{2D_{m\acute{a}x}}$

cuando el amortiguamiento relativo es pequeño $D_{m\acute{a}x} \approx D_R$.

C) Método de la anchura de banda

Determino el factor de amortiguamiento a partir de las frecuencias a las cuales el desplazamiento alcanza un valor igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ veces su valor en resonancia x_R , es decir, $D_R x_{est} / \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta^4 + 2(2\xi^2 - 1)\beta^2 + (1 - 8\xi^2) = 0. \quad (\text{Ec. bicuadrada}).$$

$$\begin{cases} \beta_1^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \\ \beta_2^2 = 1 - 2\xi^2 + 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \end{cases}$$

$$(\beta_2^2 - \beta_1^2) = 4\xi \sqrt{1 - \xi^2}$$

si el amortiguamiento es pequeño $\xi < 0.1$:

$$\xi = \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{4} = \frac{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 + \beta_1)}{4}$$

como β_1 y β_2 son valores prácticamente equidistantes de $\beta = 1$:

$$\frac{\beta_2 + \beta_1}{2} \approx 1$$

por tanto

$$\xi \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \quad \text{y por tanto} \rightarrow \boxed{\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega}}$$

D) Método de la medida en resonancia.

Se excita la estructura con una fuerza armónica $f(t) = f_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$ mediante un excitador electromagnético. Como consecuencia de esto, un punto de la viga vibra armónicamente según la ley $x(t) = X \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi)$

El método consiste en someter al sistema a una excitación armónica de modo que se encuentre en condición de resonancia ($\omega = \omega_0$). En esta condición el desfase entre la excitación y la respuesta es $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la representación en el osciloscopio es una elipse cuyos semiejes coinciden con los ejes coordenados. Cuando el osciloscopio reconoce la forma de la elipse el frecuenciómetro digital mide la frecuencia.

En resonancia se cumple que $\boxed{c = \frac{f_0}{\omega X_R}}$ donde f_0 y X_R son las amplitudes registradas en el osciloscopio y ω es la frecuencia de resonancia del sistema.

E) Método de la energía perdida por ciclo.

Igual que el anterior pero se calcula el área encerrada por la elipse, que coincide con la energía disipada en un ciclo vibratorio.

$$\boxed{c = \frac{W_0}{\pi \omega \cdot X_R^2}}$$

F) Amortiguamiento equivalente

Las características vibratorias de los sistemas físicos con amortiguamientos de Coulomb o el estructural son bastante similares a las de los sistemas que tienen amortiguamiento viscoso lineal. Se puede obtener por tanto el amortiguamiento equivalente

$$C_{eq} = \frac{\pi \cdot f_0^2}{\omega \omega_D}$$

AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO O ESTRUCTURAL

⊗ Amortiguamiento producido por la fricción entre planos internos que deslizan cuando el material sufre deformación.

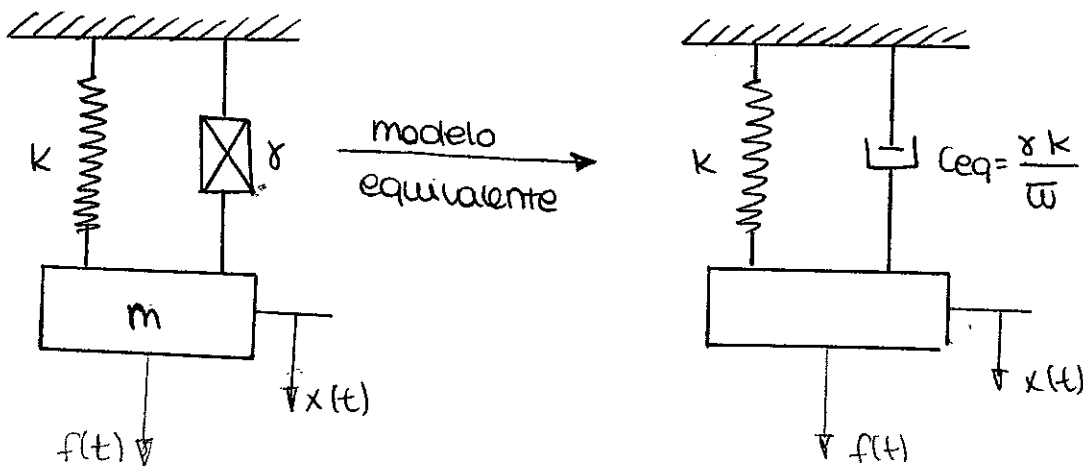
$$W_D = \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot x^2$$

x = amplitud del desplazamiento

k = rigidez equivalente

γ = constante adimensional: factor de amortiguamiento estructural.

$$C_{eq} = \frac{\gamma k}{\omega}$$



La ecuación del movimiento será del tipo $m \ddot{x} + \frac{\gamma k}{\omega} \cdot \dot{x} + k \cdot x = f_0 \cdot e^{i\omega t}$ ya que suponemos $f(t)$ una fuerza armónica.

La solución de la ecuación diferencial es del tipo:

$$x(t) = A \cdot e^{i\bar{\omega}t} \longrightarrow \dot{x}(t) = A i\bar{\omega} \cdot e^{i\bar{\omega}t} = i\bar{\omega} \cdot x(t)$$

$m\ddot{x} + k(1+\gamma i) \cdot x = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t}$: esta ecuación del movimiento está más de acuerdo con la hipótesis de amortiguamiento estructural.

La solución estacionaria será:

$$x_E(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + \gamma i} e^{i\bar{\omega}t}$$

y la función de transferencia $H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2 + \gamma i}$

La ecuación correspondiente a la respuesta estacionaria puede expresarse por:

$$x_E(t) = \frac{f_0}{k} D \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} \quad \text{siendo } D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \gamma^2}}$$

CONTROL Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES.

① Métodos pasivos para el control de vibraciones

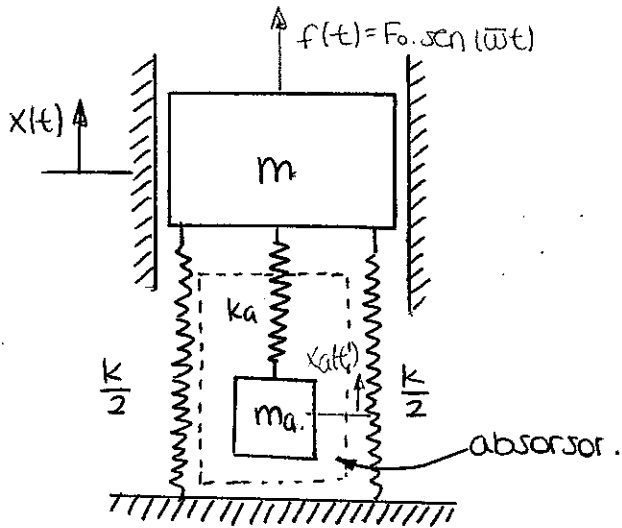
* CONTROL DE LAS FRECUENCIAS NATURALES: cuando la frecuencia de la fuerza dinámica actúa en las cercanías de la resonancia, el sistema sufre grandes deformaciones que pueden generar tensiones altas en el material. Es fundamental conseguir que las frecuencias de excitación estén alejadas de las frecuencias de resonancia del sistema.

En la mayoría de los casos la frecuencia de excitación no puede ser modificada luego hay que actuar sobre la frecuencia natural del sistema que depende de la masa y rigidez del mismo.

* INTRODUCCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO: en sistemas que trabajan con un amplio rango de velocidades no es posible evitar la resonancia en todas las condiciones de trabajo. En estas casos se debe introducir amortiguamiento en el sistema para evitar una excesiva amplificación dinámica.

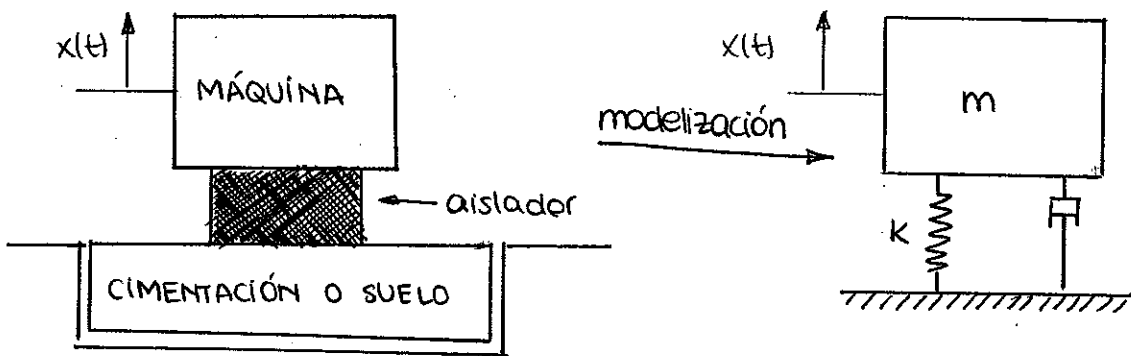
* ABSORBIDORES: en casos en que la frecuencia excitadora es muy cercana a la frecuencia natural del sistema existe una alternativa, consistente en utilizar un absorbente o neutralizador de vibraciones. Es un sistema formado por un muelle y por una

masa, que unido al sistema mecánico hace posible la reducción de vibraciones. Al añadir el absorber, el nuevo sistema posee dos grados de libertad y por tanto, dos frecuencias naturales. Se dice que el absorber se ha sintonizado a cierta frecuencia de excitación cuando se han ajustado sus parámetros para que el factor de amplificación dinámica sea mínimo.



⊙ Métodos pasivos para el aislamiento de vibraciones. Transmisibilidad.

El elemento AISLANTE puede tener dos funciones distintas: reducir las vibraciones transmitidas desde la máquina a la cimentación o reducir las vibraciones que transmite la cimentación a la máquina. La transmisibilidad hace referencia a la efectividad en ambas cosas.



⊙ Fuerza armónica $f(t) = f_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \rightarrow T_r = \frac{f_T}{f_0} = \frac{\text{módulo de la f. transmitida}}{\text{módulo de la f. excitadora.}}$

La respuesta de la máquina frente a dicha excitación es:

$$x(t) = \frac{f_0}{k} D \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

Así, la transmisibilidad adopta la forma $T_r = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

considerando ahora que a la máquina le llegue una vibración a través de la cimentación, suponiendo que dicha cimentación posee un movimiento armónico $x_s(t) = X_s \sin(\omega t)$ la transmisibilidad tomará la forma

$$Tr = \frac{X}{x_s} = \frac{\text{amplitud de la respuesta}}{\text{amplitud del movimiento}}$$

De esta forma $Tr = D \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}$

La mejor manera de reducir la vibración entre la máquina y la cimentación es disminuir la frecuencia natural del sistema para situarse en la zona de aislamiento de vibraciones. En esta zona, cuanto menor sea el amortiguamiento relativo ζ , menor será la transmisibilidad.

Si no fuera posible conseguir el valor de β necesario para situarse en la zona de aislamiento de vibraciones se deberá aumentar el amortiguamiento relativo para conseguir valores de transmisibilidad suficientemente bajos.

• Métodos activos para el aislamiento y control de vibraciones.

* Son aquellos que eliminan o reducen los efectos indeseables de las vibraciones recurriendo a un sistema de actuación externo. La ventaja es la capacidad de adaptación a diferentes condiciones de trabajo permitiendo la atenuación de vibraciones en un amplio rango de frecuencias y tipos de perturbaciones. El aislamiento activo modifica alguno de los parámetros mecánicos del sistema.

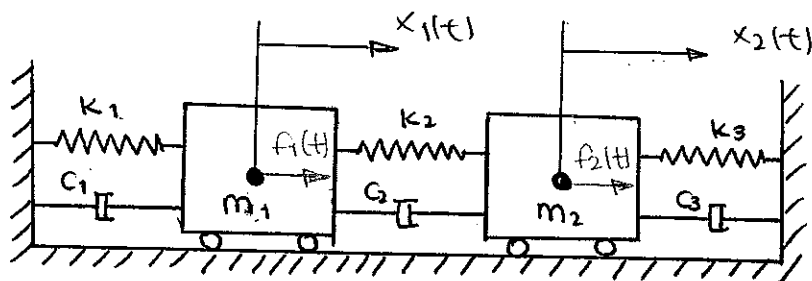
* CONTROL ACTIVO MEDIANTE FUERZAS: Las características mecánicas del sistema no se alteran. Se auxilia de una fuente de potencia externa que genera esfuerzos sobre la máquina tendientes a disminuir la amplitud de la vibración.

13. Sistemas con varios GDL. vibraciones libres

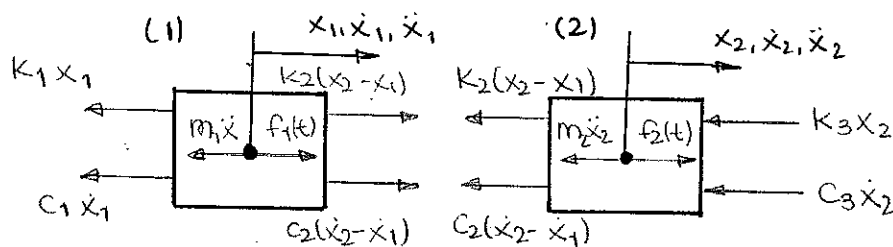
En el caso de los sistemas con varios grados de libertad no siempre se saca a este sistema de su posición de reposo se produce una vibración si no únicamente cuando las condiciones iniciales cumplen unas determinadas relaciones.

En el caso particular de sistemas con 2 gdl's, cuando vibran son posibles dos frecuencias naturales de vibración; lo cual implica que existen dos frecuencias de resonancia y dos valores máximos en la curva de amplificación dinámica. En la práctica muchos sistemas pueden ser modelizados con 2 gdl.

Ecuaciones de movimiento para un sistema de 2 GDL.



Planteamos el equilibrio de fuerzas suponiendo $x_2 > x_1$ y $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$



$$\begin{cases} -K_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - m_1 \ddot{x}_1 + K_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1(t) = 0 \\ -K_3 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - m_2 \ddot{x}_2 + f_2(t) - K_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Reordenando los términos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = f_2 \end{cases}$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}}$$

⊗ Propiedades de las matrices:

- 1) Son simétricas
- 2) La matriz de masa ha de ser definida positiva.
- 3) Matriz de masa concentrada \rightarrow matriz de masa diagonal. (\neq matriz de masa consistente)
- 4) Matriz de rigidez es definida positiva o semidefinida positiva.
- 5) Sistema estáticamente desacoplado \rightarrow matriz de rigidez diagonal. Si además la matriz de masa es concentrada \rightarrow sistema dinámicamente desacoplado.

VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Ecuación general con dos grados de libertad:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A) Frecuencias naturales y modos de vibración.

considerando que el sistema tenga un movimiento armónico sincrónico, es decir, que las dos masas vibren en fase con la misma frecuencia:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega t) \\ x_2 = X_2 \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 \\ k_{12} - m_{12}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{sistema homogéneo con solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.}$$

Desarrollando el determinante llegamos a una ecuación bicuadrada de la forma

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

Las dos raíces ω_1^2 y ω_2^2 son siempre positivas (o nulas), por lo tanto existen dos valores de la frecuencia ω con los que el sistema puede vibrar de manera sincrónica.

ω_1 y ω_2 . A estas frecuencias se las denomina frecuencias naturales del sistema.

Las frecuencias naturales del sistema son las raíces cuadradas de los valores propios y las correspondientes amplitudes de los grados de libertad (modos de vibración) son los vectores propios asociados.

Dichos modos de vibración se obtienen para cada frecuencia natural.

$$\omega_1 \rightarrow \frac{x_1^1}{x_2^1} = \frac{-k_{12} + \omega_1^2 m_{12}}{k_{11} - \omega_1^2 m_{11}} = -\frac{k_{22} - \omega_1^2 m_{22}}{k_{12} - \omega_1^2 m_{12}} \rightarrow (x_1^1, x_2^1)$$

$$\omega_2 \rightarrow \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{-k_{12} + \omega_2^2 m_{12}}{k_{11} - \omega_2^2 m_{11}} = -\frac{k_{22} - \omega_2^2 m_{22}}{k_{12} - \omega_2^2 m_{12}} \rightarrow (x_1^2, x_2^2)$$

cuando el sistema mecánico es real, el número de gdl es infinito y también lo es su número de frecuencias naturales y modos de vibración.

B) Propiedades de los modos de vibración.

* ortogonales entre sí respecto de las matrices de rigidez y masa.

$$\{x^1\}^T [M] \{x^2\} = 0 ; \{x^1\}^T [K] \{x^2\} = 0.$$

Los modos pueden NORMALIZARSE

C) solución general para las vibraciones libres no amortiguadas.

Para un sistema de ecuaciones lineales, la expresión de la solución general adopta la siguiente forma.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} e^{st} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} + m_{11}s^2 & k_{12} + m_{12}s^2 \\ k_{12} + m_{12}s^2 & k_{22} + m_{22}s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

La solución distinta de la trivial viene dada por la anulación del determinante:

$$a.s^4 + b.s^2 + c = 0$$

cuyas raíces son $s_1 = i\omega_1$; $s_2 = -i\omega_1$; $s_3 = i\omega_2$; $s_4 = -i\omega_2$

La solución general puede expresarse como:

$$\{x(t)\} = A \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + B \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \sin \omega_1 t + C \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t + D \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \sin \omega_2 t$$

o

$$\{x(t)\} = F_1 \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \theta_1) + F_2 \begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

para que libere cond. iniciales que anulen uno de ellos
 ↓
 condiciones iniciales correspondientes a los modos

COORDENADAS MODALES O NATURALES.

⊗ Matriz de modos:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

cumple las siguientes propiedades → $[X]^T [M] [X] = [m_j^M]$

$$[X]^T [K] [X] = [k_j^M]$$

Donde los términos k_j^M y m_j^M son respectivamente rigidez modal y masa modal correspondientes al modo j .

Realizando el cambio de coordenadas: $\{x\} = [X] \{y\}$

$$[M][X]\{\ddot{y}\} + [K][X]\{y\} = \{0\}$$

$$[m_j^M]\{\ddot{y}\} + [k_j^M]\{y\} = \{0\}$$

si la transformación se realiza con la matriz de modos normalizada:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0. \end{cases}$$

Por tanto, cada término $\sqrt{\frac{k_j^M}{m_j^M}}$ es precisamente la frecuencia natural ω_j asociada al correspondiente modo j .

De esta forma se reduce un problema de 2 gdl a dos de 1 gdl. A las coordenadas $\{y(t)\}$ se las denomina coordenadas modales o naturales.

se han de transformar así mismo las condiciones iniciales a coordenadas naturales.

$$\{y_0\} = [X]^{-1} \{x_0\}$$

$$\{\dot{y}_0\} = [X]^{-1} \{\dot{x}_0\}$$

En el caso de que los modos estén normalizados: $[X]^{-1} = [X]^T [M]$

En caso contrario: $[X]^{-1} = \left[\frac{1}{m_j} \right] [X]^T [M]$

VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS.

A) Obtención de la respuesta.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sustituyendo la solución general:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \cdot s^2 + c_{11} \cdot s + k_{11} & m_{12} \cdot s^2 + c_{12} \cdot s + k_{12} \\ m_{12} \cdot s^2 + c_{12} \cdot s + k_{12} & m_{22} \cdot s^2 + c_{22} \cdot s + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Igual que antes, tendrá una solución distinta de la trivial en caso de que la matriz tenga determinante nulo. Esto da lugar a una ecuación de 4º orden del tipo $As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$ donde A, B, C, D y E son constantes reales.

La respuesta será de la forma.

$$x(t) = F_1 \cdot e^{at} \begin{Bmatrix} A \cos(bt + \varphi_A - \theta_1) \\ B \cos(bt + \varphi_B - \theta_1) \end{Bmatrix} + F_2 \cdot e^{ct} \begin{Bmatrix} C \cos(dt + \varphi_C - \theta_2) \\ D \cos(dt + \varphi_D - \theta_2) \end{Bmatrix}$$

En caso de que las condiciones iniciales se correspondan con los desplazamientos de un modo, el sistema vibrará con su correspondiente frecuencia amortiguada. Pero los grados de libertad vibrarán desfasados.

B) Amortiguamiento proporcional.

En el caso de vibraciones libres amortiguadas el cambio a coordenadas modales no garantiza el desacoplamiento de las ecuaciones

si se intenta realizar este cambio se obtiene

$$[x]^T [M] [x] \{\ddot{y}\} + [x]^T [C] [x] \{\dot{y}\} + [x]^T [K] [x] \{y\} = \{0\}$$

teniendo en cuenta las propiedades de los modos:

$$[I] \{\ddot{y}\} + [x]^T [C] [x] \{\dot{y}\} + [\omega_j^2] \{y\} = \{0\}$$

esta transformación no tiene porqué diagonalizar la matriz C. Cuando no es posible su diagonalización se dice que el amortiguamiento es no proporcional.

Hay ciertos sistemas cuyo amortiguamiento sí permite desacoplar las ecuaciones del movimiento, dicho amortiguamiento es conocido como amortiguamiento proporcional.

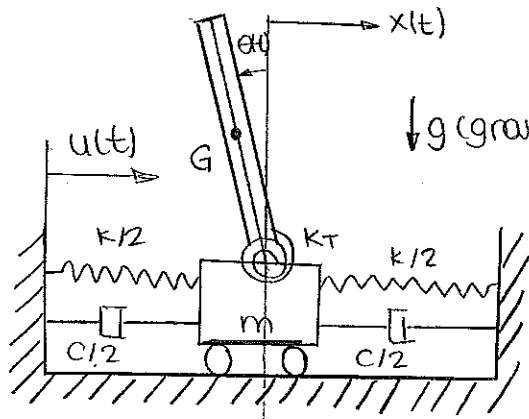
Las condiciones en las que actúa el amortiguamiento en los sistemas reales es poco conocida \rightarrow HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS.

● Adoptar para el amortiguamiento un modelo matemático que permita diagonalizar [C]. Un procedimiento usual es ajustar $[C] = \alpha [K] + \beta [M]$. El amortiguamiento obtenido de esta manera se denomina amortiguamiento de Rayleigh.

Obtendremos que:

$$[x]^T [C] [x] = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = [\alpha \omega_i^2 + \beta]$$

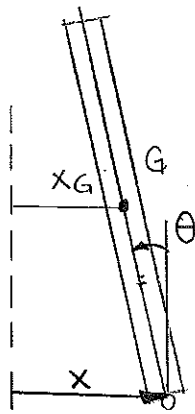
P.294. Problema resuelto.



$M = \text{masa del edificio} = 500Tm$
 $h = \text{altura del edificio} = 30m$
 $I_G = \text{momento de inercia} = 5 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot m^2$
 $m = 25Tm$
 $k = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
 $k_T = 1 \cdot 10^8 \text{ Nm/rad}$

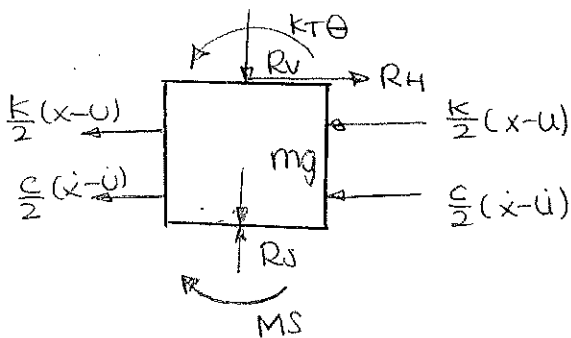
A) Ecuaciones de movimiento del edificio frente a un desplazamiento sísmico horizontal $u(t)$.

MODELO DE DEFORMACIÓN LINEAL



$$x_G = x - \frac{h}{2} \theta$$

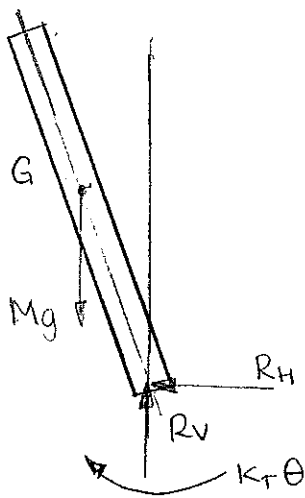
APLICANDO LA SEGUNDA LEY DE NEWTON



$$(1) K(x-u) + c(\dot{x}-\dot{u}) + m \cdot \ddot{x} = R_H$$

$$(2) R_S - R_V - mg = 0.$$

$$(3) -M_S + k_T \theta = 0.$$



$$(1) R_H + M \ddot{x}_G = 0 = R_H + M \left(\ddot{x} - \frac{h}{2} \ddot{\theta} \right)$$

$$(2) R_V - Mg = 0$$

$$(3) -k_T \theta - R_H \cdot \frac{h}{2} + R_V \cdot \frac{h}{2} \theta = I_G \cdot \ddot{\theta}$$

$$k(x-u) + c(\dot{x}-\dot{u}) + m\ddot{x} + M(\ddot{x} - \frac{h}{2}\ddot{\theta}) = 0$$

$$k_T\theta - M(\ddot{x} - \frac{h}{2}\ddot{\theta})\frac{h}{2} - Mg\frac{h}{2}\theta + I_G\ddot{\theta} = 0$$

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} + c\dot{x} + kx - M\frac{h}{2}\ddot{\theta} = c\dot{u} + ku \\ -M\frac{h}{2}\ddot{x} + (I_G + M\frac{h^2}{4})\ddot{\theta} + (k_T - Mg\frac{h}{2})\theta = 0 \end{cases}$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m+M & -M\frac{h}{2} \\ -M\frac{h}{2} & I_G + M\frac{h^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k_T - Mg\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ku + c\dot{u} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 525000 & -7500000 \\ -7500000 & 162500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 500000 & 0 \\ 0 & 26500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ku + c\dot{u} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las frecuencias y los modos naturales del sistema se resuelve el sistema de ecuaciones sin amortiguamiento

$$\begin{bmatrix} 525000 & -7500000 \\ -7500000 & 162500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 500000 & 0 \\ 0 & 26500000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 500000 - 525000\omega^2 & 7500000\omega^2 \\ 7500000\omega^2 & 26500000 - 162500000\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que tiene solución cuando

$$(500000 - 525000\omega^2)(26500000 - 162500000\omega^2) - (7500000\omega^2)^2 = 0$$

$$\omega_1 = 1.76881 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 0.381734 \text{ rad/s}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.04869 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.387497 \end{Bmatrix}$$

14. sistemas con varios GDL: vibraciones forzadas.

VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS. EXCITACIÓN ARMÓNICA.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t}$$

una solución particular tendría la forma

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t}$$

operando

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ f_2 & k_{22} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{vmatrix}}{|D|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\bar{\omega}^2 & f_1 \\ k_{12} - m_{12}\bar{\omega}^2 & f_2 \end{vmatrix}}{|D|}$$

para $\bar{\omega} = \omega_1$ o $\bar{\omega} = \omega_2$ el determinante $|D|$ se anula

VIBRACIONES AMORTIGUADAS. EXCITACIÓN ARMÓNICA.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + i c_{11}\bar{\omega} - m_{11}\bar{\omega}^2 & k_{12} - i c_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 \\ k_{12} + i c_{12}\bar{\omega} - m_{12}\bar{\omega}^2 & k_{22} - i c_{22}\bar{\omega} - m_{22}\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

La solución queda de la forma.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |x_1| e^{i\psi_1} \\ |x_2| e^{i\psi_2} \end{Bmatrix} e^{i\bar{\omega}t} = \begin{Bmatrix} |x_1| e^{i(\bar{\omega}t + \psi_1)} \\ |x_2| e^{i(\bar{\omega}t + \psi_2)} \end{Bmatrix}$$

Es imposible que estas magnitudes $|x_1|$ y $|x_2|$ se hagan infinitas para valores reales de $\bar{\omega}$, pero ambas presentan dos máximos en las inmediaciones de las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 .

Se observa que el desfase es diferente para cada GDL.
Procedimiento válido para sistemas de pocos gdl.

RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE TIPO GENERAL

* Sistema no amortiguado o con amortiguamiento proporcional.

Realizando un cambio de variable:

$$[x]^T [M] [x] \{ \ddot{y} \} + [x]^T [C] [x] \{ \dot{y} \} + [x]^T [K] [x] \{ y \} = [x]^T \{ f(t) \}$$

$$\begin{bmatrix} m_1^M & 0 \\ 0 & m_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^M & 0 \\ 0 & c_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^M & 0 \\ 0 & k_2^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^M \\ f_2^M \end{Bmatrix}$$

En el caso de que estén normalizados respecto de la matriz masa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^M(t) \\ f_2^M(t) \end{Bmatrix}$$

Que es un sistema desacoplado de dos ecuaciones que se resuelve independientemente. Se obtendrá la solución en coordenadas reales deshaciendo el cambio.

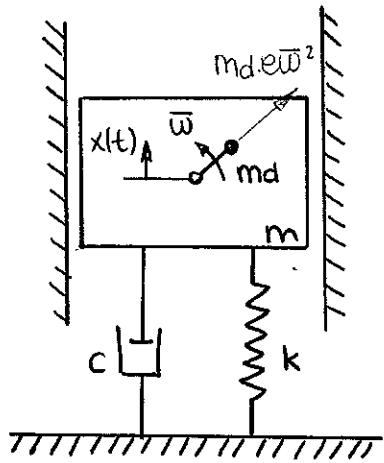
* Sistema con amortiguamiento no proporcional.

No queda otro remedio que realizar la integración numérica.

APLICACIÓN PRÁCTICA: ABSORSORES.

A) Desequilibrio en máquinas. Factor de amplificación por desequilibrio.

El desequilibrio de componentes mecánicos constituye la fuente más importante de problemas vibratorios en máquinas rotativas.



El sistema se ve sometido a una fuerza de valor: $f_0 = m_d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2$ que gira con una velocidad angular $\bar{\omega}$.

La componente vertical puede expresarse como:

$$f_v(t) = m_d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \sin(\bar{\omega}t)$$

que es la componente que excita el grado de libertad vertical.

La respuesta estacionaria del sistema será

$$x(t) = \frac{m_d e \bar{\omega}^2}{k} D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$$

$$D = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \text{ que se conoce como factor de amplificación por desequi-}$$

líbrio, siendo su máximo valor

$$D_{d, \max} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \text{ para el valor de } \beta_{d, \max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

Para valores de ξ muy pequeños ($\xi \leq 0.1$)

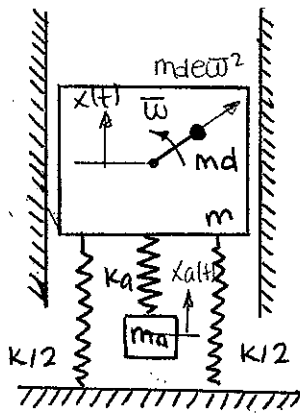
$$D_{d, \max} = \frac{1}{2\xi} \text{ para } \beta_{d, \max} \approx 1$$

Para el caso en que el sistema no tenga amortiguamiento:

$$x_d = e \frac{m_d}{m} \frac{\beta^2}{|1 - \beta^2|}$$

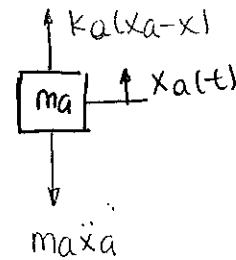
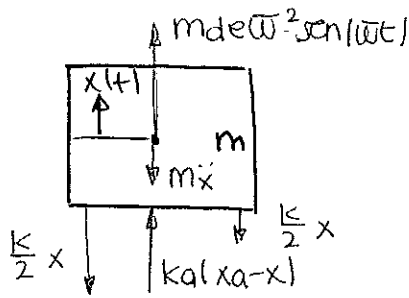
B) Adición de un absorber.

considerando el sistema no amortiguado:



sistema de dos grados de libertad suponiendo

$$x_a(t) > x(t)$$



⊙ EQUILIBRIO: $m\ddot{x} + kx + k_a \cdot x - k_a \cdot x_a = m d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega} t)$

$$m_a \ddot{x}_a + k_a \cdot x_a - k_a \cdot x = 0.$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a + k & -k_a \\ -k_a & -k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m d e \bar{\omega}^2 \text{sen}(\bar{\omega} t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La amplitud x del sistema se anularía para

$$m d \cdot e \cdot \bar{\omega}^2 (k_a - m_a \bar{\omega}^2) = 0$$

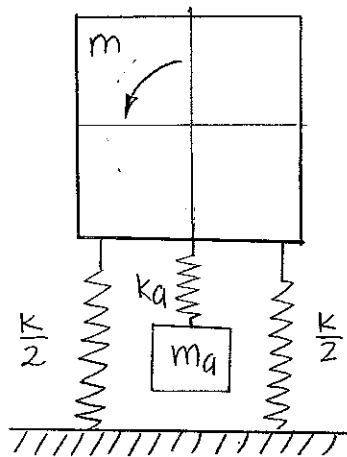
$$\text{Lo que conduce a } \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$$

⊙ cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia de resonancia del absorber ω_a , este está sintonizado a la frecuencia del sistema.

Bajo esta condición,

$$|x_a| = \frac{m d e}{m_a} \quad \text{y} \quad f_0 = -k_a \cdot x_a$$

P. 312. Problema resuelto 1.



⊙ Sabemos que la frecuencia natural del sistema es $\omega = 300 \text{ rpm} = 10\pi$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{k}{m} = (10\pi)^2 = 986,9604 \text{ s}^{-2}}$$

⊙ El absorber de prueba está SINTONIZADO a 300 rpm

$$\frac{k_a}{m_a} = \omega = 986,9604 \text{ s}^{-2}$$

$$k_a = \omega \cdot m_a = 1973,921 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

⊙ El conjunto lavadora + absorber tiene su primera frecuencia natural a 270 rpm.

$$(k + k_a^p - m\omega^2)(k_a^p - m_a^p\omega^2) - (k_a^p)^2 = 0.$$

$$(k - m\omega^2) = \frac{k_a^{p2}}{k_a^p - m_a^p\omega^2} - k_a^p \rightarrow (k - 799'44 \text{ N}) = 10389,19.$$

$$\boxed{m = 55,403 \text{ kg}} \\ \boxed{k = 54680,553 \text{ N/m}}$$

$$\omega_2^p = 329,8 \text{ rpm}$$

$$(54680,553 + k_a - 55,403 \cdot \omega^2)(k_a^p - m_a \omega^2) - (k_a^p)^2 = 0.$$

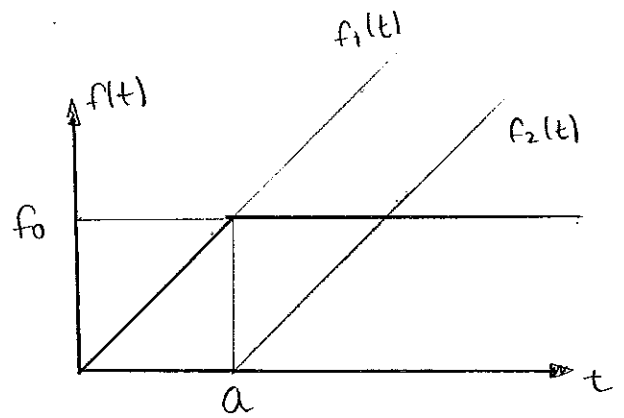
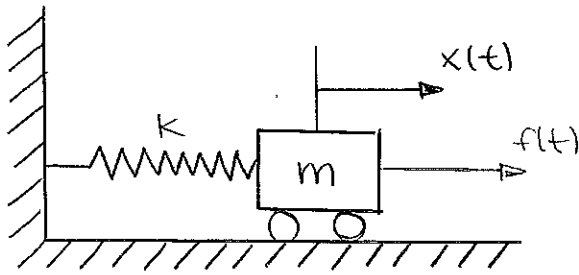
$$\frac{k_a}{m_a} = 986,965.$$

$$(54680,553 + 986,965 m_a - 55,403 \omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - (k_a)^2 = 0$$

$$\boxed{\text{si } m_a = 8 \text{ kg las frecuencias quedan fuera del rango y}} \\ \boxed{k_a = 7895,7208 \text{ N/m}}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

p231. Problema resuelto.

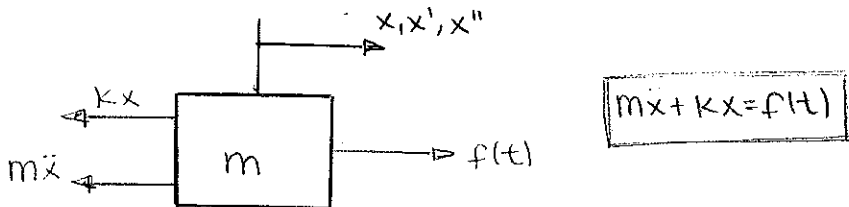


El sistema parte del reposo.

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

Por el principio de superposición $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

① Ecuación diferencial del movimiento



$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

② $f_1(t)$: rampa de pendiente $I = \frac{f_0}{a}$, $\xi = 0$, $w = w_0$, $\theta = 0$.

$$x_1(t) = \frac{f_0}{k \cdot a} \cdot t - \frac{f_0}{k a w} \operatorname{sen}(w t)$$

$f_2(t)$: rampa de pendiente $I = \frac{f_0}{a}$, $\xi = 0$, $w = w_0$, $\theta = 0$

$$x_2(t) = \frac{f_0}{k a} \cdot (t - a) - \frac{f_0}{k a w} \operatorname{sen}(w(t - a))$$

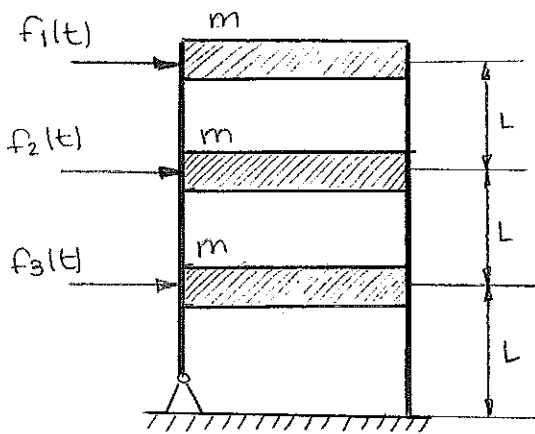
$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{f_0}{k} - \frac{f_0}{k a w} [\operatorname{sen}(w t) - \operatorname{sen}(w(t - a))]$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + \frac{f_0}{k a w} (\operatorname{sen}(w(t - a)) - \operatorname{sen}(w t))$$

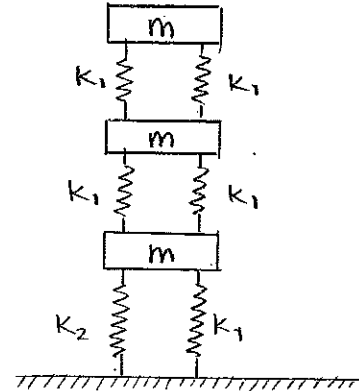
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Problemas propuestos.

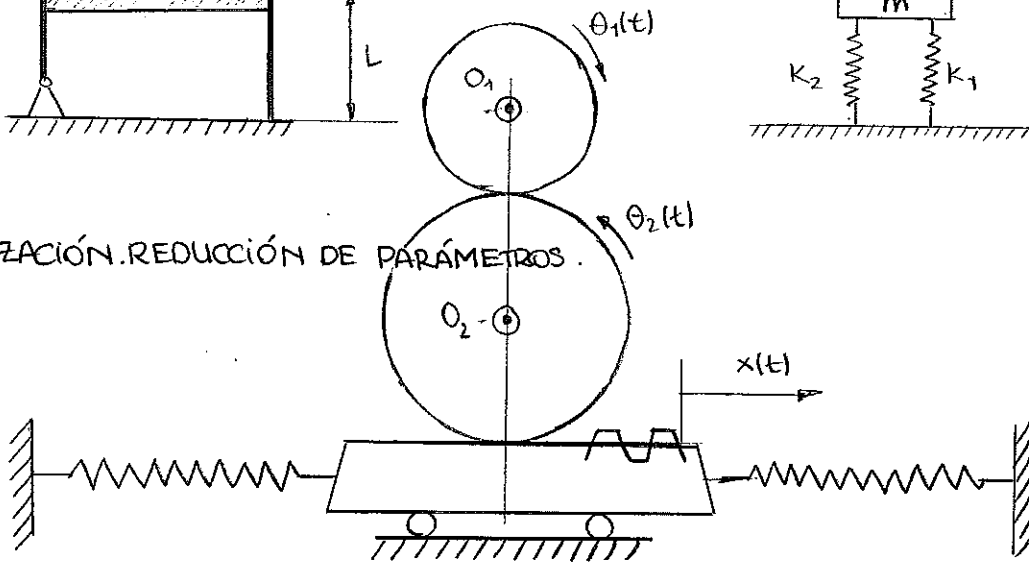
① MODELIZACIÓN. REDUCCIÓN DE PARÁMETROS.



Sistema de parámetros concentrados.



② MODELIZACIÓN. REDUCCIÓN DE PARÁMETROS.



Para obtener la inercia reducida buscamos la equivalencia de energías cinéticas.

$$\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} I^* (\dot{\theta}_1)^2$$

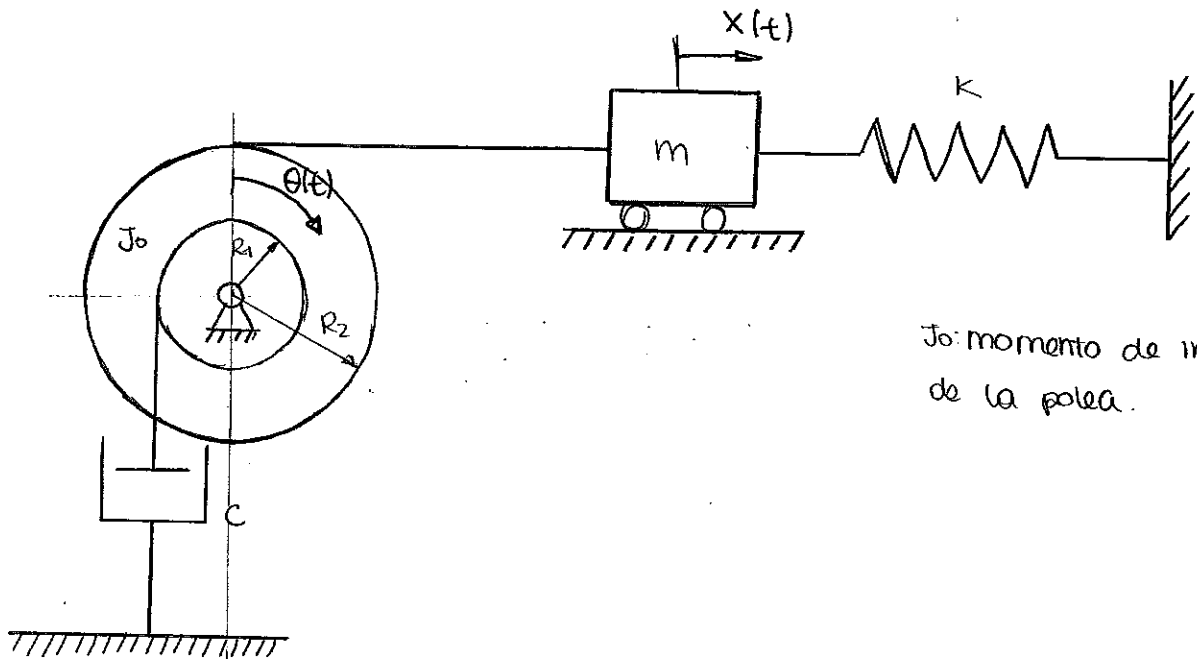
RELACIONES CINEMÁTICAS.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_2 \cdot R_2 = \dot{\theta}_1 \cdot R_1 \rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \frac{R_1}{R_2} \\ \dot{x}(t) = \dot{\theta}_2 \cdot R_2 = \dot{\theta}_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot R_2 = \dot{\theta}_1 \cdot R_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m R_1^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} I^* (\dot{\theta}_1)^2$$

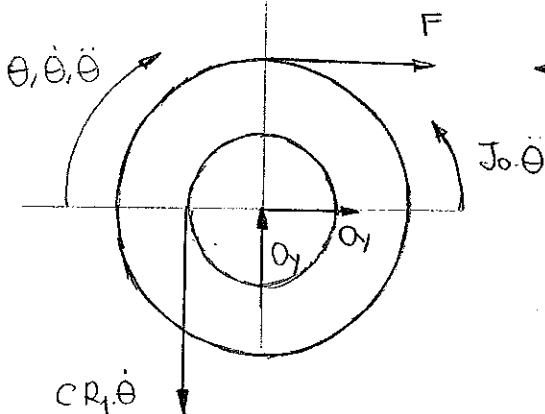
$$I^* = J_1 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + m R_1^2$$

③ SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.

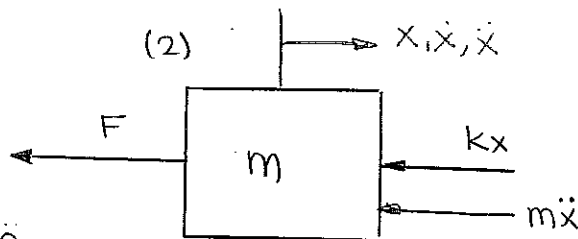


J_0 : momento de inercia de la polea.

(1)



(2)



$$(1) F \cdot R_2 - cR_1^2 \dot{\theta} - J_0 \cdot \ddot{\theta} = 0$$

$$(2) m\ddot{x} + kx + F = 0.$$

RELACIÓN CINEMÁTICA (1 GDL: 1 coordenada generalizada)

$$x = \theta R_2; \quad \dot{x} = \dot{\theta} R_2; \quad \ddot{x} = \ddot{\theta} R_2$$

⊗ Ec. diferencial en función de x:

$$F = \frac{1}{R_2} \cdot \left(cR_1^2 \cdot \frac{\dot{x}}{R_2} + \frac{J_0}{R_2} \cdot \ddot{x} \right)$$

$$\left(m + \frac{J_0}{R_2^2} \right) \ddot{x} + \left(c \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \dot{x} + kx = 0$$

⊗ Ecuación diferencial en función de θ

$$\left(mR_2 + \frac{J_0}{R_2} \right) \ddot{\theta} + \left(cR_2 + \frac{R_1^2}{R_2} \right) \dot{\theta} + kR_2 \theta = 0$$

De la ecuación diferencial

$$\left(m + \frac{J_0}{R_2^2} \right) \ddot{x} + \left(c + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \dot{x} + kx = 0$$

deducimos que es un sistema de vibraciones libres amortiguado cuyos parámetros del sistema son:

⊗ Masa del sistema: $m_{eq} = m + \frac{J_0}{R_2^2}$

⊗ Amortiguamiento del sistema: $c_{eq} = c + \frac{R_1^2}{R_2^2}$

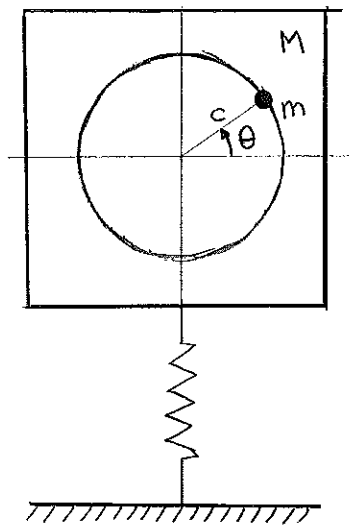
⊗ Rigidez del sistema: $k_{eq} = k$

La frecuencia natural del sistema viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J_0}{R_2^2}}} = \sqrt{\frac{R_2^2 k}{R_2^2 m + J_0}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_2^2 k}{R_2^2 m + J_0}}$$

④ SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA. DESEQUILIBRIO ARMÓNICO.



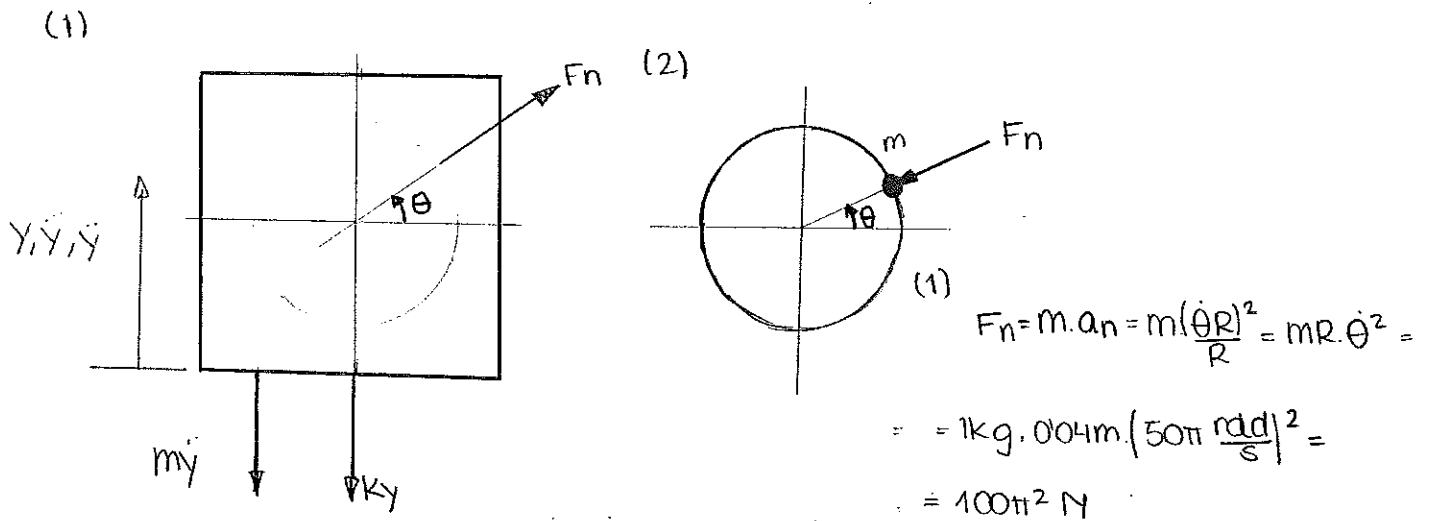
$M = 100 \text{ kg}$

$m = 1 \text{ kg}$

$c = 4 \text{ cm}$

$\delta_{ST} = 4 \text{ mm}$

$\dot{\theta} = 1500 \text{ rpm} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



⊙ Para hallar k : EQUILIBRIO (sin que gire el tambor)

$$Mg = k \cdot \delta_{ST} : k = \frac{100 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,004 \text{ m}} = 250.000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$(2) m\ddot{y} + ky - F_n \cdot \sin\theta = 0.$$

$$m\ddot{y} + ky - F_n \cdot \sin(\dot{\theta}t) = 0.$$

$$100\ddot{y} + 250.000 y = 100\pi^2 \cdot \sin(50\pi t) \quad \text{Ecuación diferencial del movimiento}$$

⊙ Vibración forzada no amortiguada con parámetros del sistema:

$$m_{eq} = 100$$

$$k = 250.000$$

$$f_0 = 100\pi^2$$

$$\bar{\omega} = 50\pi$$

→ solución general $y(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(50\pi t)$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{50\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \pi$$

$$y(t) = 4,451 \cdot 10^{-4} \sin(50\pi t)$$

$$\xi = 0 \text{ (no hay amortiguamiento)}$$

$$y_{\text{máx}} = 4,451 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,4451 \text{ mm}$$

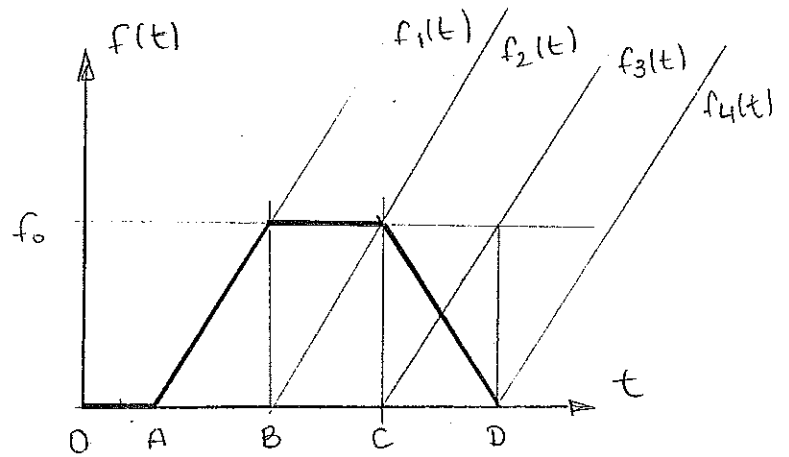
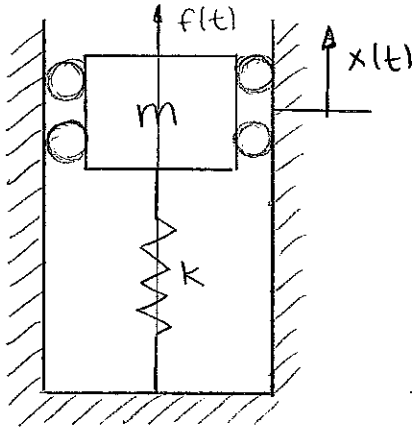
⊙ La fuerza que le transmite al suelo es la del muelle:

$$F_s = k \cdot y = 111,274 \sin(50\pi t)$$

Le tenemos que sumar la componente estática:

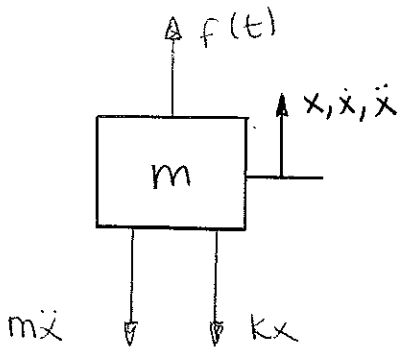
$$F_{s, \text{total}} = Mg \pm ky = 1000 \pm 111,274 \sin(50\pi t)$$

⑥ SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA. SUPERPOSICIÓN



① condiciones iniciales: $\begin{cases} x(0)=0. \\ \dot{x}(0)=v. \end{cases}$

② Obtenemos la ecuación de movimiento



→ Ecuación diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

③ Obtención de la respuesta: SUPERPOSICIÓN: $f(t) = f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) + f_4(t)$
 $x(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)$

④ Respuesta a función rampa: con cond. iniciales nulas:

pendiente $x(t) = \frac{I}{k} t - \frac{I}{k\omega_D} \left[e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t - 2\theta) + \sin(2\theta) \right]$

donde $\theta = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

No hay amortiguamiento: $\xi=0 \rightarrow \theta=0$

$\rightarrow \omega_D = \omega$

$\rightarrow \sin(2\theta) = 0$

1. Ecuación diferencial de mov. con d'Alembert.

2. según la ec: forzada libre

3. sabemos las respuestas según el tipo de fuerza (sino combinación)

4. Resp. total: homog + trans.

$$I_1 = \frac{f_0}{B-A}$$

$$I_2 = \frac{f_0}{B-A}$$

$$I_3 = \frac{f_0}{D-B}$$

$$I_4 = \frac{f_0}{D-C}$$

$$f_1(t) \quad A < t < B$$

$$x_1(t) = \frac{f_0}{B-A} \frac{t-A}{k} \frac{f_0}{(B-A)k\omega} \cdot \text{sen}[\omega(t-A)] =$$
$$= \frac{f_0}{(B-A)k} \left[(t-A) - \frac{\text{sen}[\omega(t-A)]}{\omega} \right]$$

$$f_2(t) \quad B < t < C$$

$$x_2(t) = \frac{f_0}{(C-B)k} \left[(t-B) - \frac{\text{sen}[\omega(t-B)]}{\omega} \right]$$

$$f_3(t) \quad C < t < D$$

$$x_3(t) = \frac{f_0}{(D-C)k} \left[(t-C) - \frac{\text{sen}[\omega(t-C)]}{\omega} \right]$$

$$f_4(t) \quad D < t$$

$$x_4(t) = \frac{f_0}{(D-C)k} \left[(t-D) - \frac{\text{sen}[\omega(t-D)]}{\omega} \right]$$

$$x_p(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_p(d) = x_1(d) - x_2(d) - x_3(d) - x_4(d)$$

Para hallar la respuesta transitoria resolvimos la ecuación homogénea

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\textcircled{\ast} x = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$x(0) = A = 0$$

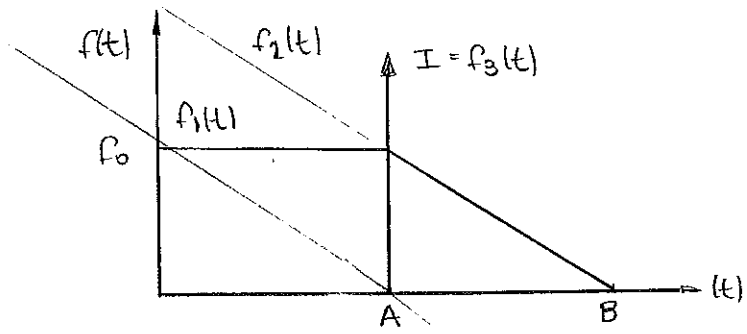
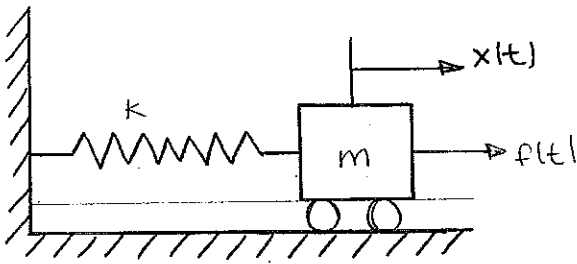
$$\dot{x}(0) = B\omega = v \quad \therefore B = \frac{v}{\omega}$$

$$x_h(t) = \frac{v}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(d)$$

$$x(d) = x_h(d) + x_p(d)$$

7) SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE RESPUESTAS SUPERPOSICIÓN.



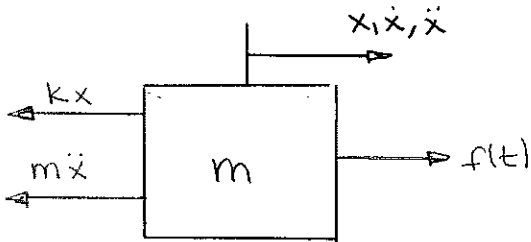
● COND. INICIALES

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

● solución a rampa: $x(t) = \frac{I}{k} \cdot t - \frac{I}{k\omega_p} (e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_0 t - 2\theta) + \sin 2\theta)$

● solución a impulso: $x(t) = \frac{I e^{-\xi\omega t}}{m\omega_p} \sin(\omega_p t)$

● Obtenemos la ecuación del movimiento



$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

SUPERPOSICIÓN: $f(t) = -f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$

$$f_1(t) \quad 0 < t < A$$

$$I_1 = \frac{f_0}{B-A} \rightarrow x(t) = \frac{f_0}{(B-A)k} (t-A) - \frac{f_0}{(B-A)k\omega} \cdot (\sin \omega(t-A)) = \frac{f_0}{(B-A)k} \left[(t-A) - \frac{\sin \omega(t-A)}{\omega} \right]$$

$$\left. \begin{cases} \xi = 0 \text{ (no hay amortiguamiento)} \\ \theta = 0 \rightarrow \sin(2\theta) = 0 \\ \omega_0 = \omega \end{cases} \right\}$$

$$f_2(t) \quad A < t$$

$$I_2 = \frac{f_0}{B-A} \rightarrow x(t) = \frac{f_0}{(B-A)k} (t-B) - \frac{f_0}{(B-A)k\omega} \sin(\omega(t-B))$$

$$f_3(t) \quad t=A$$

$$x_f(t) = \frac{I}{m\omega} \cdot \text{sen}(\omega t - A)$$

⊗ superposición

$$x_p(t) = -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_p(b) = -x_1(b) + x_2(b) + x_3(b) \rightarrow \text{solución estacionaria}$$

⊗ solución de la homogénea (PARTE TRANSITORIA)

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

$$x_h(t) = A \text{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$x(0) = B = 0$$

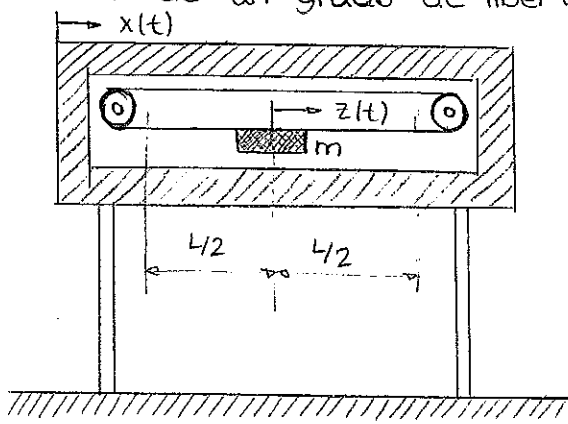
$$\dot{x}(0) = 0 = A\omega = 0 \rightarrow A = 0$$

$$x_h(t) = 0.$$

$$x(t) = x_p(t)$$

$$x(b) = x_p(b)$$

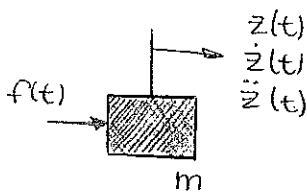
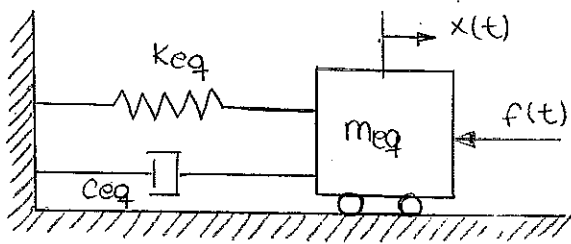
10) sistemas de un grado de libertad. Desequilibrio armónico + absorber.



$$z(t) = \frac{L}{2} \cdot \cos(\bar{\omega}t)$$

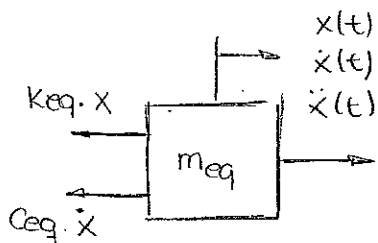
$$\begin{cases} L = 1\text{m} \\ m = 0,2\text{kg} \end{cases}$$

A)



$$f(t) = m \cdot \ddot{z} + \ddot{x} \approx m \cdot \ddot{z} \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{z} = -\frac{L}{2} \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) \\ \ddot{z} = -\frac{L}{2} \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(t) = -m \cdot \frac{L}{2} \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) \\ f(t) = -0,1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) \end{array}$$

B)



$$Keq \cdot x + Ceq \cdot \dot{x} - 0,1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) = -meq \cdot \ddot{x}$$

$$meq \ddot{x} + Ceq \dot{x} + Keq x = 0,1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_{est} = 25\text{N} \\ x_{est} = 2\text{cm} \end{array} \right\} Keq = \frac{F_{est}}{x_{est}} = \frac{25\text{N}}{2\text{cm}} = 1250 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

MÉTODO DEL DECREMENTO LOGARÍTMICO:

$$\delta = L \left(\frac{x_i}{x_{i+n}} \right) ; \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n)^2 + \delta^2}}$$

$$\delta = L \left(\frac{1,6}{1,3} \right) = 0,2076 ; \xi_{eq} = 0,033$$

$$T_d = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \omega = 4,002 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

$$m_{eq} = \frac{k_{eq}}{\omega^2} = 78,125 \text{ kg}$$

C) Teoría

D) Frecuencia del movimiento = frecuencia del movimiento ($\bar{\omega} = \omega$)

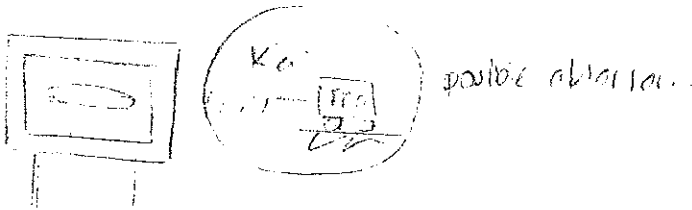
$$f(t) = 0,1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) = 0,1 \cdot 4^2 \cdot \cos(4t) = 1,6 \cos(4t)$$

$$\varphi = \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

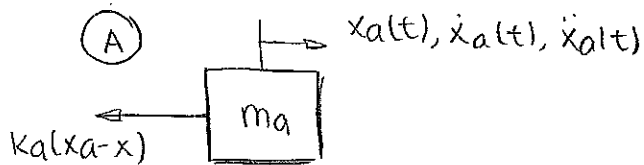
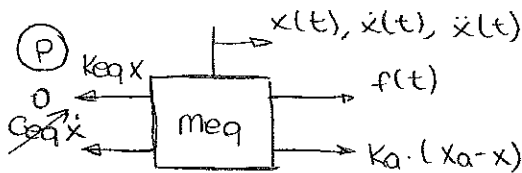
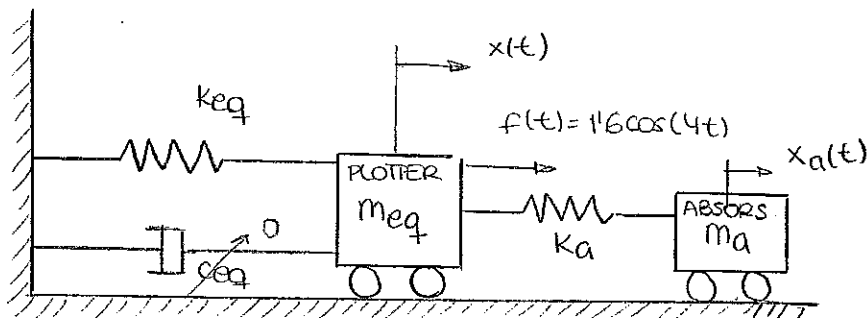
$$x_p(t) = \frac{1,6/1250}{\sqrt{(1-1)^2 + (2 \cdot 0,033 \cdot 1)^2}} \cos(4t - \varphi) = \frac{1,6/1250}{0,066} \cos(4t - \frac{\pi}{2}) = 0,01939 \cdot \text{sen}(4t)$$

$$x_p(t) = 0,01939 \text{ sen}(4t)$$

E) Teoría



F)



$$(1) 1,6 \cos(4t) + k_a(x_a - x) - k_{eq}x = m_{eq}\ddot{x} \Rightarrow 78,125\ddot{x} + (1250 + k_a)x - k_ax_a = 1,6 \cos(4t)$$

$$(2) -k_a(x_a - x) = m_a\ddot{x}_a \Rightarrow m_a\ddot{x}_a - k_a \cdot x + k_ax_a = 0$$

$$\begin{bmatrix} 78,125 & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1250 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,6 \cos(4t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= X \cdot \cos(4t) \\ \dot{x}(t) &= -4X \cdot \sin(4t) \\ \ddot{x}(t) &= -16X \cos(4t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_a(t) &= X_a \cdot \cos(4t) \\ \dot{x}_a(t) &= -4X_a \cdot \sin(4t) \\ \ddot{x}_a(t) &= -16X_a \cos(4t) \end{aligned}$$

$$-16 \begin{bmatrix} 78125 & 0 \\ 0 & ma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1250 + ka & -ka \\ -ka & ka \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

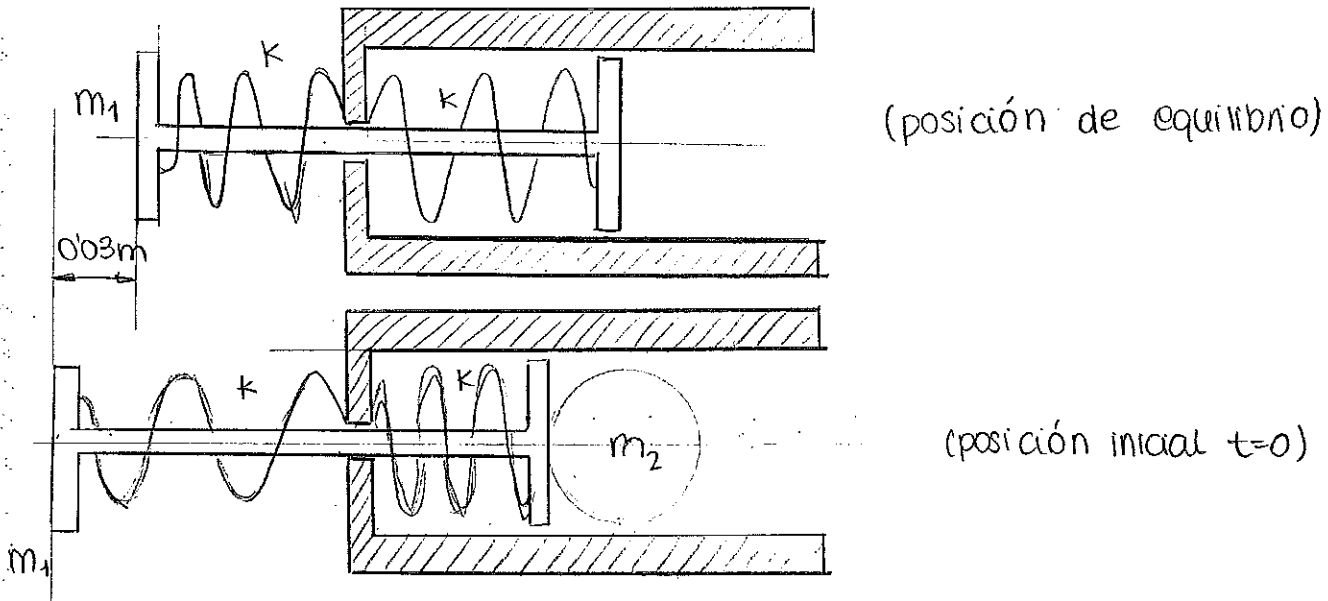
$$\begin{bmatrix} ka & -ka \\ ka & ka - 16ma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⊗ Para que no ubre: $x=0$: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1'6 & -ka \\ 0 & ka - 16ma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ka & -ka \\ ka & ka - 16ma \end{vmatrix}} = \frac{1'6(ka - 16ma)}{\begin{vmatrix} | & | \\ | & | \end{vmatrix}} = 0$

$$\boxed{ka - 16ma = 0}$$

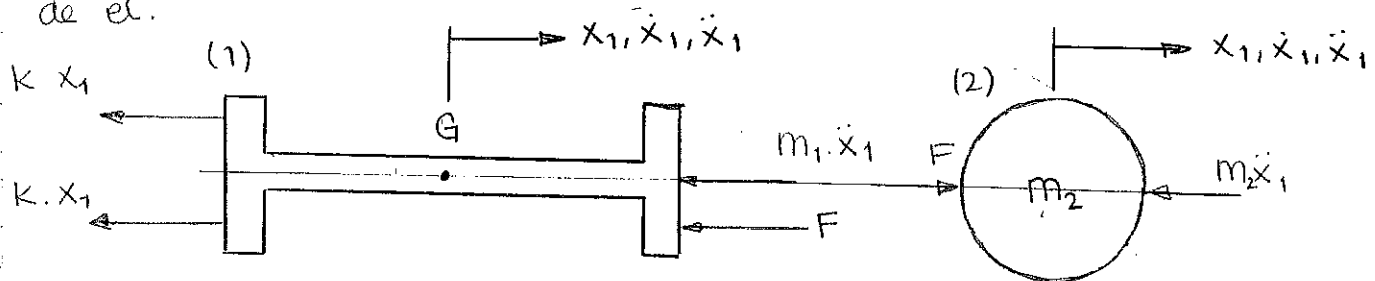
G) Teoría.

12) SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD. CÁLCULO DE LA RESPUESTA.



$$\begin{cases} m_1 = 0.06 \text{ kg} \\ m_2 = 0.04 \text{ kg} \\ k = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{cases}$$

1) Ecuación del movimiento del vástago impulsor antes de que la bola se separe de él.



$$\begin{cases} (1) m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 + F = 0 \\ (2) m_2 \ddot{x}_1 - F = 0 \end{cases} \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0$$

$$\boxed{0.1 \ddot{x}_1 + 1000 x_1 = 0}$$

2) Instante t_1 en el que la bola se separa del vástago impulsor.

cuando la bola se separa $\Rightarrow \boxed{F = 0 = m_2 \ddot{x}_1}$

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \left\{ \omega = \sqrt{\frac{1000}{0.1}} = 100 \right\}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = -0.03 \text{ m} \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = A = +0.03 \\ \dot{x}_1(0) = B\omega = 0 \rightarrow B = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_1(t) = +0.03 \cos(100t)}$$

$$\dot{x}_1(t) = +3 \sin(100t)$$

$$\ddot{x}_1(t) = 300 \cos(100t)$$

$$F=0 \rightarrow \ddot{x}_1(t) = 0: 300 \cos(100t) = 0.$$

$$100t = \frac{\pi}{2}$$
$$t = \frac{\pi}{200} \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{200} \text{ s}$$

3) Velocidad con la que sale despedida la bola.

$$v = \dot{x}_1(t_1) = 3 \sin\left(100 \cdot \frac{\pi}{200}\right) = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} < 3.15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ NO consigue bola extra}$$

4) Ecuación del movimiento del vástago impulsor después de que la bola se haya separado de él.

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0.$$

$$0.06 \ddot{x}_1 + 1000 x_1 = 0.$$

$$\text{COND. INICIALES: } x_1(t_1) = 0.$$

$$\dot{x}_1(t_1) = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

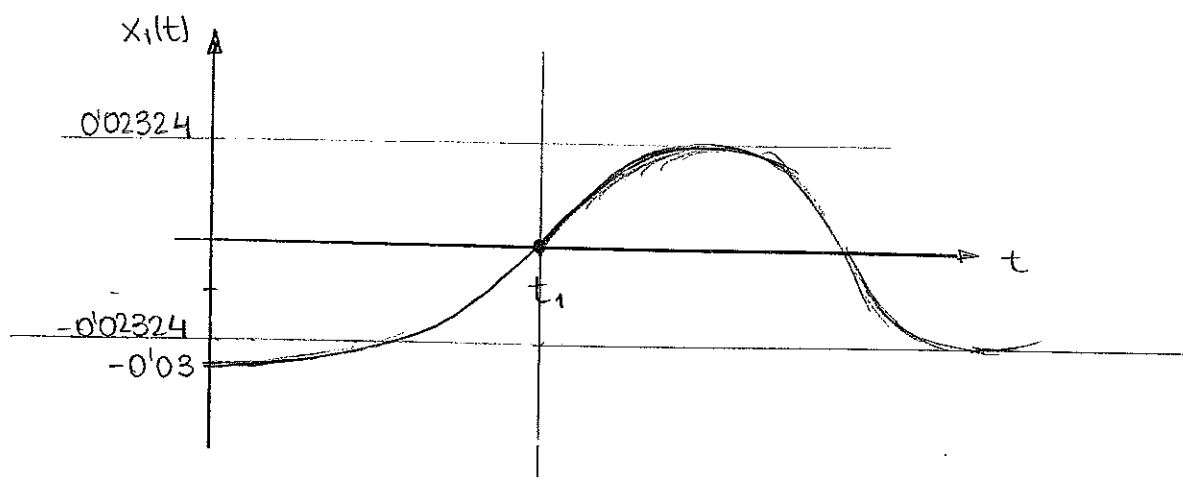
$$x_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \omega = \sqrt{\frac{1000}{0.06}} = 129.099 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x_1(t_1) = B = 0.$$

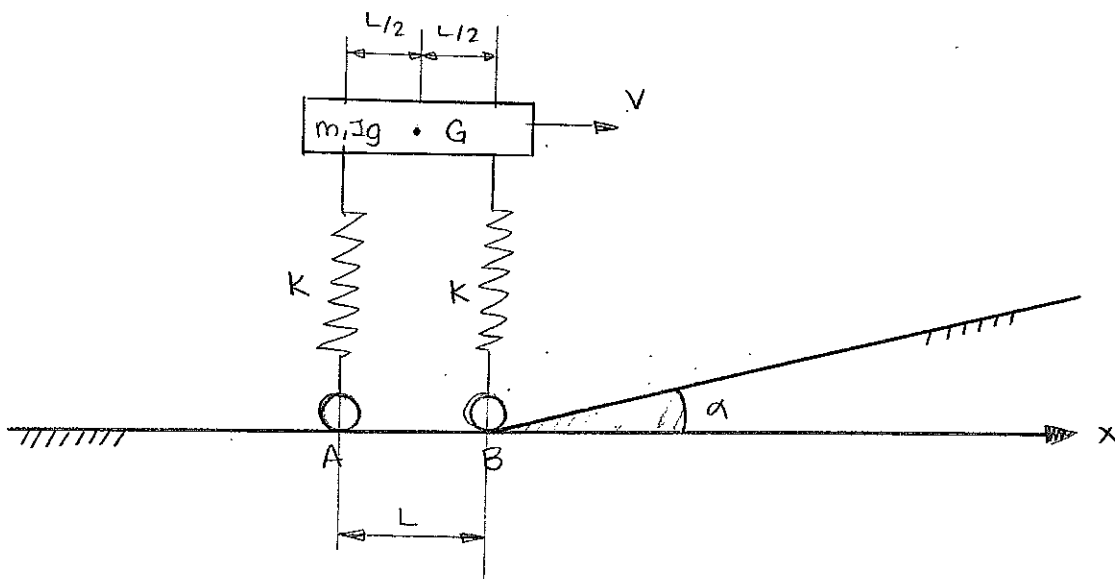
$$\dot{x}_1(t_1) = 3 = -A \cdot 129.099 \rightarrow A = 0.02324.$$

$$x_1(t) = 0.02324 \cos(129.099t)$$

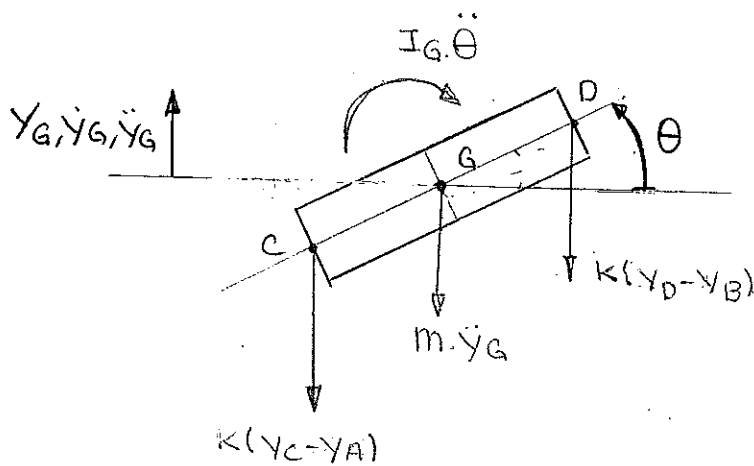
5) Dibujar aproximadamente la ley del movimiento del vástago impulsor.



13) SISTEMAS DE VARIOS GDL. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



1) sistema de ecuaciones que define el movimiento del vehículo.



$$Y_A = (-L + vt)\alpha \quad (\text{cuando } Y_A \neq 0)$$

$$Y_B = vt\alpha$$

$$Y_C = Y_G - \frac{L}{2}\theta$$

$$Y_D = Y_G + \frac{L}{2}\theta$$

$$(1) m\ddot{Y}_G + K(Y_C - Y_A) + K(Y_D - Y_B) = 0$$

$$m\ddot{Y}_G + K\left(Y_G - \frac{L}{2}\theta - Y_A\right) + K\left(Y_G + \frac{L}{2}\theta - Y_B\right) = 0$$

$$m\ddot{Y}_G + 2KY_G = R(Y_B + Y_A)$$

$$(2) I_G\ddot{\theta} + K(Y_D - Y_B) \cdot \frac{L}{2} - K(Y_C - Y_A) \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$I_G\ddot{\theta} + \frac{KL}{2}\left(Y_G + \frac{L}{2}\theta - Y_B\right) - \frac{KL}{2}\left(Y_G - \frac{L}{2}\theta - Y_A\right) = 0$$

$$I_G\ddot{\theta} + \frac{KL^2}{2}\theta = -\frac{KL}{2}(Y_A + Y_B)$$

$$\begin{cases} m\ddot{y}_G + 2ky_G = 2kv_t\alpha - kL\alpha \\ I_G\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = \frac{kL^2}{2}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_G \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2kv_t\alpha - kL\alpha \\ \frac{kL^2}{2}\alpha \end{bmatrix}$$

2) Las frecuencias naturales del sistema

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_G \end{vmatrix} = (2k - \omega^2 m)(k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_G) = 0$$

$$2k - \omega^2 m = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$k\frac{L^2}{2} - \omega^2 I_G = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{kL^2}{2I_G}}$$

3) La respuesta total del sistema cuando A sigue sobre el plano horizontal y la B está sobre el plano vertical.

$$y_A = 0$$

$$y_B = v_t \alpha$$

$$\begin{cases} (1) m\ddot{y}_G + 2ky_G = ky_B = kv_t\alpha \\ (2) I_G\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = -\frac{kL}{2}v_t\alpha \end{cases}$$

(1) $m\ddot{y}_G + 2ky_G = v_t \alpha \cdot t$ ← rampa de pendiente $v_t \alpha$.

$$y(t) = \frac{v_t \alpha \cdot t}{2} - \frac{v_t \alpha}{2\omega_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 t)$$

$$I_G \ddot{\theta} + \frac{kL^2}{2} \theta = \left(+ \frac{kL}{2} vt \cdot \alpha \right) \leftarrow \text{rampa de pendiente } + \frac{kL}{2} v\alpha$$

$$\theta(t) = \frac{+\frac{kL}{2} v\alpha}{\frac{kL^2}{2}} \cdot t - \frac{+\frac{kL}{2} v\alpha}{\frac{kL^2}{2} \omega_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 t) = + \frac{v\alpha}{L} t - \frac{v\alpha}{L\omega_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 t)$$

$$\theta(t) = \frac{v\alpha}{L} t - \frac{v\alpha}{L\omega_2} \text{sen}(\omega_2 t)$$

4) La respuesta total del sistema cuando las dos ruedas están sobre el plano inclinado.

$$m\ddot{y}_G + 2k y_G = \left(2kvt \cdot \alpha - kL \right) \begin{array}{l} \text{rampa de pendiente} \\ 2kv\alpha \text{ desplazada } t = \frac{L}{2v\alpha} \end{array}$$

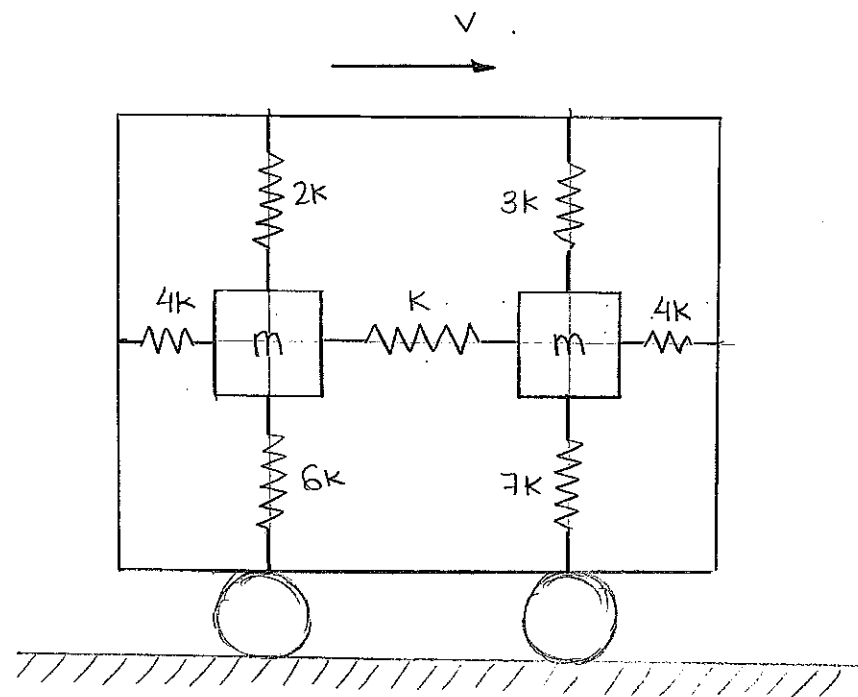
$$y(t) = v\alpha t - \frac{v\alpha}{\omega_1} \text{sen}\left(\omega_1 \left(t - \frac{L}{2v\alpha}\right)\right)$$

$$I_G \ddot{\theta} + k \frac{L^2}{2} \theta = \left(\frac{kL^2}{2} \right) \text{escalón desplazado } t = \frac{L}{2v\alpha}$$

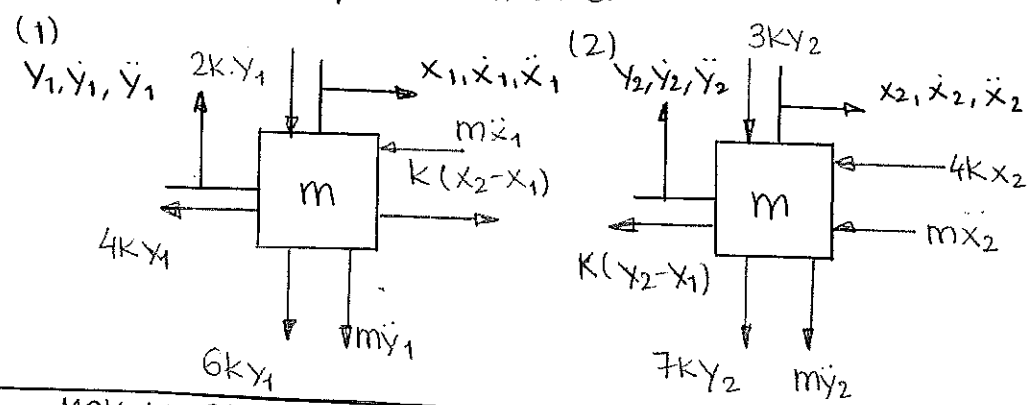
(...)



14) SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



1) Las ecuaciones que definen el movimiento de las masas $x_2 > x_1$



MOV. HORIZONTAL	MOV. VERTICAL
(1) $m\ddot{x}_1 + 4Kx_1 + K(x_1 - x_2) = 0$	(3) $m\ddot{y}_1 + 6Ky_1 + 2Ky_1 = 0$
(2) $m\ddot{x}_2 + 4Kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0$	(4) $m\ddot{y}_2 + 7Ky_2 + 3Ky_2 = 0$

2) Las frecuencias naturales del sistema;

MOV. HORIZONTAL:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & -K \\ -K & 5K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

⊙ Frecuencias naturales:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5k - \omega^2 m & -k \\ -k & 5k - \omega^2 m \end{vmatrix} = (5k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0.$$

$$5k - \omega^2 m = +k$$

$$\omega^2 m = 4k$$

$$\boxed{\omega_1^2 = 4 \frac{k}{m}}$$

$$5k - \omega^2 m = -k$$

$$\omega^2 m = 6k$$

$$\boxed{\omega_2^2 = 6 \frac{k}{m}}$$

MOV VERTICAL

$$(3) m\ddot{y}_1 + 8ky_1 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_3^2 = 8 \frac{k}{m}}$$

$$(4) m\ddot{y}_2 + 10ky_2 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_4^2 = 10 \frac{k}{m}}$$

3) Los modos naturales del sistema.

$$\boxed{\omega_1} : \begin{bmatrix} 5k - 4k & -k \\ -k & 5k - 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+k \cdot x_1 - kx_2 = 0 : x_1 = x_2$$

$$\text{modo 1: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\omega_2} : \begin{bmatrix} 5k - 6k & -k \\ -k & 5k - 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-kx_1 - kx_2 = 0 : x_1 = -x_2$$

$$\text{modo 2: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 \quad \text{modo 3: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_4 \quad \text{modo 4: } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

4) Las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales.

Para transformarlo a coordenadas modales:

$$[x]^T [M] [x] [\ddot{z}] + [x]^T [K] [x] [z] = [0]$$

$$[x]^T [M] [x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m & +m & 0 & 0 \\ m & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[x]^T [K] [x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4k & 4k & 0 & 0 \\ +6k & -6k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10k \end{bmatrix}$$

• Ecuaciones del movimiento en coordenadas modales:

$$\begin{cases} 2m \ddot{z}_1 + 8k z_1 = 0 \\ 2m \ddot{z}_2 + 12k z_2 = 0 \\ m \ddot{z}_3 + 8k z_3 = 0 \\ m \ddot{z}_4 + 10k z_4 = 0 \end{cases}$$

5) La respuesta si el contáiner c.oca contra un muro y pasa instantáneamente a velocidad nula.

$$x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = v$$

$$x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(0) = v$$

$$\begin{Bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{Bmatrix} = [X]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1(0) \\ \dot{z}_2(0) \end{Bmatrix} = [X]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [X]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & \frac{1}{2m} \\ \frac{1}{2m} & -\frac{1}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1(0) \\ \dot{z}_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 2v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(1) \quad 2m\ddot{z}_1 + 8kz_1 = 0.$$

$$z_1(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$$

$$z_1(0) = 0$$

$$z_1(0) = A = 0$$

$$\dot{z}_1(0) = v$$

$$\dot{z}_1(0) = B\omega_1 = v \rightarrow B = \frac{v}{\omega_1}$$

$$z_1(t) = \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)$$

$$(2) \quad 2m\ddot{z}_2 + 12kz_2 = 0.$$

$$z_2(t) = A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t) = 0.$$

$$z_2(0) = 0.$$

$$\dot{z}_2(0) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \\ \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \end{Bmatrix}$$

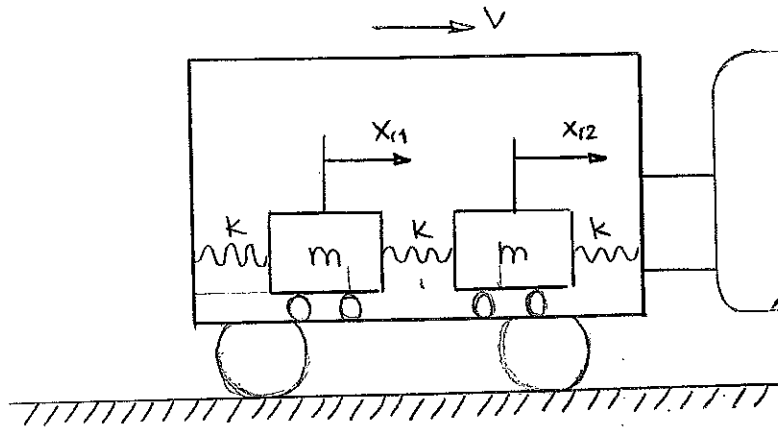
$$x_1(t) = \frac{v}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = \frac{v}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$$y_1(t) = 0$$

$$y_2(t) = 0.$$

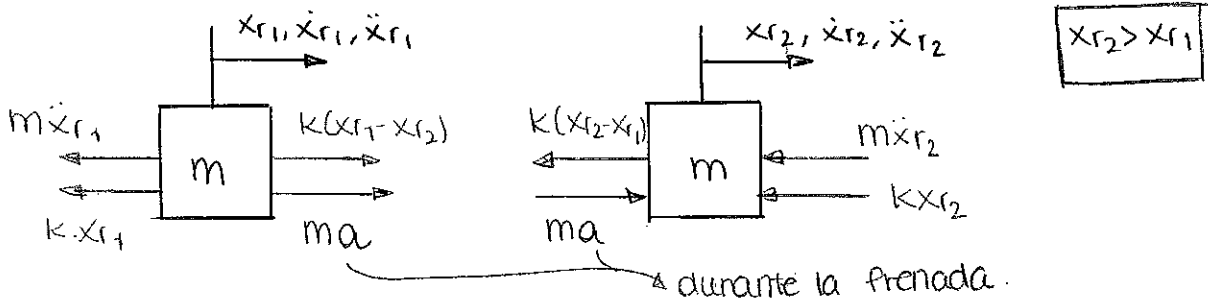
15) SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD. CÁLCULO DE MODOS, FRECUENCIAS Y RESPUESTA.



Frecuencias naturales
 ↓
 modos (matriz de modos)
 ↓
 cambio vble
 ↓
SISTEMA DESACOPLADO

● Frenado: $\Delta t = \tau$
 a

1) ¿A qué fuerzas están sometidas las masas durante el proceso de frenado?



2) Calcular la respuesta durante la frenada.

$$\begin{cases} m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = ma \\ m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = ma \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma \\ ma \end{Bmatrix}$$

● Frecuencias naturales

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \begin{cases} 2k - \omega^2 m = k \rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m} \\ 2k - \omega^2 m = -k \rightarrow \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \end{cases}$$

⊗ MODOS:

$$\omega_1 \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$kx_1 - kx_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 : \text{modo 1: } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-kx_1 - kx_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 : \text{modo 2: } \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

⊗ Matriz de modos:

⊗ Cambio de vble: $[x]^T [M] [x] [\ddot{y}] + [x]^T [K] [x] [y] = [x]^T \{f\}$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ma \\ ma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ma \\ 0 \end{bmatrix}$$

⊗ Obtenemos dos ecuaciones desacopladas

$$(1) 2m \ddot{y}_2 + 2ky_2 = 2ma$$

$$(2) 2m \ddot{y}_1 + 6ky_1 = 0$$

$$(1) y_2(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + \frac{ma}{k}$$

cond iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y_2(0) = 0 \\ y_2(0) = 2v \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = A + \frac{ma}{k} : A = -\frac{ma}{k} \\ 2v = B \omega_1 : B = \frac{v}{\omega_1} \end{array}$$

$$y_2(t) = \frac{ma}{k} (1 - \cos \omega_1 t) + \frac{v}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

$$y_1(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_2(0) \\ \ddot{y}_1(0) \end{bmatrix} = [X]^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$[X]^{-1} = \frac{1}{m_j^j} [X] [M] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_2(0) \\ \ddot{y}_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix}$$

● cambio de vble

$$\begin{Bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

$$x_1(t) = y_2(t)$$

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{mg}{k} (1 - \cos \omega_1 t) + \frac{2v}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t$$

3) Calcular la respuesta después de la frenada.

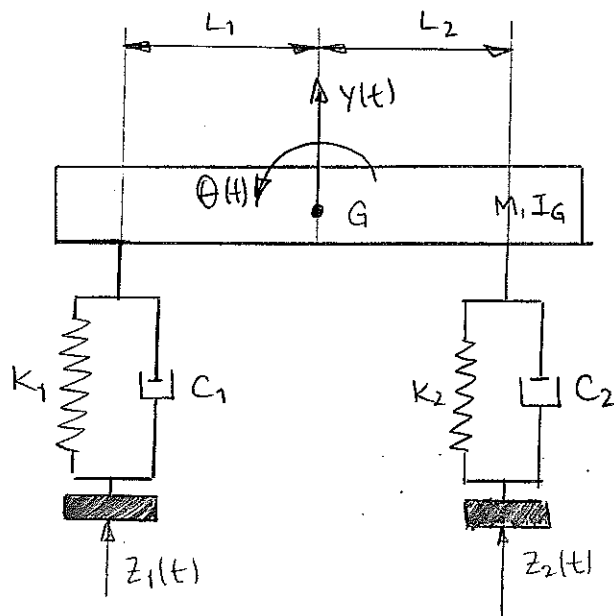
$$x_1'(t) = x_1(t) + x_1^e(t)$$

$$x_1^e(t) = -\frac{mg}{k} (1 - \cos \omega_1 (t - \tau))$$

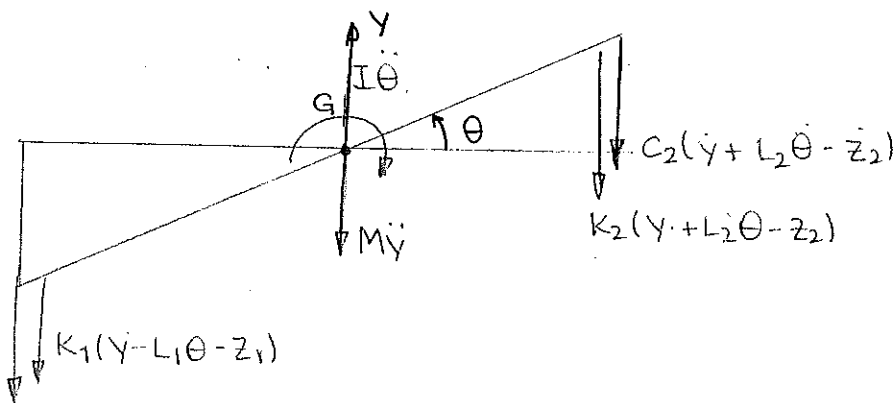
$$x_1'(t) = x_2'(t) = \frac{mg}{k} (1 - \cos \omega_1 t) + \frac{2v}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t - \frac{mg}{k} (1 - \cos \omega_1 (t - \tau))$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Examen MAYO 2014.



1) Ecuaciones de movimiento en notación matricial.



$$C_1(\dot{y} - L_1\dot{\theta} - \dot{z}_1)$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} + C_1(\dot{y} - L_1\dot{\theta} - \dot{z}_1) + C_2(\dot{y} + L_2\dot{\theta} - \dot{z}_2) + K_1(y - L_1\theta - z_1) + K_2(y + L_2\theta - z_2) = 0 \\ I\ddot{\theta} + C_2L_2(\dot{y} + L_2\dot{\theta} - \dot{z}_2) + K_2(y + L_2\theta - z_2)L_2 - C_1(\dot{y} - L_1\dot{\theta} - \dot{z}_1)L_1 + K_1(y - L_1\theta - z_1)L_1 = 0 \end{cases}$$

Busco una ecuación matricial del tipo:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ F_\theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & C_2L_2 - C_1L_1 \\ C_2L_2 - C_1L_1 & C_2L_2^2 + C_1L_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & K_2L_2 - K_1L_1 \\ K_2L_2 - K_1L_1 & K_1L_1^2 + K_2L_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1\dot{z}_1 + C_2\dot{z}_2 + K_1z_1 + K_2z_2 \\ -C_1L_1\dot{z}_1 + C_2L_2\dot{z}_2 - K_1L_1z_1 + K_2L_2z_2 \end{Bmatrix}$$

2) Las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 del sistema para $L_1=L_2=0.7668\text{m}$,
 $k_1=k_2=50000\text{ N/m}$, $M=250\text{ kg}$ e $I_G=75\text{ kgm}^2$.

Para obtener las frecuencias naturales:

$$|[K]-\omega^2[M]|=0$$

$$\begin{vmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2 M & (-k_1 L_1+k_2 L_2) \\ (-k_1 L_1+k_2 L_2) & (k_1 L_1^2+k_2 L_2^2)-\omega^2 I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100.000-250\omega^2 & 0 \\ 0 & 58798,224-75\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(100.000-250\omega^2)(58798,224-75\omega^2)=0.$$

$$-18750\omega^4 - 22199556\omega^2 + 5879822400=0$$

$$\omega_1 = \sqrt{783,97632} = 28 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

Las frecuencias naturales del sistema son $\omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y $\omega_2 = 28 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3) suponiendo que $z_1(t) = z_0 \cos(\bar{\omega}t)$ y $z_2(t) = z_0 \cdot \cos(\bar{\omega}t - \pi)$ determinar la respuesta del sistema para $c_1=c_2=0$, $z_0=0.1\text{m}$ y $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$$\bar{\omega} = 24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{bmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100000 & 0 \\ 0 & 58798,224 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \cdot \cos(24t) + 5000 \cos(24t - \pi) \\ -3834 \cos(24t) + 3834 \cos(24t - \pi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 250\ddot{y} + 100.000 y = 0 \\ 75\ddot{\theta} + 58798,224\theta = -7668 \cos(24t) \end{cases}$$

cond iniciales: $y(0)=0$ $\theta(0)=0$
 $\dot{y}(0)=0$ $\dot{\theta}(0)=0$

(1) $y(t) = A \cdot \cos(24t) + B \cdot \text{sen}(24t) \rightarrow y(t) = 0$

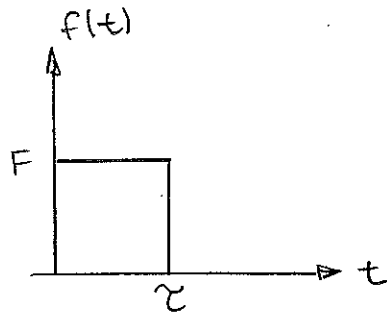
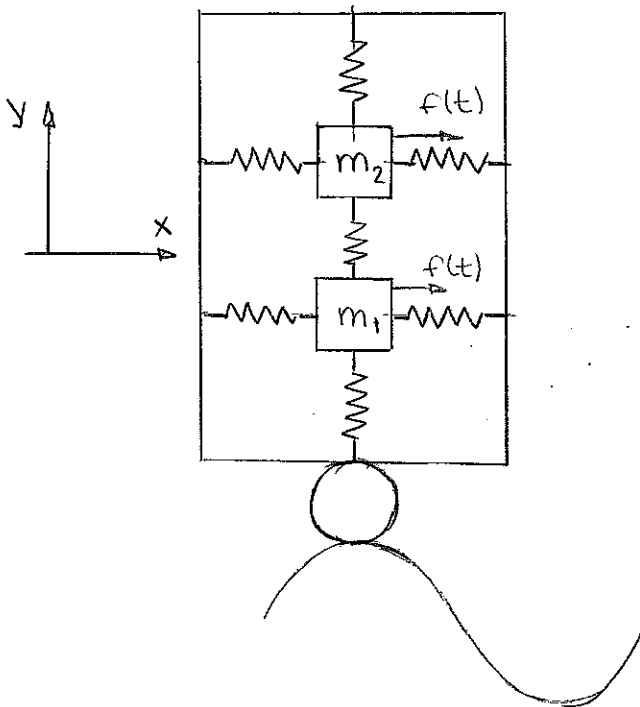
$$y(0) = A = 0.$$

$$\dot{y}(0) = 24B = 0 \rightarrow B = 0$$

(2) $\theta(t) = \frac{-7668}{58798,224} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot \cos(24t) = -0.4916 \cdot \cos(24t) = \theta(t)$

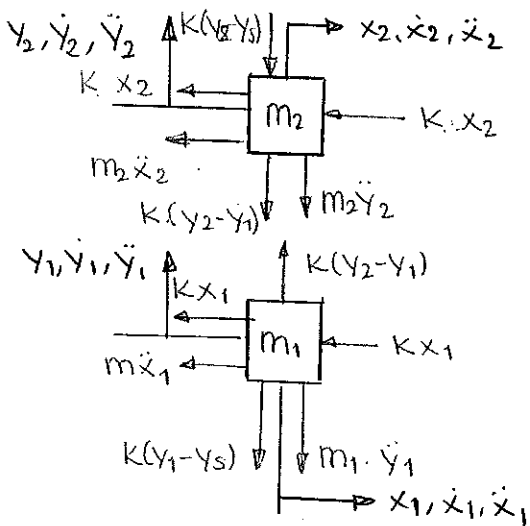
$$\beta =$$

Examen JUNIO 2014



- ⊙ Datos: $m_1 = 2m$
 $m_2 = m$
 rigidez de los muelles = k .
 $y_s = Y \cdot \text{sen}(\omega t)$

1) Obtener las frecuencias naturales del sistema. $y_2 > y_1 > y_s$



$$\left. \begin{aligned} (1) m_2 \ddot{x}_2 + 2Kx_2 &= 0 \\ (2) m_1 \ddot{x}_1 + 2Kx_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{mov. horizontal}$$

$$\left. \begin{aligned} (3) m_2 \ddot{y}_2 + K(y_2 - y_1) + K(y_2 - y_s) &= 0 \\ (4) m_1 \ddot{y}_1 - K(y_2 - y_1) + K(y_1 - y_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{mov. vertical}$$

MOV. HORIZONTAL

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m_2}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2K}{m_1}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

MOV. VERTICAL

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \cdot Y \\ KY \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t)$$

• Frecuencias naturales.

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = (2k - m\omega^2)(2k - 2m\omega^2) - k^2 = 0.$$

$$4k^2 - 2mk\omega^2 - 4mk\omega^2 + 2m^2\omega^4 - k^2 = 0.$$

$$2m^2\omega^4 - 6mk\omega^2 + 3k^2 = 0.$$

$$\omega_3 = \frac{6mk \pm \sqrt{36m^2k^2 - 24m^2k^2}}{4m^2} = \frac{6mk \pm \sqrt{12m^2k^2}}{4m^2} = \frac{3k \pm k\sqrt{3}}{2m}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2} \frac{k}{m}} ; \omega_4 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2} \frac{k}{m}}$$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$	$\omega_3 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})k}{2m}}$
$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_4 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})k}{2m}}$

2) Cálculo de la respuesta horizontal para los instantes $t < \tau$ y $t > \tau$ suponiendo que las masas parten del reposo.

$t < \tau$ $m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 = f(t)$

$m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_2 = f(t)$

(1) $x_2(t) = \frac{F}{k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) \right]$

(2) $x_1(t) = \frac{F}{2k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right]$

$t > \tau$

(1) $x_2(t) = \frac{F}{k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) \right] - \frac{F}{k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} (t - \tau)\right) \right]$

(2) $x_1(t) = \frac{F}{2k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right] - \frac{F}{2k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} (t - \tau)\right) \right]$

3) Cálculo de la respuesta vertical estacionaria (sd. particular)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} kY \\ kY \end{Bmatrix} \text{sen}(\bar{\omega}t)$$

Las respuestas serán del tipo $y_2 = Y_2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t) \rightarrow \ddot{y}_2 = -Y_2 \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t)$

$y_1 = Y_1 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t) \rightarrow \ddot{y}_1 = -Y_1 \bar{\omega}^2 \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t)$

$$\begin{bmatrix} m \cdot \bar{\omega}^2 + 2k & -k \\ -k & 2m\bar{\omega}^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} kY \\ kY \end{Bmatrix}$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} kY & -k \\ kY & 2m\bar{\omega}^2 + 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m\bar{\omega}^2 + 2k & -k \\ -k & 2m\bar{\omega}^2 + 2k \end{vmatrix}}$$

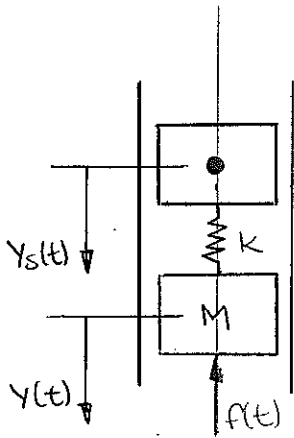
$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} m\bar{\omega}^2 + 2k & kY \\ -k & kY \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m\bar{\omega}^2 + 2k & -k \\ -k & 2m\bar{\omega}^2 + 2k \end{vmatrix}}$$

1. The first part of the document is a title page. It contains the title of the document, the author's name, and the date of publication. The title is "The History of the United States" and the author is "John Adams". The date of publication is "1789".

Examen. MAYO 2014

3. EJERCICIO

(A)



$$Y_s(t) = s(t) = r \cdot \cos(\varphi + \omega t) = r \cdot \cos(\omega \cdot t) + \ell$$

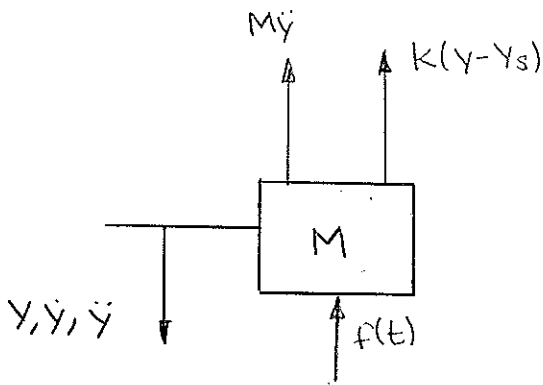
$$r = 8 \text{ cm}$$

$$K = 100.000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$M = 15 \text{ kg}$$

$$\varphi = 650 \text{ rpm} = 68'068 \text{ rad/s} = \omega$$

$$f(t) = 5000 + 5000 \cos(\omega t)$$



$$M\ddot{y} + K(y - Y_s) + f(t) = 0$$

$$M\ddot{y} + Ky = K[0'08 \cos(\omega t) + \ell] - 5000 - 5000 \cos(\omega t) =$$

$$= 3000 \cos(\omega t) + -5000$$

$$M\ddot{y}_1 + Ky_1 = 3000 \cdot \cos(\omega t)$$

$$y_1 = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$MA\omega^2 + KA = 3000 \rightarrow A = 0'0177$$

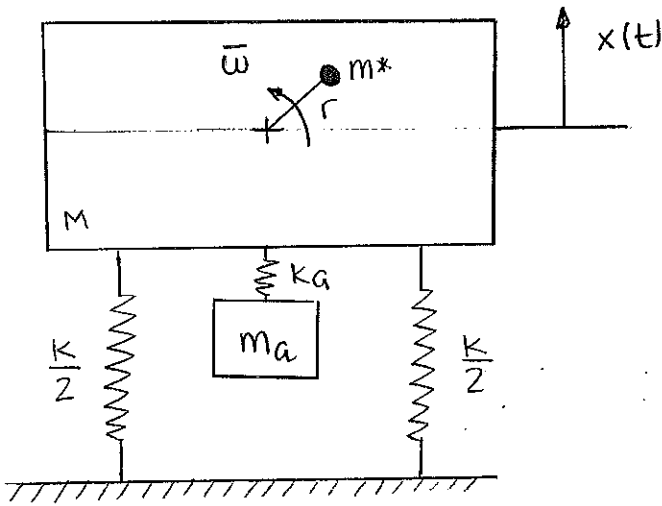
$$y_1 = 0'0177 \cdot \cos(\omega t)$$

$$M\ddot{y}_2 + Ky_2 = K\ell - 5000$$

$$y_2(t) = \frac{-5000}{K} = -0'05$$

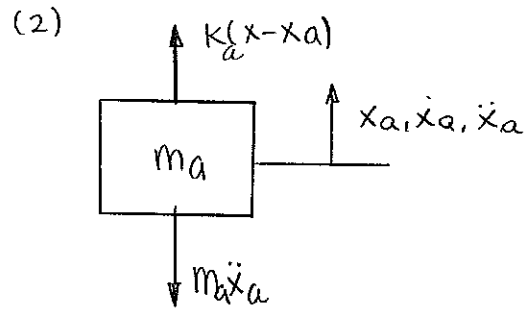
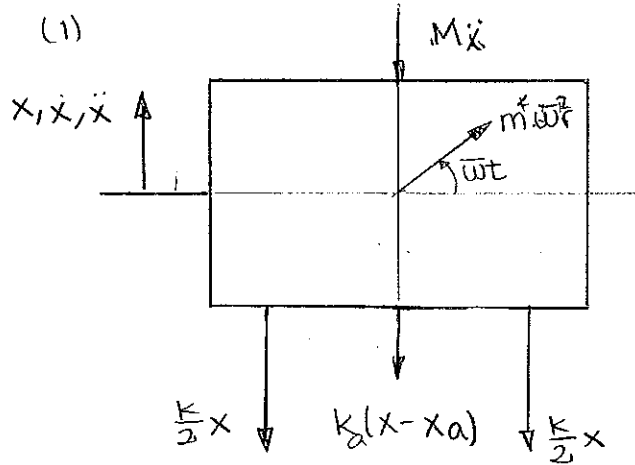
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 0'0177 \cdot \cos(\omega t) - 0'05$$

3. EJERCICIO



$M = 50 \text{ kg}$

$\bar{\omega} = 6000 \text{ rpm} = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



(1) $M\ddot{x} + kx + k_a(x - x_a) - m\bar{\omega}^2 r \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t) = 0.$

(2) $m_a\ddot{x}_a + k_a(x_a - x) = 0$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +m\bar{\omega}^2 r \cdot \text{sen}(\bar{\omega}t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m\bar{\omega}^2 r & -k_a \\ 0 & k_a - \bar{\omega}^2 m_a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+k_a - \bar{\omega}^2 M & -k_a \\ -k_a & k_a - \bar{\omega}^2 m_a \end{vmatrix}}$$

$$X_a = \frac{\begin{vmatrix} -k_a & m\bar{\omega}^2 r \\ k_a - \bar{\omega}^2 m_a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+k_a - \bar{\omega}^2 M & -k_a \\ -k_a & k_a - \bar{\omega}^2 m_a \end{vmatrix}}$$

⊗ Frecuencias naturales del sistema.

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} k+k_a-\omega^2 M & -k_a \\ -k_a & k_a-\omega^2 m_a \end{vmatrix} = (k+k_a-\omega^2 M)(k_a-\omega^2 m_a) - k_a^2 = 0.$$

$$k_a \cdot k + k_a^2 - k_a \omega^2 M - k \omega^2 m_a - k_a \omega^2 m_a - \omega^4 M m_a - k_a^2 = 0$$

$$-M m_a \omega^4 - (k_a M + k m_a + k_a m_a) \omega^2 + k_a \cdot k = 0.$$

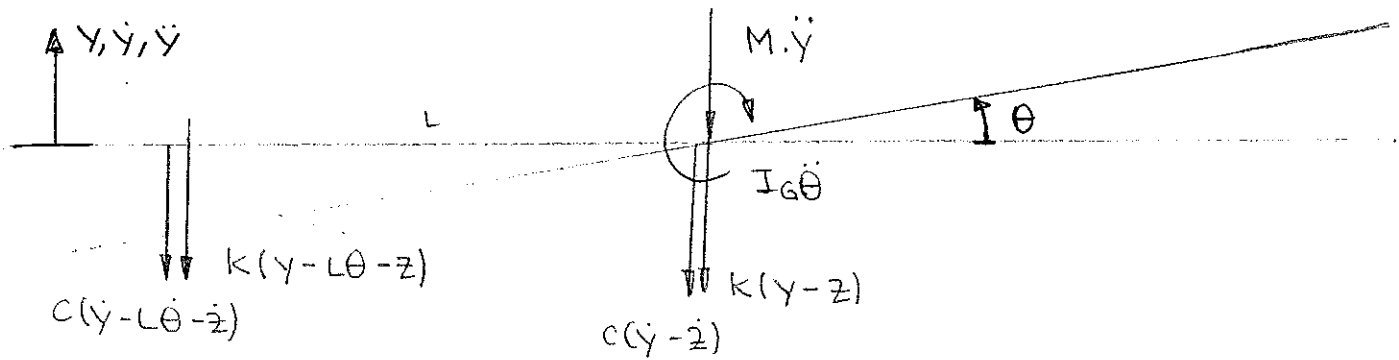
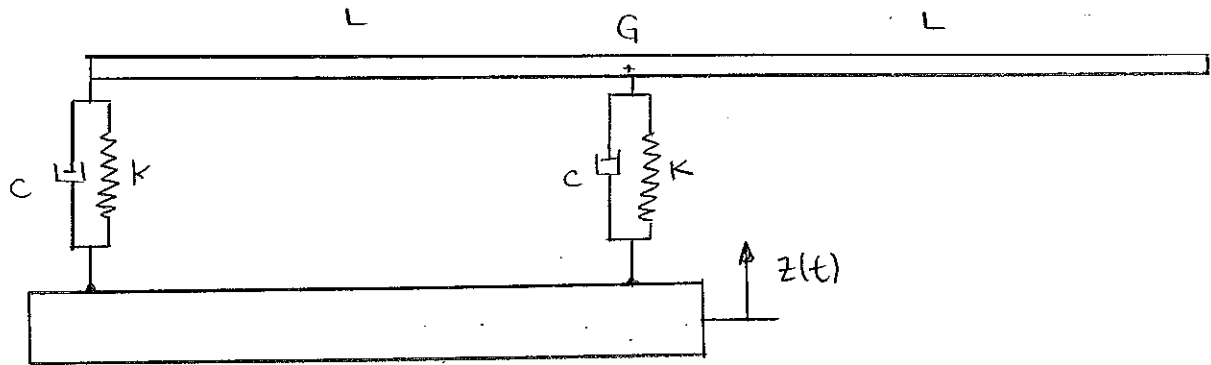
$$\omega^2 = \frac{k_a M + k m_a + k_a m_a \pm \sqrt{(k_a M + k m_a + k_a m_a)^2 + 4k \cdot k_a M m_a}}{-2M m_a}$$

⊗ Frecuencia natural del sistema: $\omega^2 = \frac{k}{M}$

$$\omega^2 = (20\pi)^2 = \frac{k}{M} \rightarrow k = 50 \text{ kg} \cdot (20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 = 197392,088 \text{ N/m}$$

$$\boxed{k = 197392,088 \text{ N/m}}$$

⊗ Como en el libro



$$(1) M\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{z}) + c(\dot{y} - L\dot{\theta} - \dot{z}) + k(y - z) + k(y - L\theta - z) = 0$$

$$(2) I_G\ddot{\theta} - kL(y - L\theta - z) - cL(\dot{y} - L\dot{\theta} - \dot{z}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -cL \\ -cL & cL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -kL \\ -kL & kL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +2c\dot{z} + 2kz \\ -kz - cL\dot{z} \end{Bmatrix}$$

⊙ Frecuencias naturales:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 M & -kL \\ -kL & kL^2 - \omega^2 I_G \end{vmatrix} = (2 - \omega^2 \cdot 2)(1 - \omega^2 \cdot 1) - 1 = 0$$

$$(1 - \omega^2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_2^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

⊙ El amortiguamiento es proporcional en caso de que sea posible desacoplarlo

$$\omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot 2 & -1 \\ -1 & 1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} x - \theta = 0 \rightarrow \theta = \sqrt{2} x \rightarrow \text{modo 1: } \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot 2 & -1 \\ -1 & 1 - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\sqrt{2} x - \theta = 0 \rightarrow \theta = -\sqrt{2} x \rightarrow \text{modo 2: } \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [C]' &= [X]^T [C] [X] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podemos desacoplar el sistema luego el amortiguamiento es proporcional.

$$\textcircled{z} z = \text{sen}(t)$$

$$[x]^T [M] [x] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[x]^T [K] [x] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[x]^T \{f\} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\text{sen}t \\ -\text{sen}t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (2-\sqrt{2})\text{sen}t \\ (2+\sqrt{2})\text{sen}t \end{Bmatrix}$$

Tenemos dos ecuaciones desacopladas:

$$(1) 4\ddot{y} + (4-2\sqrt{2})y = (2-\sqrt{2})\text{sen}t$$

$$(2) 4\ddot{\theta} + (4+2\sqrt{2})y = (2+\sqrt{2})\text{sen}t$$

La solución será de la forma: $y(t) = A\text{sen}t$

$$\theta(t) = B\text{sen}t.$$

$$(1) 4A + (4-2\sqrt{2})A = (2-\sqrt{2})$$

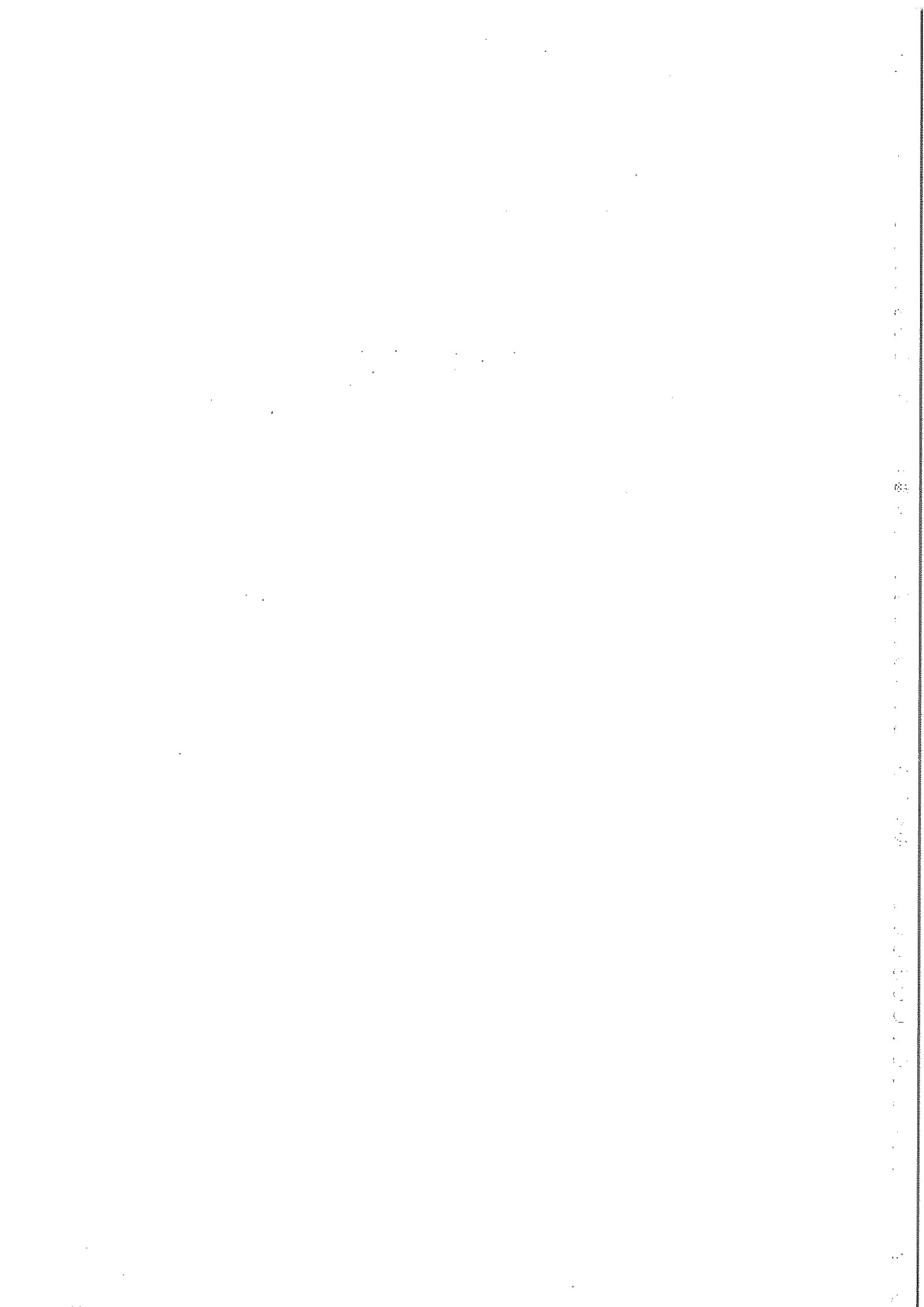
$$A = 0'11327$$

$$(2) 4B + (4+2\sqrt{2})B = (2+\sqrt{2})$$

$$B = 0'31530$$

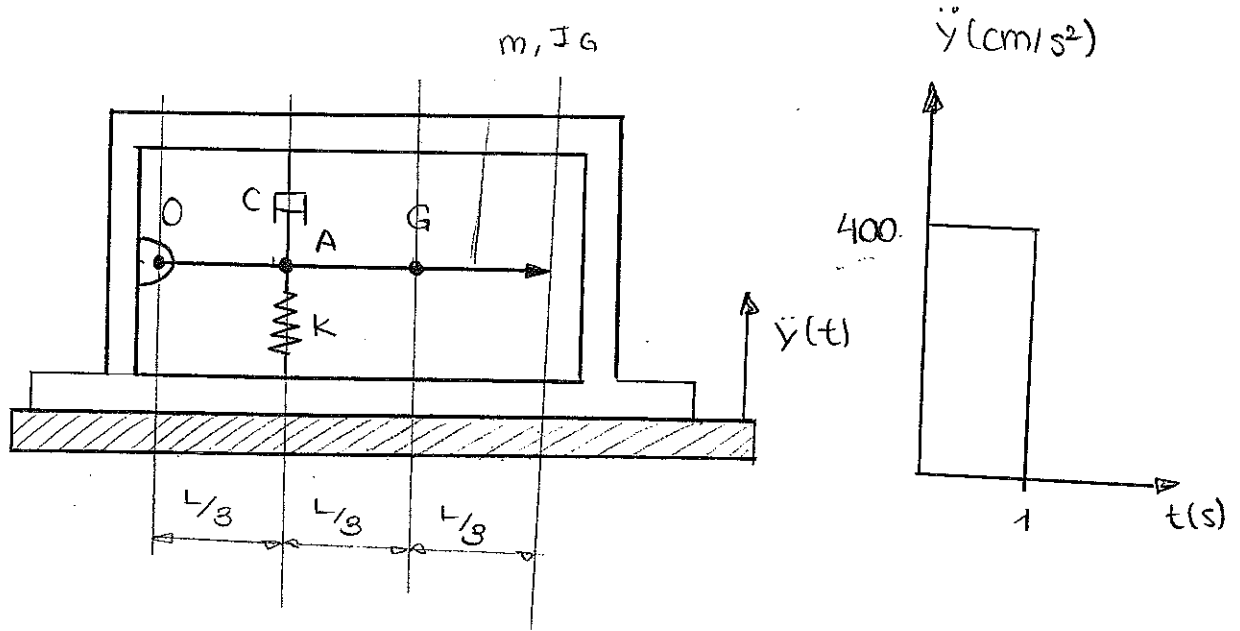
$$y(t) = 0'11327\text{sen}t$$

$$\theta(t) = 0'31530\text{sen}t$$

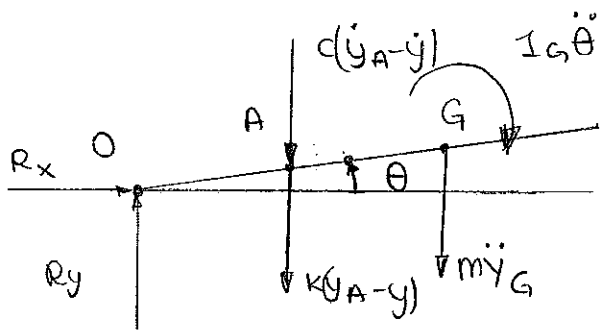


Examen MAYO 2013

EJERCICIO 3.



1



$$y_A = \frac{L}{3} \cdot \theta + y$$

$$y_G = \frac{2L}{3} \theta + y$$

$$\dot{y}_A = \frac{L}{3} \dot{\theta} + \dot{y}$$

$$\dot{y}_G = \frac{2L}{3} \dot{\theta} + \dot{y}$$

$$\ddot{y}_G = \frac{2L}{3} \ddot{\theta} + \ddot{y}$$

$$I_G \ddot{\theta} + k \cdot \left(\frac{L}{3} \theta\right) \cdot \frac{L}{3} + c \cdot \left(\frac{L}{3} \dot{\theta}\right) \cdot \frac{L}{3} + m \left(\frac{2L}{3} \ddot{\theta} + \ddot{y}\right) \frac{2L}{3} = 0$$

$$I_G \ddot{\theta} + c \frac{L^2}{6} \dot{\theta} + k \frac{L^2}{6} \theta = -\frac{2L}{3} m \ddot{y}$$

2

$$\ddot{\theta} = 3 \frac{\ddot{y}_G - \ddot{y}}{2L} = \frac{3}{2L} \ddot{y}_{Gr}$$

$$\theta = \frac{y_G - y}{2L} \cdot 3 = \frac{3}{2L} y_{Gr}$$

$$\frac{1}{3} m L^2 \cdot \frac{3}{2L} \ddot{y}_{Gr} + k \cdot \frac{L^2}{6} \cdot \frac{3}{2L} y_{Gr} = -\frac{2L}{3} m \ddot{y}$$

$$\frac{L}{6} m \cdot \ddot{y}_{Gr} + \frac{L}{4} k \cdot y_{Gr} = -\frac{2L}{3} m \ddot{y}$$

$$\frac{m}{6} \ddot{Y}_{Gr} + \frac{k}{4} Y_{Gr} = -\frac{2}{3} \ddot{Y}_m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k/4}{m/6}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{6k}{4m} = 100 \rightarrow m = \frac{6}{100 \cdot 4} k$$

$$Y_1(t) = \text{escalón de } I = -\frac{2}{3} m \cdot 4 \quad \}$$

$$Y_1(t) = -\frac{I}{k} \cdot \cos \omega t + \frac{I}{k} = + \frac{\frac{2}{3} m \cdot 4}{k/4} \cdot \cos(\omega t) - \frac{\frac{2}{3} m \cdot 400}{k/4} =$$

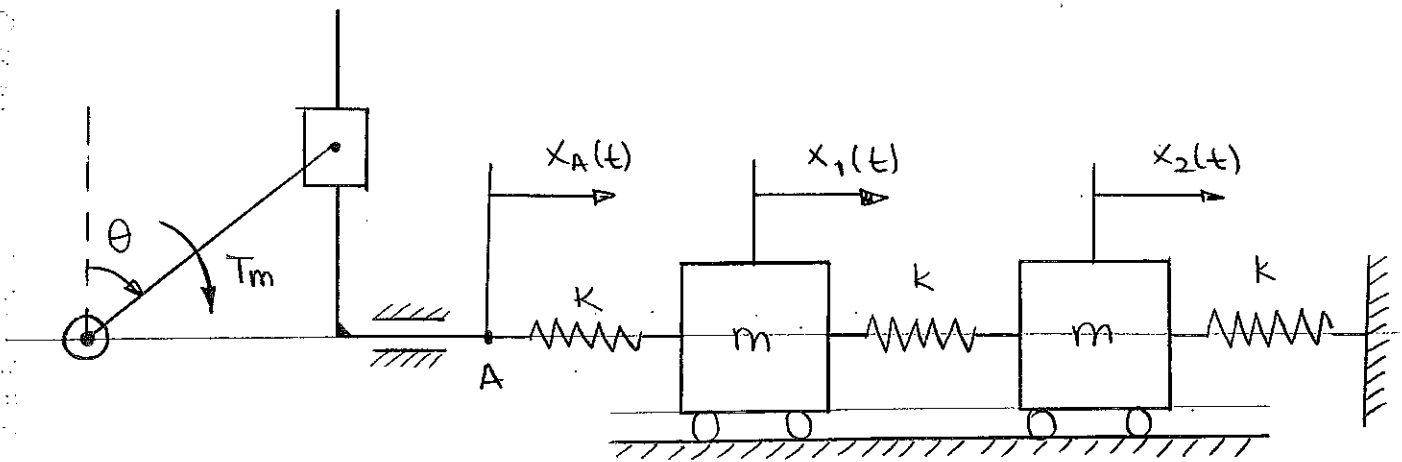
$$= 0'16 \cdot \cos(100t) - 0'16.$$

$$Y_2(t) = \text{escalón de } I = \frac{2}{3} m \cdot 4 \quad \}$$

$$Y_2(t) = -0'16 \cos(100(t-1)) + 0'16.$$

$$Y_{Gr} = 0'16m$$

Examen JUNIO 2013



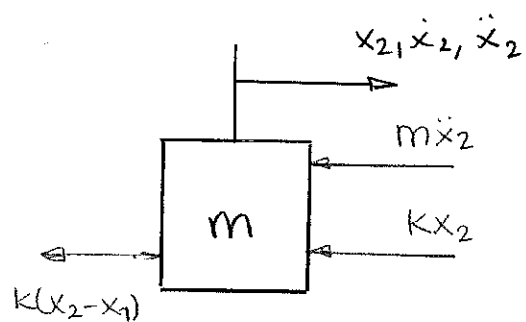
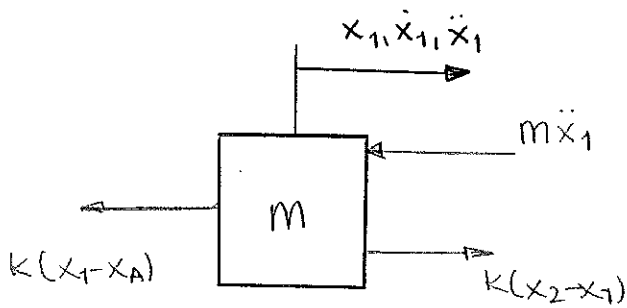
$$M = 0.1 \text{ kg}$$

$$K = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$n = 30 \text{ rpm} \rightarrow \dot{\theta} = 30 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$C_r = 5 \text{ Nm}$$



$$x_A = l \cdot \sin \theta = l \cdot \sin(\pi t) = \sin(\pi t)$$

$$(1) m\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_A) - K(x_2 - x_1) = 0$$

$$(2) m\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) + Kx_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot \sin \pi t \\ 0 \end{bmatrix}$$

⊗ Frecuencias naturales

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$$

$$2k - \omega^2 m = k$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{m}}$$

$$2k - \omega^2 m = -k$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3k}{m}}$$

⊗ Modos

$$\omega_1 \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \longrightarrow \text{modo 1: } \boxed{\begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

$$\omega_2 \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-k x_1 - k x_2 = 0 \longrightarrow \text{modo 2: } \boxed{\begin{Bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

⊗ Desplazamiento máximo de cada masa:

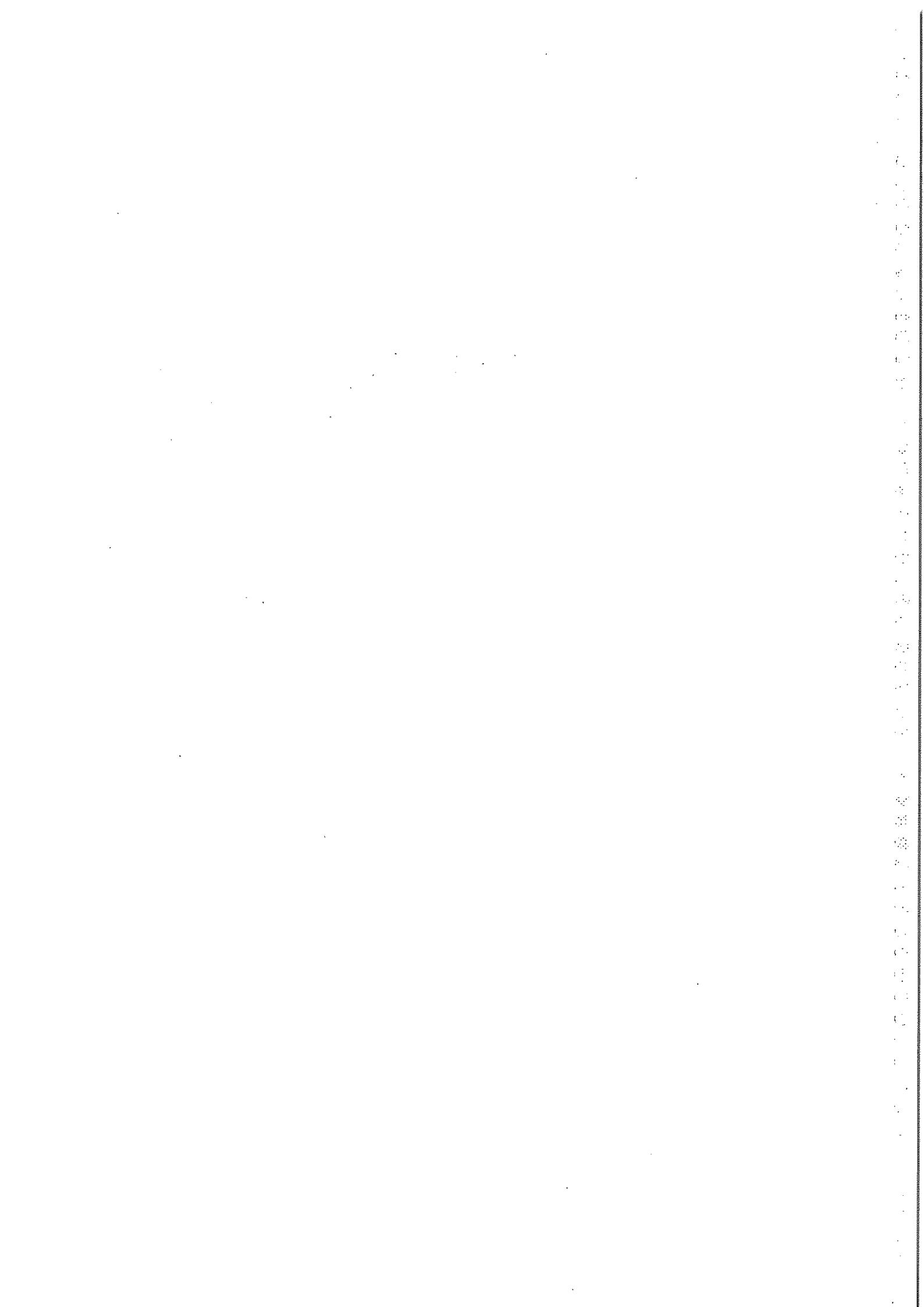
$$\boxed{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} k & -k \\ 0 & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{19901304}{29606,18991} = \boxed{0'6722 \text{ m}}$$

$$\boxed{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & k \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix}} = \frac{10000}{29606,18991} = \boxed{0'3776 \text{ m}}$$

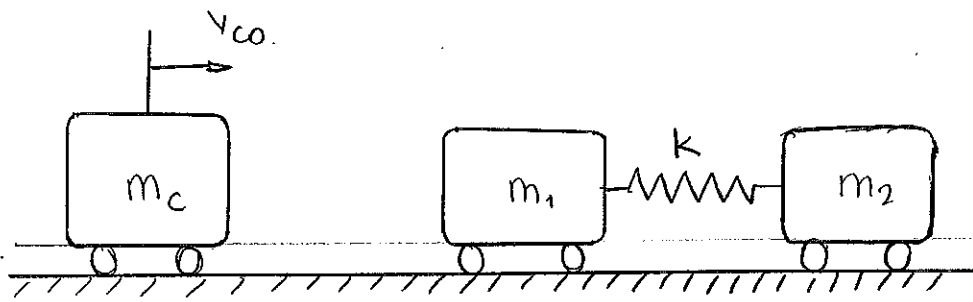
$$F_A = k(x_1 - x_A) = 100 (0,3278 \cdot \sin(\pi t)) = 32,78 \cdot \sin(\pi t) = 32,78 \cdot \sin \theta$$

$$M_r^*(\theta) \ddot{\theta} = C_m \dot{\theta} + F_A \cdot \dot{x}_A = C_m \dot{\theta} + F_A \cdot \dot{\theta} \sin \theta$$

$$M_r^*(\theta) = C_m + F_A \cdot \sin \theta$$



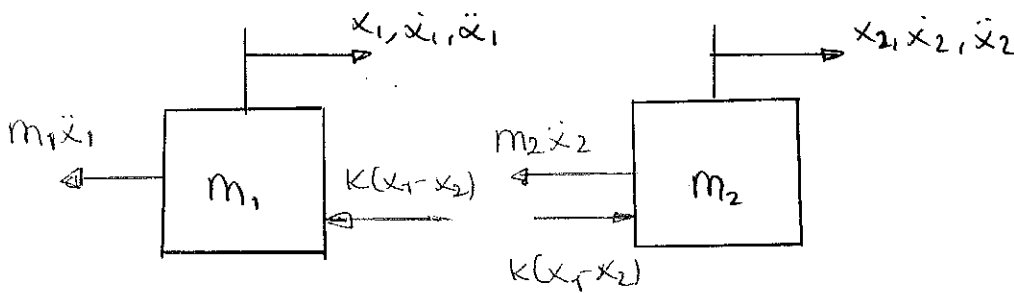
Examen JUNIO 2013



$$m_c v_{co} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \rightarrow v_1 + v_2 = v_{co} = 1$$

$$m_c v_{co}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

$$1 = v_1^2 + (1 - v_1)^2 \rightarrow \begin{cases} v_1 = 1/2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$



$$(1) m_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = 0$$

$$(2) m_2 \ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

⊙ Frecuencias naturales:

$$\begin{vmatrix} K - \omega^2 m_1 & -K \\ -K & K - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = (K - \omega^2 m_1)(K - \omega^2 m_2) = K^2$$

$$(K - \omega^2 m) = K$$

$$K - \omega^2 m = -K$$

$$\boxed{\omega_1^2 = 0}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{2K}{m} = 1 \text{ rad/s}}$$

⊗ Modos de vibración:

$$\omega_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{modo 1: } \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = 1 \quad \begin{bmatrix} k-m_1 & -k \\ -k & k-m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-0.5x_1^2 - 0.5x_2^2 = 0 \rightarrow \text{modo 2: } \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

⊗ Respuesta:

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) 2\ddot{y}_1 = 0$$

$$(2) 2\ddot{y}_2 + 2y_2 = 0.$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{Bmatrix} = [X]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{Bmatrix} = [X]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(1) 2\ddot{y}_1 = 0.$$

$$y_1(t) = At + B.$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\boxed{y_1(t) = t}$$

$$\dot{y}_1(0) = 1 \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$(2) 2\ddot{y}_2 + 2y_2 = 0.$$

$$y_2(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$$

$$\boxed{y_2(t) = \sin t}$$

$$y_2(0) = 0 = A$$

$$\dot{y}_2(0) = 1 = B$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ \sin t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t + \sin t \\ t - \sin t \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{x_1(t) = t + \sin t}$$

$$\boxed{x_2(t) = t - \sin t}$$

11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

REDUCCIÓN A LA DINÁMICA DE MAQUINARIA.

Problema dinámico directo. (Acciones motoras, acciones resistentes)

Problema dinámico inverso.

↓

(movimiento, acciones resistentes)

(movimientos, reacciones en los pares)

↓

(acciones motoras, reacciones en los pares).

{máquinas en régimen no permanente}

{cinetostático: más sencillo}

{dinámicos}

Problema estático

Volante de inercia

Equilibrado de rotores.

Principios de la estática.

Principio de d'Alembert:

Tipos de fuerzas actuantes

$$\vec{F}_{act} \begin{cases} \vec{F}_{ext} \begin{cases} \vec{F}_{ap} \begin{cases} \vec{F}_{mot} \text{ (motoras)} \\ \vec{F}_{res} \text{ (resistentes)} \end{cases} \\ \vec{F}_{en} \end{cases} \\ \vec{F}_{int} \end{cases}$$

Teoremas fundamentales de la estática.

1. Primera ley de Newton

2. Tercera ley de Newton

3. Ecuaciones de equilibrio estático de un sólido rígido.

4. Principio de trabajos virtuales.

Reacciones en los pares cinemáticos.

*Par C: cada grado de libertad restringido \Rightarrow fuerza de enlace.

{ Impide desplazamiento: la reacción es una fuerza
 { Impide giro: la reacción es un momento.

*Par R: dos fuerzas

*Par P: una fuerza y un momento

*Par L: una fuerza.

} MOVIMIENTO PLANO.

Δ En potencias virtuales deben estar incluidas las fuerzas de inercia porque es un equilibrio dinámico.

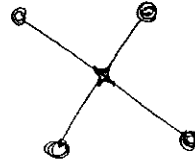
sistemas de masas equivalentes

SIST. REALES.



Th. Dinám

SIST. MASAS EQUIVALENTES.



Th. Dinám

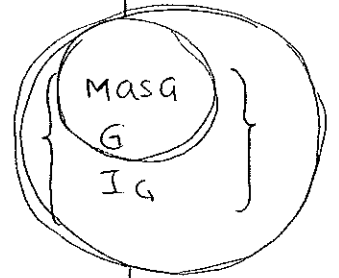


Mismas ecuaciones.

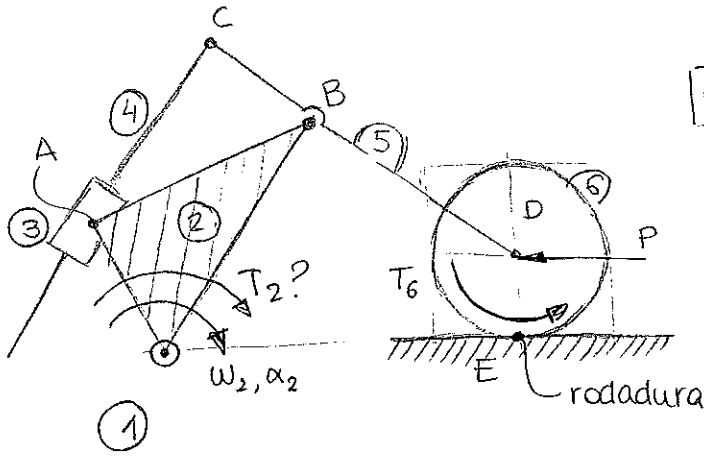
$$\vec{F}_{ext} - m \cdot \vec{a}_G = 0.$$

$$N_0 - I_G \cdot \vec{\alpha} + \vec{OG} \wedge (-m \cdot \vec{a}_G) = \vec{0}$$

sistemas estática-mente equiv.



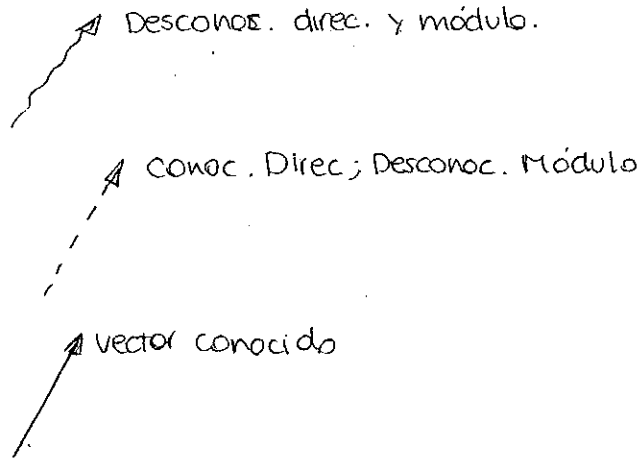
sistemas dinámicamente equiv.



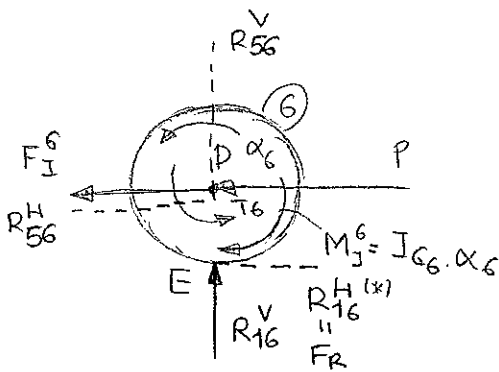
$G=1$

I_{Gi}, m_i
 G_i
 Reac?

- Incógnitas
 - Datos



- PASOS: 1) Análisis cinemático $\vec{\omega}_i, \vec{\alpha}_i, \vec{v}_k, \vec{a}_{G_i}$ (1º cuatrimestre) (Hecho)
 2) cálculo F. Inercia (F_I^i, M_I^i) (Hecho)
 3) Aislando elemento a elemento + P.Pio D'Alembert.

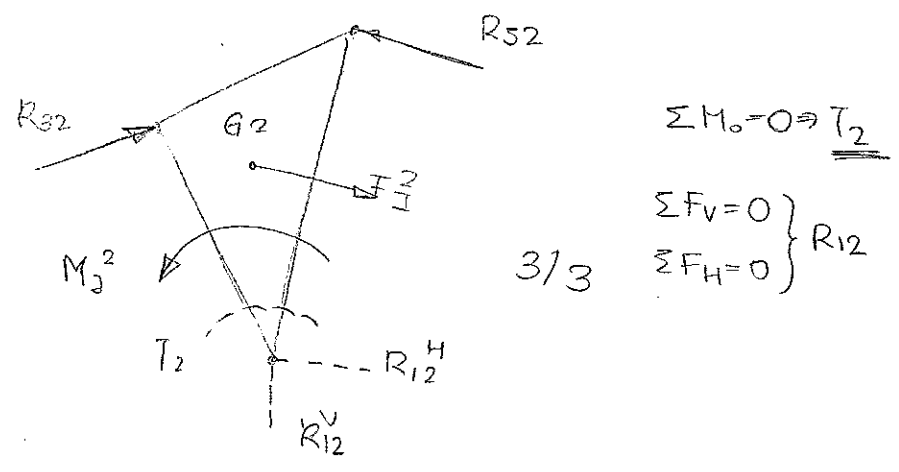
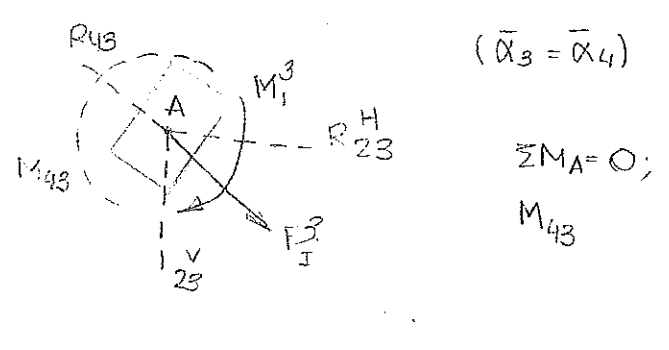
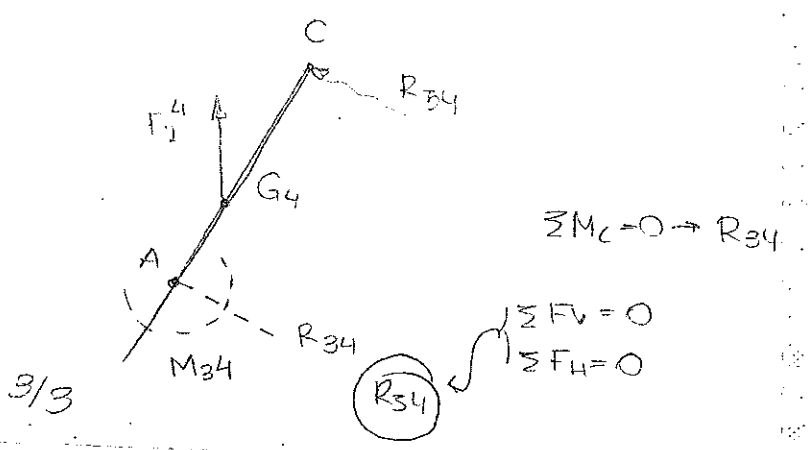
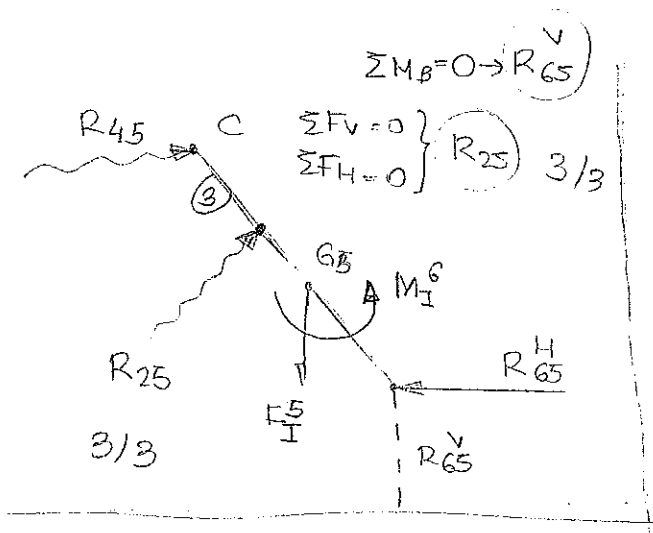


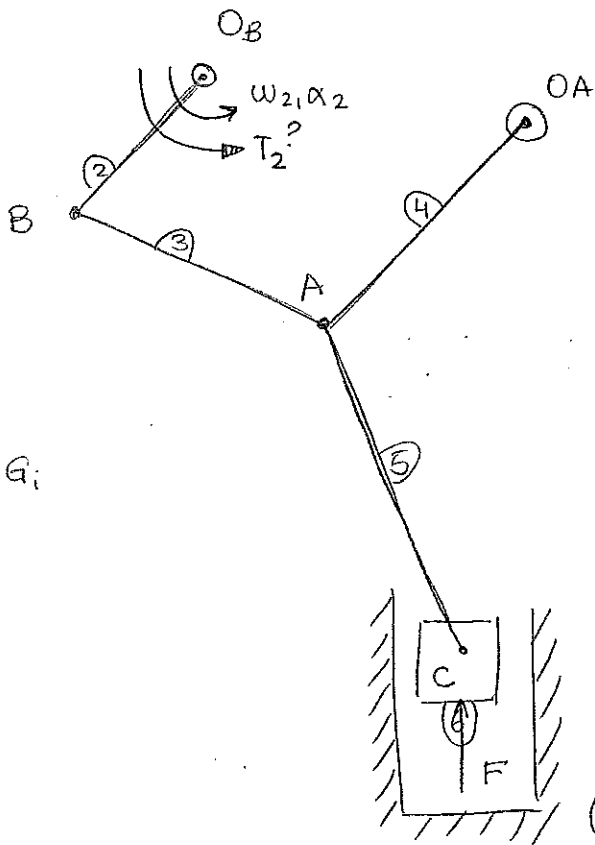
{ (*) Hasta que no se alcance deslizamiento $R_{16}^H \neq \mu \cdot R_{16}^V$

$\sum M_D = 0 \Rightarrow R_{16}^H$

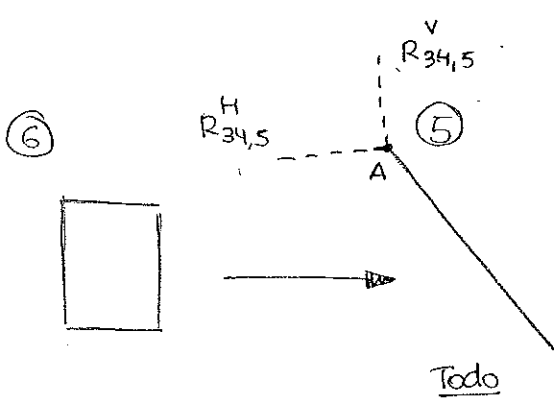
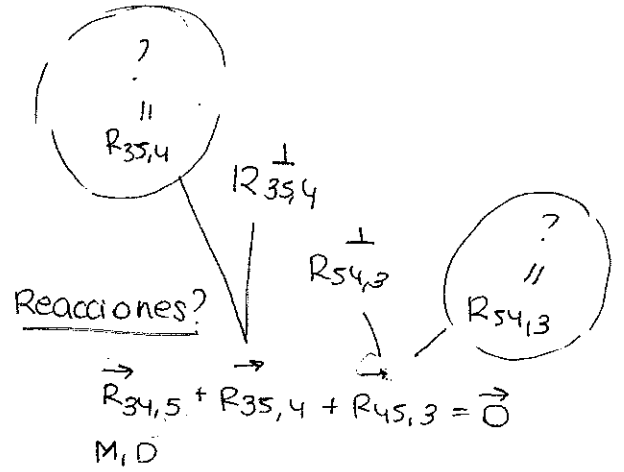
$\sum M_E = 0 \Rightarrow R_{56}^H = -R_{65}^H$

2/3 incógnitas

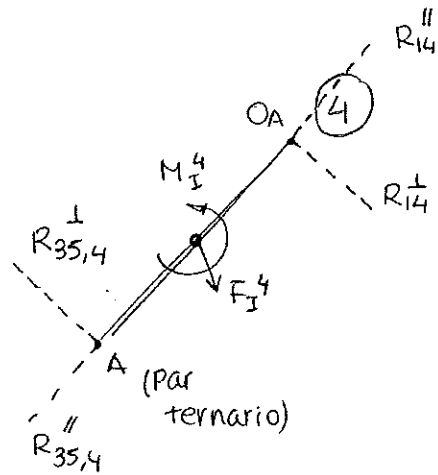




m_i, I_{Gi}, G_i



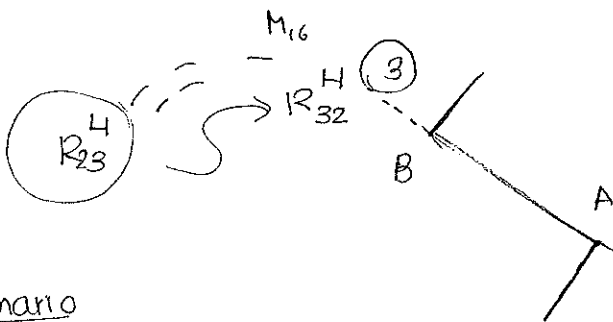
M_{16}



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_{14}^\perp$$

$$\Sigma M_{OA} = 0 \Rightarrow R_{35,4}^\perp$$

2/3



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_{23}^\perp$$

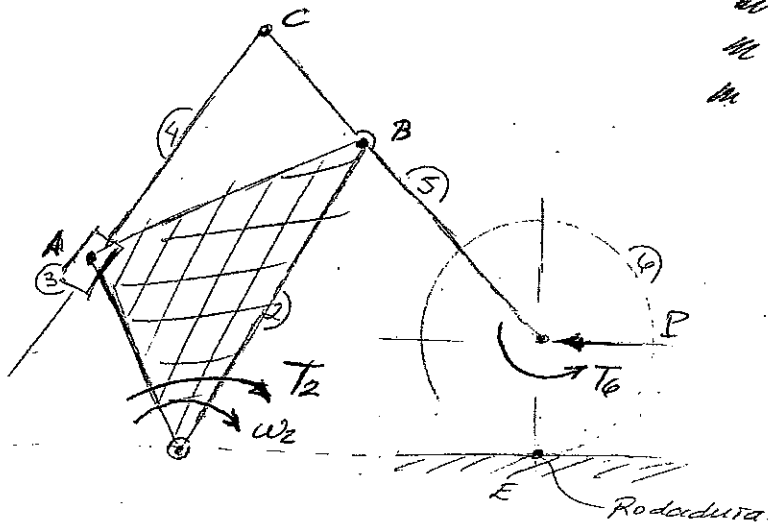
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_{54,3}^\perp$$

2/3

binario

$$\vec{R}_{ij} + \vec{R}_{ji} = \vec{0}$$

DINÁMICA DE MÁQUINAS.

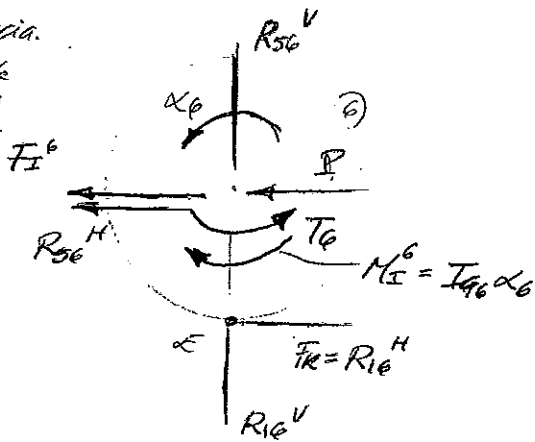


la incógnitas
 en datos
 en Frec. de dirección conocida y
 módulo desconocido.
 I_{Gi}, m_i, G_i

- Pasos:
- 1) Análisis cinemático \rightarrow Cálculo de $\vec{\omega}_i, \vec{\alpha}_i, \vec{v}_k, \vec{a}_{qi}$.
 - 2) Cálculo de fuerzas inerciales. (F_I^i, M_I^i)
 - 3) Diagrama sólido libre \Rightarrow Teo D'Alembert.

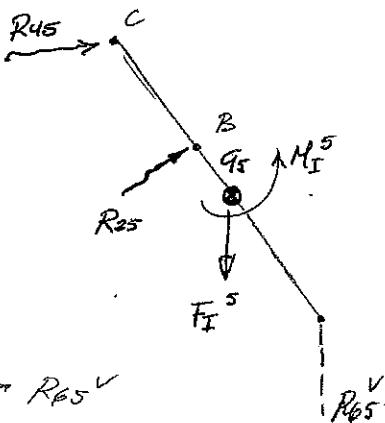
Cuando la incógnita a calcular está en el elemento de entrada, comenzar el problema por el elemento de salida.

fca inercia.
 conocida



$$\sum M_D = 0 \rightarrow R_{16}^H$$

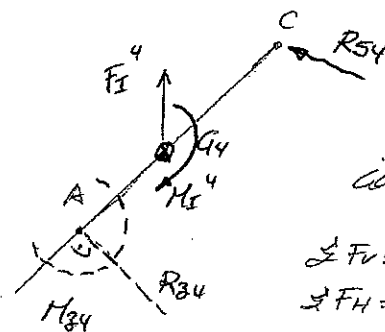
$$\sum M_E = 0 \rightarrow R_{56}^H$$



$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_{65}^V$$

$$\sum F_V = 0 \quad \left\{ R_{25}\right.$$

$$\sum F_H = 0$$

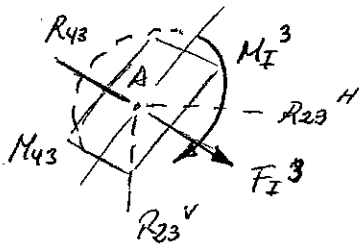


$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_{34}$$

Conocido $M_{42} = -M_{34}$:

$$\sum F_V = 0 \quad \left\{ R_{54}\right.$$

$$\sum F_H = 0$$

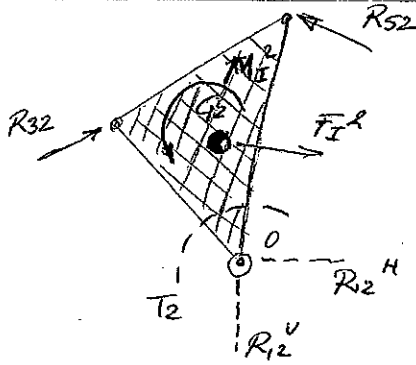


$$\alpha_3 = \alpha_4$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_{43}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_{23}^v$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow R_{23}^h$$

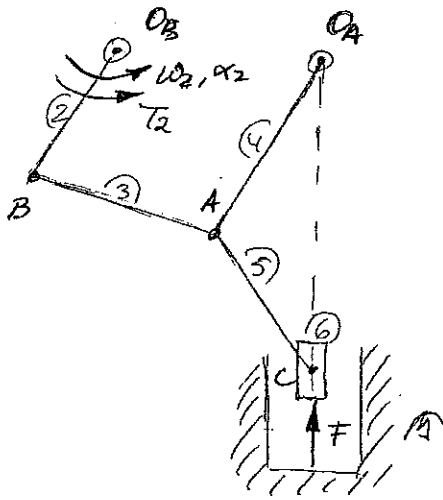


$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \boxed{T_2}$$

$$\sum F_v = 0$$

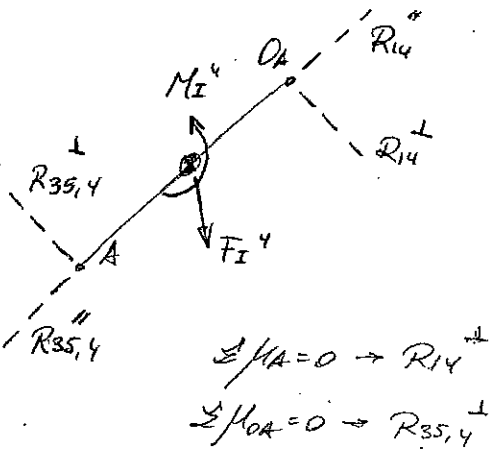
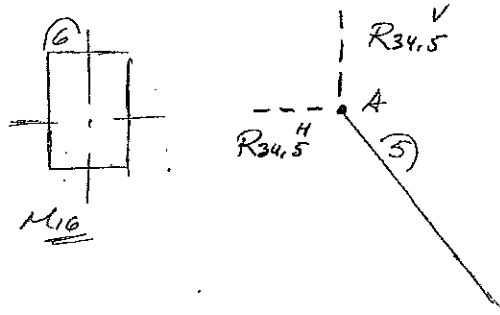
$$\sum F_h = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} \\ R_{12}^h \end{array} \right.$$

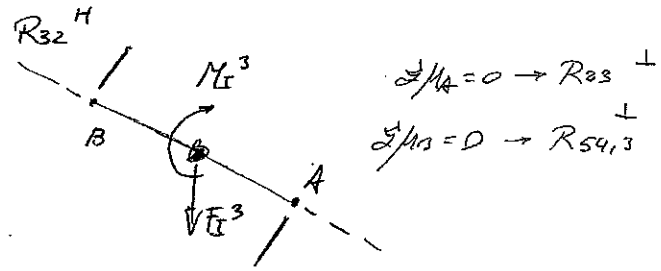


Los datos $\Rightarrow M_i, I_{xi}, G_i$
 la incógnita

Igual que en el caso anterior, como la incógnita está en el elemento de entrada, comenzamos por el de salida



Las fuerzas del elemento 5 y las del elemento 4 de unión entre ambos, NO son las mismas.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_{14}^{\perp}$$

$$\sum M_{O_A} = 0 \rightarrow R_{35,4}^{\perp}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_{54,3}^{\perp}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_{54,3}^{\parallel}$$

Del sistema global, obtenemos:

$$\vec{R}_{34,5} + \vec{R}_{35,4} + \vec{R}_{45,3} = \vec{0} \rightarrow \text{Obtenemos } R_{54,3}^{\perp} \text{ y } R_{35,4}^{\perp}$$

De esta ecuación vectorial, desdoblamos en 2 ecuaciones en X e Y: y obtenemos

$R_{35,4}^{\parallel}$ y $R_{54,3}^{\parallel}$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Problemas 4

Datos

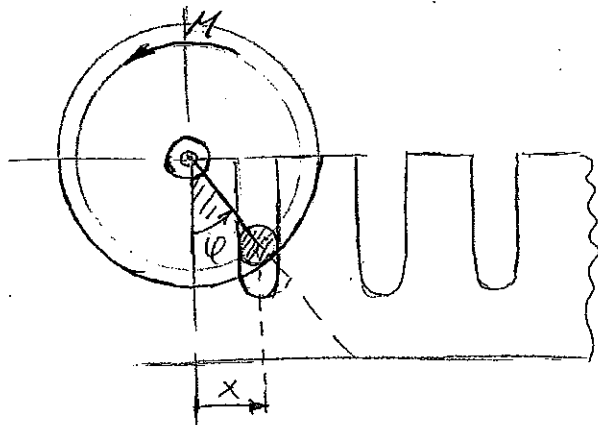
Motor \rightarrow par constante

$I = 1 \text{ kg m}^2 \rightarrow$ Propia del sistema. Conjunto

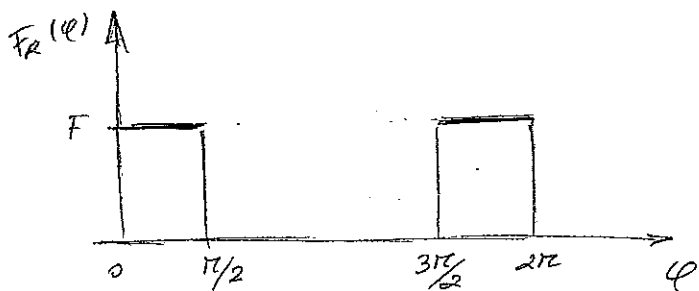
$R = 0.2 \text{ m.}$ polea-motor.

$F = 5000 \text{ N}$

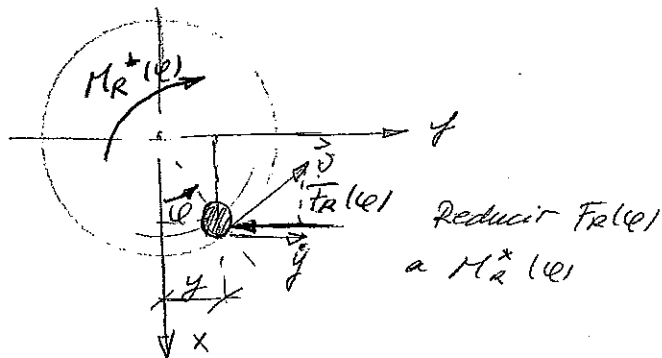
* La cinta sólo se moverá durante la mitad del ciclo de la polea. Parte azul



- Esta inercia propia se corresponde con la integral de la pág 95.



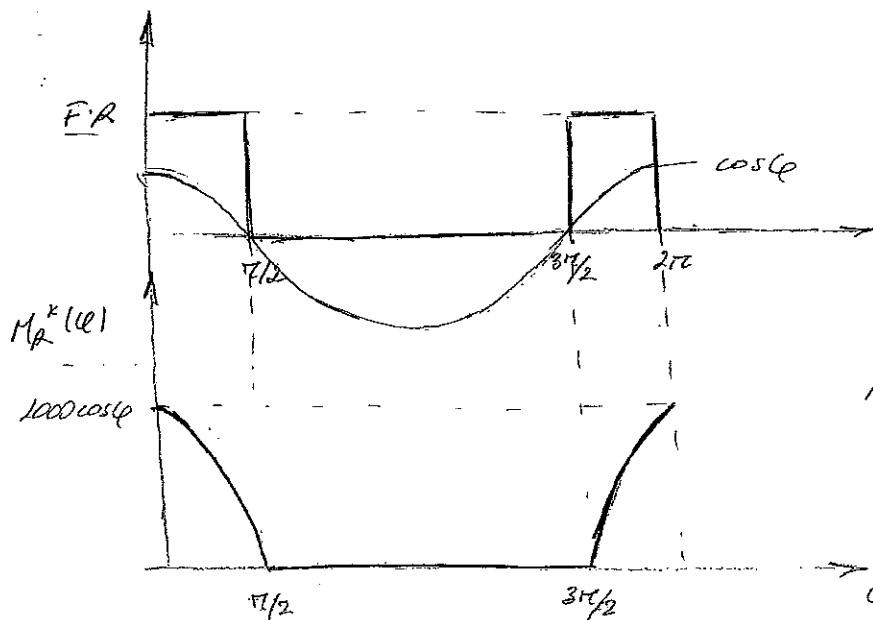
Para calcular ahora la potencia necesaria para el motor, reduciremos las fuerzas del sistema al eje del motor.



$$y = R \sin \phi \quad ; \quad \dot{y} = R \cos \phi \cdot \dot{\phi}$$

$$Pot_R = Pot_{M_R^*}$$

$$-F_R(\phi) \cdot \dot{y} = -M_R^*(\phi) \cdot \dot{\phi} \rightarrow F_R(\phi) \cdot R \cos \phi \cdot \dot{\phi} = M_R^*(\phi) \cdot \dot{\phi}$$



$$\underline{M_R^*(\phi) = F_R(\phi) \cdot R \cdot \cos \phi}$$

Para el cálculo de la potencia, en voltantes, siempre adoptaremos la expresión:

$$\int_0^{2\pi} M^*(\varphi) d\varphi = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sabemos que el momento reducido total será} \\ \text{dado por la expresión:} \end{array} \right\}$$

$$M^*(\varphi) = M_{\text{motor}}^*(\varphi) - M_R^*(\varphi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Momento reducido de} \\ \text{la fra. resistente.} \end{array} \right\}$$

Reducirlos \equiv llevarlos al eje del motor. El $M_{\text{motor}}^*(\varphi)$ ya está aplicado en el eje del motor. Nos dicen que es constante.

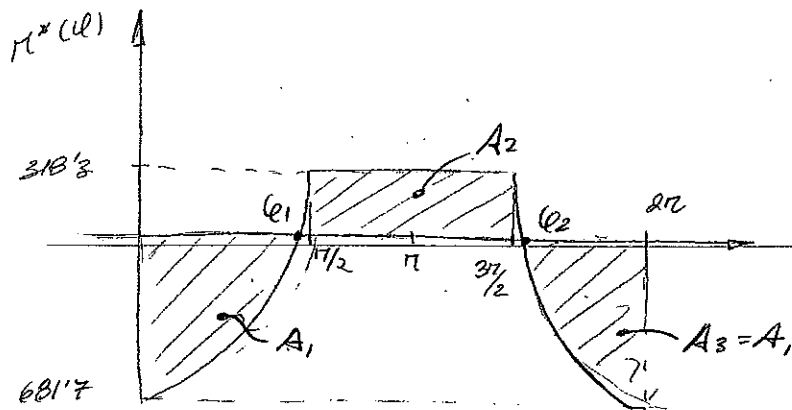
$$\int_0^{2\pi} M_{\text{motor}}^*(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} M_R^*(\varphi) d\varphi \rightarrow M_{\text{motor}}^*(\varphi) \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^{2\pi} M_R^*(\varphi) d\varphi$$

$$2\pi \cdot M_{\text{m}} = 2 \int_0^{\pi/2} F \cdot R \cos \varphi d\varphi = 2 \cdot 5000 \cdot 0.2 \cdot [\sin \varphi]_0^{\pi/2}$$

$$M_{\text{m}} = \frac{1000}{\pi} = 318.3 \text{ Nm}$$

$$Pot = M_{\text{m}} \cdot \omega_a = 318.3 \cdot \frac{2\pi \cdot 500}{60} = \underline{\underline{16.66 \text{ kW}}}$$

1) No podemos representar el $M^*(\varphi)$ o momento reducido en las poleas. Este será dado por: $M^*(\varphi) = M_{\text{motor}}^*(\varphi) - M_R^*(\varphi)$



$$\varphi_1 = 1.24 \text{ rad} \quad \varphi_2 = 5.04 \text{ rad} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1000 \cos \varphi = 318.3 \end{array} \right.$$

$$2A_1 + A_2 = 0 \quad ; \quad A_2 = -2A_1$$

$$A_1 = \int_0^{1.24} (-1000 \cos \varphi + 318.3) d\varphi = \underline{\underline{-551 \text{ Nm}}} \rightarrow \underline{\underline{A_2 = 1102 \text{ Nm}}}$$

- Desde 0 a φ_1 , el momento de la fuerza resistente es mayor que el momento del par motor. El sistema consumirá más potencia en este tramo de la que entra. En φ_1 habrá un $\omega_{\text{mín}}$ (relativo). En $\varphi_2 \rightarrow \omega_{\text{máx}}$ (relativo). Si continuamos el ciclo infinitamente, los valores de $\omega_{\text{mín}}$ y $\omega_{\text{máx}}$ relativos se van repitiendo \Rightarrow serán $\omega_{\text{mín}}$ y $\omega_{\text{máx}}$ absolutos.

$$S_1 = A_1 = -551 \text{ Nm} = S_{\text{min}}$$

$$S_2 = A_1 + A_2 = 551 \text{ Nm} = S_{\text{max}}$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 0.$$

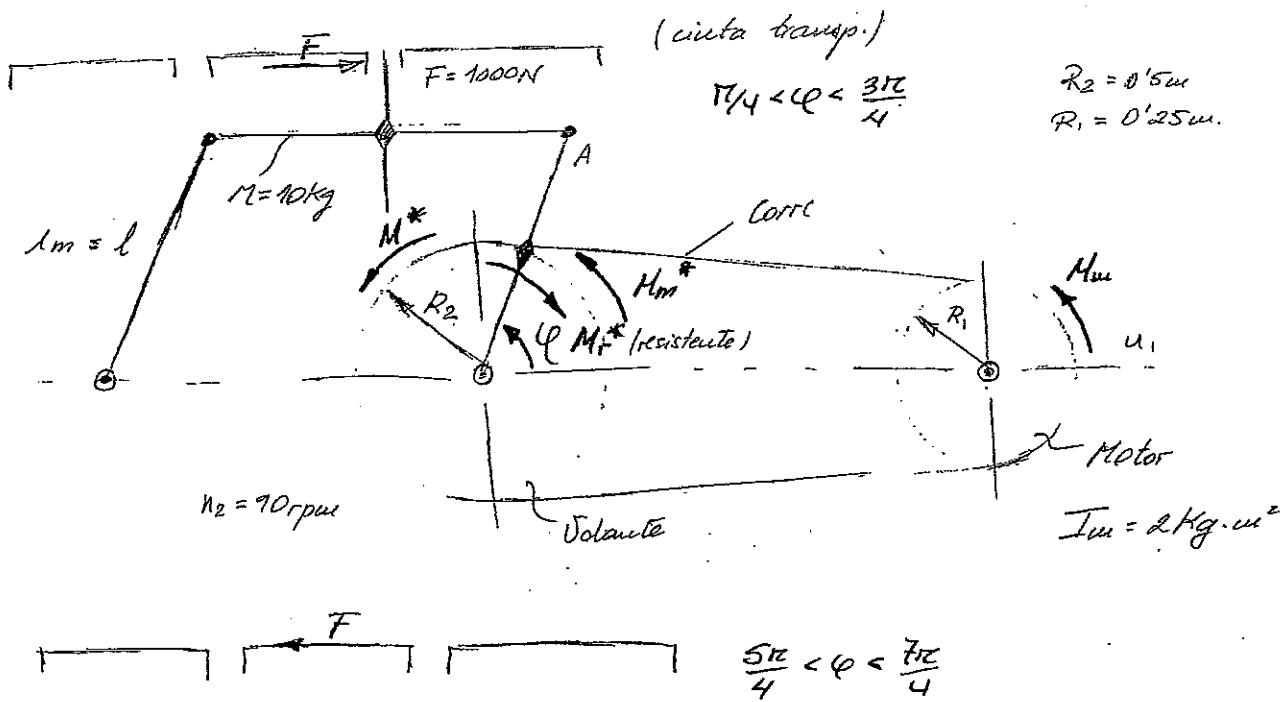
$$I_v = \frac{S_{\text{max}} - S_{\text{min}}}{E \omega_a^2} = \frac{1102}{0.01 \left(\frac{2\pi \cdot 500}{60} \right)^2} = 40.2 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{\text{real}} = I_v - I = \underline{\underline{39.2 \text{ Kg m}^2}}$$

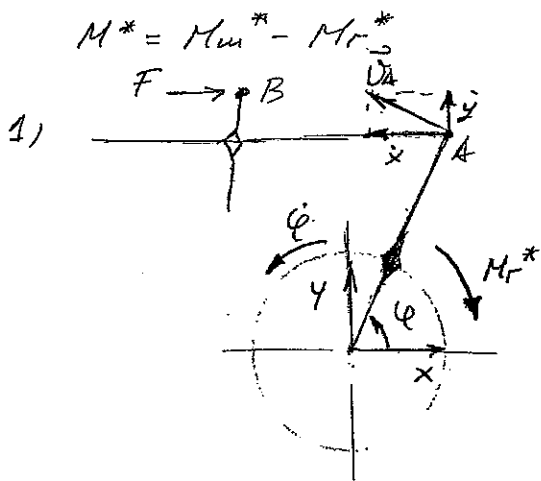
Podríamos haber utilizado los valores de ω_{max} y ω_{min} ABSOLUTOS y haber calculado I_v según:

$$S_{\text{max}} - S_{\text{min}} = A_1 + A_2 - A_1 = A_2 = \frac{1}{2} I_v (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2).$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100



Reduciendo el momento del motor y la fuerza resistente de la cinta al eje del volante, tenemos:



El acoplador del paralelogramo posee movimiento de traslación puro.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

Punto A

$$x = l \cos \varphi \rightarrow \dot{x} = -l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$y = l \sin \varphi \rightarrow \dot{y} = l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

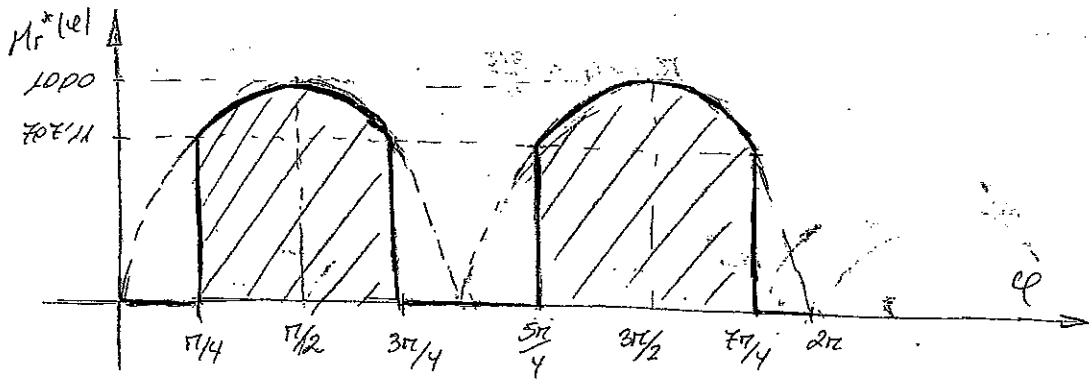
$$Pot = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = F \cdot \dot{x} = F(-l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})$$

$$Pot = (-M_r^*) \cdot \dot{\varphi}$$

$$F \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = M_r^* \cdot \dot{\varphi} \rightarrow M_r^*(\varphi) = 1000 \sin \varphi \text{ (Nm)} \quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$$

Caja abajo

$$-F \cdot \dot{x} = M_r^*(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \rightarrow M_r^*(\varphi) = 7000 \sin \varphi \text{ (Nm)} \quad \frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$$



2) Pot. motor? $\rightarrow M_{m} \Rightarrow I_{ot} = M_{m} \cdot \omega_m = M_{m} \cdot \frac{2\pi n_1}{60}$

Para hallar M_m , sabemos que nuestro mecanismo trabaja en régimen. Por ello, podemos decir que:

$$\int_0^{2\pi} M^*(e) de = 0 ; \int_0^{2\pi} M_{m}^* de = \int_0^{2\pi} M_r^*(e) de$$

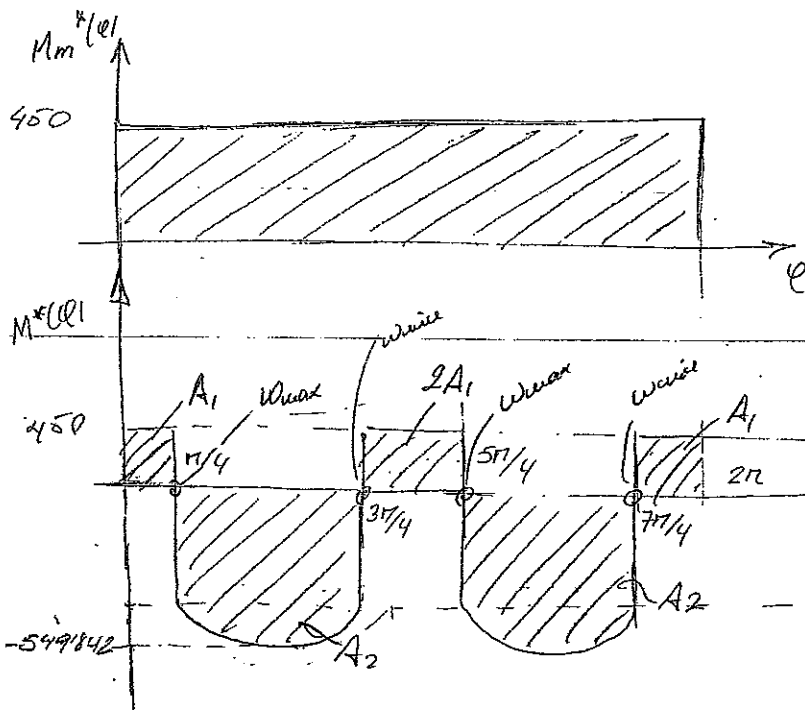
$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \rightarrow \omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 2\omega_2 \rightarrow n_1 = 2n_2$$

$$I_{ot} = M_m \left(\frac{2\pi \cdot 90}{60} \right) = M_m^* \cdot \omega_2 ; M_m \cdot \omega_1 = M_{m}^* \cdot \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

$$M_m^* = M_m \cdot \frac{R_2}{R_1} = 2M_m$$

$$\int_0^{2\pi} M^*(e) de = 0 ; 2M_m \cdot 2\pi = 2 \cdot \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 1000 \sin e de \rightarrow M_m = \underline{\underline{225'079 \text{ N}\cdot\text{m}}}$$

$$I_{ot_{motor}} = M_m \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 90}{60} \right) \cdot 2 = \underline{\underline{4242'64 \text{ W} = 5'77 \text{ CV}}}$$



$$M^* = M_{m}^* - M_r^*$$

$$\int_0^{2\pi} M^*(\varphi) = 0 \rightarrow A_1 - A_2 + 2A_1 - A_2 + A_1 = 0 ; 4A_1 = 2A_2 \rightarrow A_2 = 2A_1$$

$$A_1 = 450; 10 \cdot \pi/4 ; A_2 = 450 \cdot 10 \cdot \pi/2$$

$$S_1 = A_1 = S_{uax}$$

$$S_2 = -A_1 = S_{uiu}$$

$$S_3 = A_1 = S_{uax}$$

$$S_4 = -A_1 = S_{uiu}$$

$$S_5 = 0$$

$\Rightarrow I = 79'6 \text{ kgm}^2$. No es la inercia del volante. Hallar I_{propia} .

$$I_{vol} = 79'6 - I_{propia}$$

Tengo 3 elementos con inercia. El volante, el motor y el paralelogramo. Debo reducirlos al eje del volante, para restarlos. Energías cinéticas.

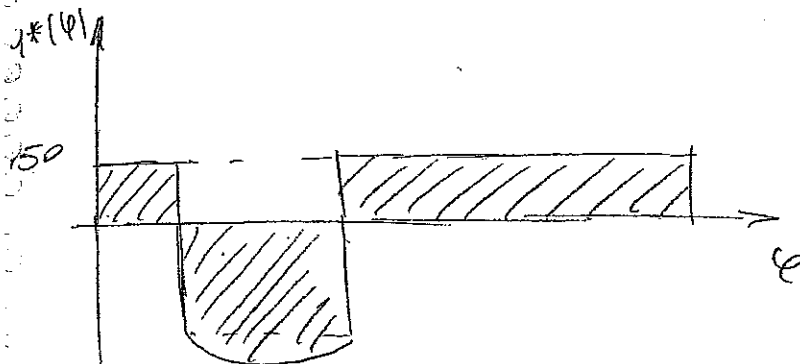
$$\frac{1}{2} I_{prop} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_{motor} \cdot (2\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2 \Rightarrow I_{prop} = 10 \text{ kgm}^2$$

- El volante gira con una el. angular = $\dot{\varphi}$. El radio del motor es la mitad. Girará el doble de rápido, a $2\dot{\varphi}$.

$$I_v = 69'6 \text{ kgm}^2$$

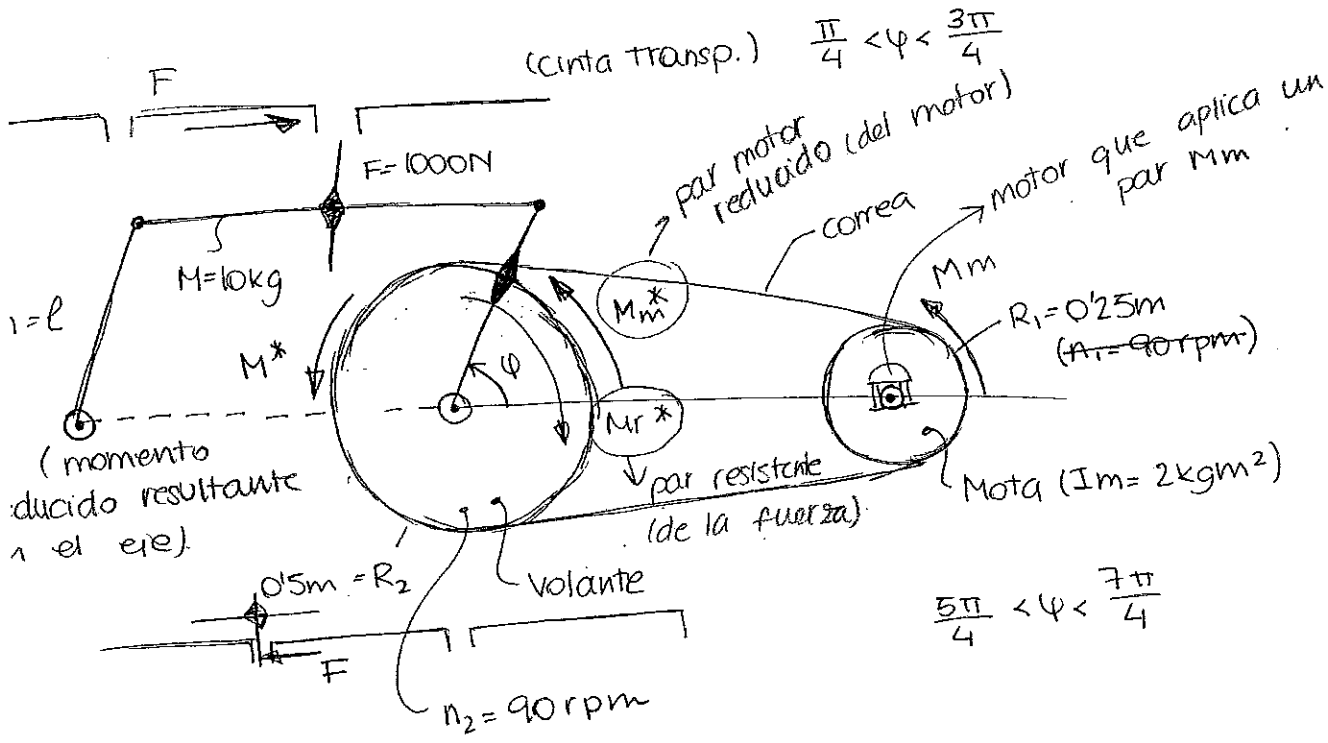
* la pestaña se rompe en $\varphi = 3\pi/4$. Velocidad en $\dot{\varphi} = 2\pi$?

Cuando la pestaña se ha roto, a partir de $\varphi = 3\pi/4$ no existirá fuerza resistente a vencer. El sistema rotará sometido al mismo par motor. Se evaluará.

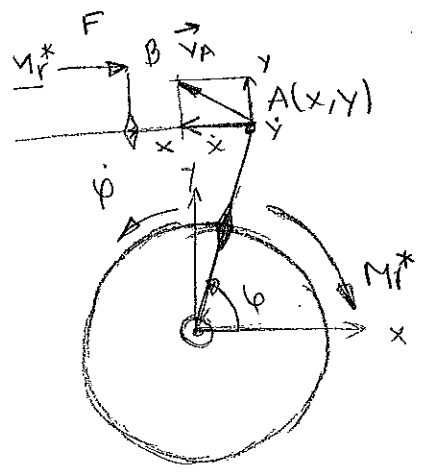


$$\dot{\varphi}(2\pi) = 106'58 \text{ rpm}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

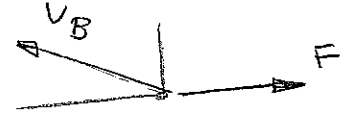


$I^* = M_m^* - M_r^*$



$\vec{v}_B = \vec{v}_A$

$x = 1 \cdot \cos \varphi$
 $y = 1 \cdot \sin \varphi$
 $\dot{x} = -1 \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$
 $\dot{y} = 1 \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$



$Pot = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = F \cdot \dot{x} = F(-1 \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) = -F \cdot 1 \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$

$Pot = (-M_r^*) \cdot \dot{\varphi}$

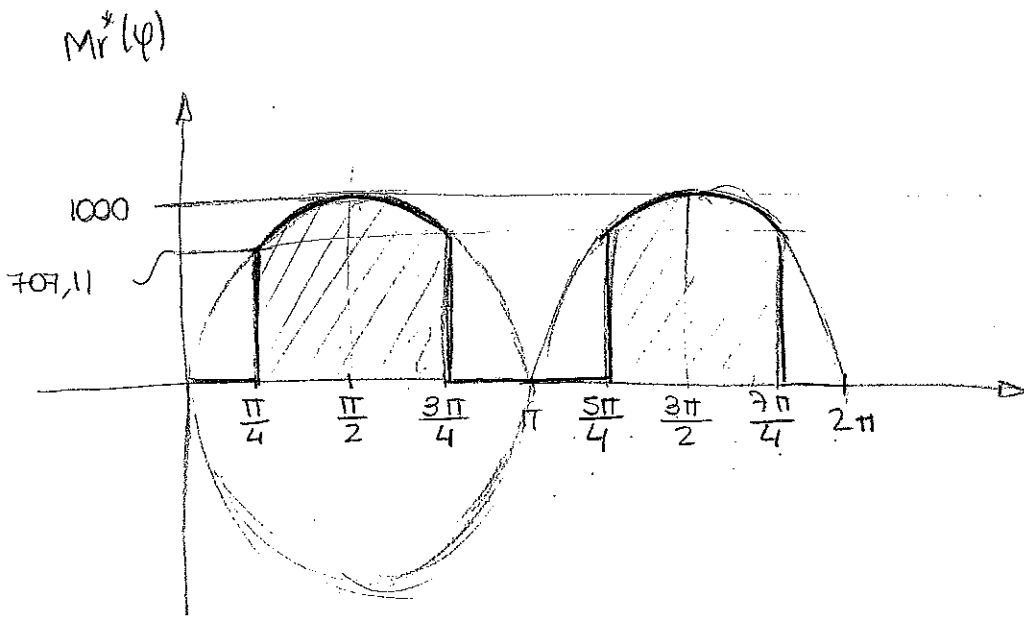
$F \cdot 1 \cdot \sin \varphi = M_r^*(\varphi)$

$M_r^*(\varphi) = 1000 \cdot \sin \varphi \text{ (Nm)}$

$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$

$-F \cdot \dot{x} = M_r^*(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \rightarrow M_r^*(\varphi) = -1000 \cdot \sin \varphi \text{ (Nm)}$

$\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$



2) Pot. Motor M_m ?

$$Pot = M_m \omega_m = \underbrace{(M_m)}_{\text{circled}} \frac{2\pi n}{60} ; \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} ; \omega_1 = \frac{\omega_2 R_2}{R_1} = 2\omega_2$$

$$n_1 = 2n_2^{(*)} 2$$

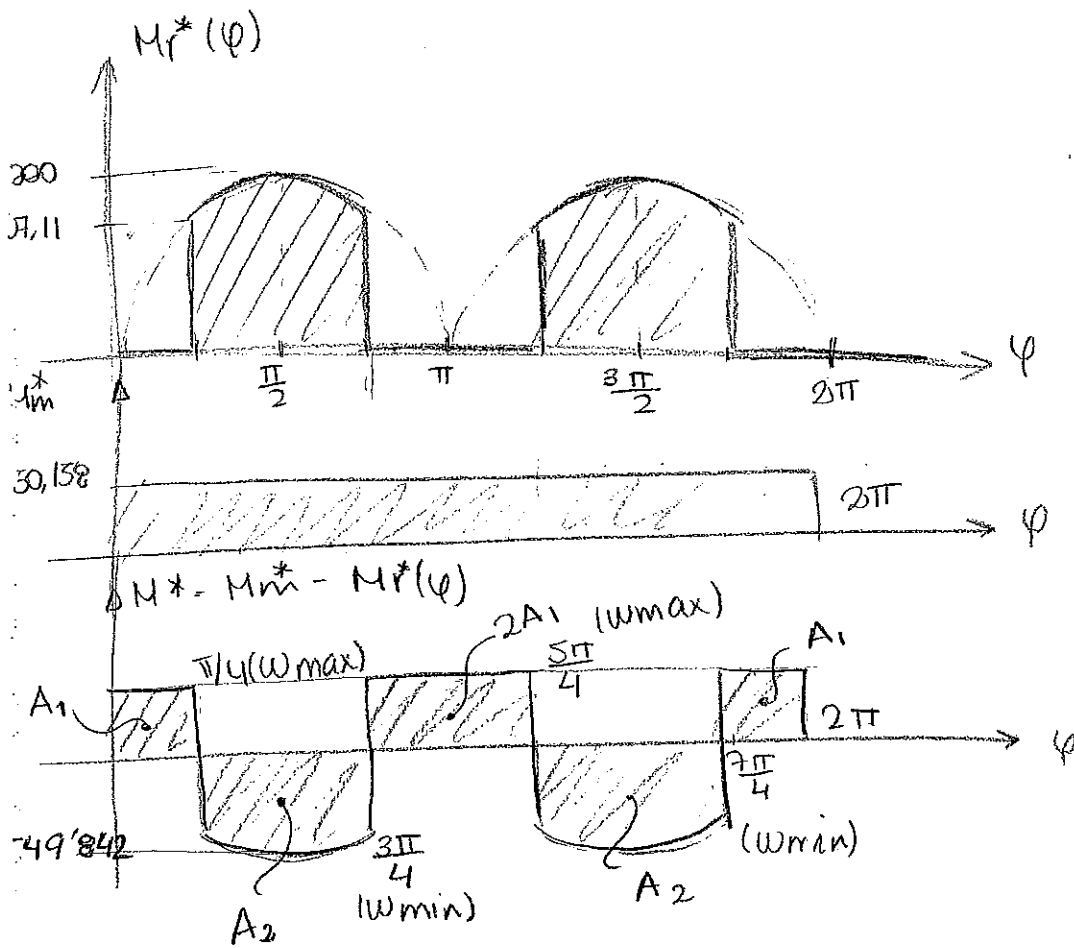
$$\int_0^{2\pi} M^*(\varphi) d\varphi = Q \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} M_m^* d\varphi}_{\text{circled}} = \int_0^{2\pi} M_r^*(\varphi) d\varphi \quad (*)_1$$

$$Pot = M_m \underbrace{\left(\frac{2\pi \cdot 90}{60} \right)}_{\omega_1} = M_m^* \cdot \omega_2 ; M_m \cdot \omega_1 = M_m^* \cdot \frac{\omega_1 R_1}{R_2}$$

$$M_m^* = M_m \cdot \frac{R_2}{R_1} = 2M_m$$

$$(*)_1 \left\{ 2M_m \cdot 2\pi = 2 \cdot \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 1000 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \right\} \Rightarrow M_m = 225'079 \text{ Nm}$$

$$\boxed{Pot = 225'079 \text{ Nm} \cdot \underbrace{\frac{2\pi \cdot 90 \cdot 2}{60}}_{\omega_1}^{(*)_2} = 4242,64 \text{ W} = 5,77 \text{ CV}}$$



$-M_r^*(\varphi)$

$\int_0^{2\pi} M^*(\varphi) = 0 \Rightarrow A_1 - A_2 + 2A_2 - A_2 + A_1 = 0; \Rightarrow 4A_1 - 2A_2 = 0; \boxed{A_2 = 2A_1}$

$I_V =$

$A_1 = 450'18 \cdot \frac{\pi}{4}$

$A_2 = 2 \cdot A_1 = 450'18 \cdot \frac{\pi}{2}$

- $S_1 = A_1 = S_{\max}$
- $S_2 = -A_1 = S_{\min}$
- $S_3 = A_1 = S_{\max}$
- $S_4 = -A_1 = S_{\min}$
- $S_5 = 0$

Aplicando la fórmula.

$\boxed{I = 79'6 \text{ kgm}^2}$

(No es la del volante porque el sistema tiene inercia propia)

I_P

$I_V = 79'6 - I_P$

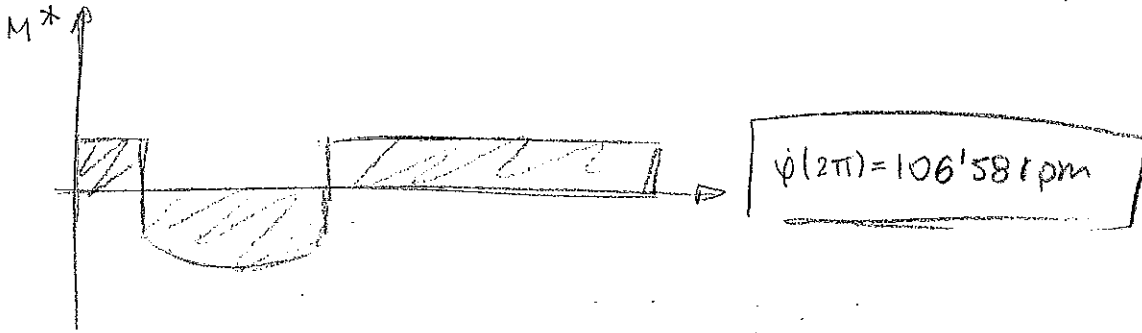
\rightarrow inercia de un disco \rightarrow inercia de la barra.

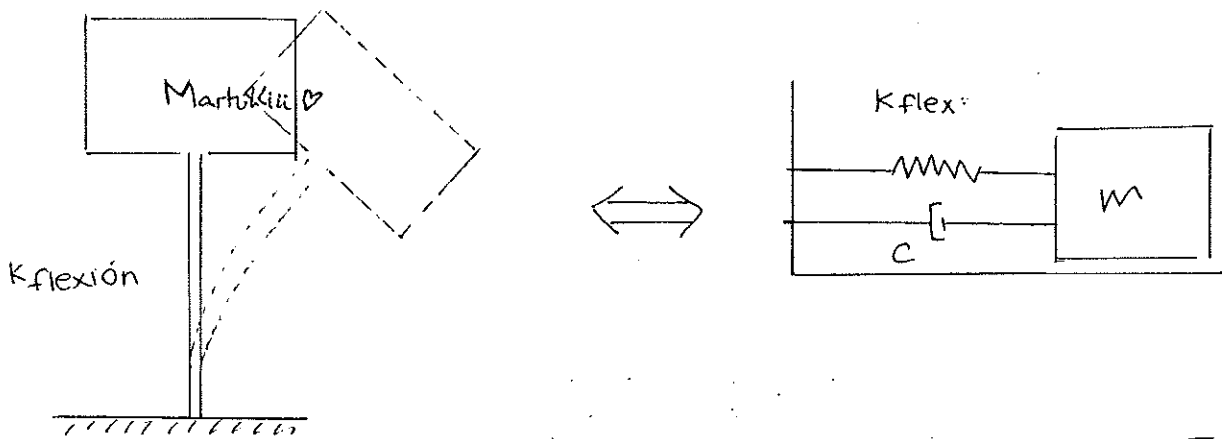
$\frac{1}{2} I_P \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_m (2\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} M (\dot{\varphi} \cdot r)^2$

$\boxed{I_P = 18 \text{ kgm}^2} \quad \boxed{I_V = 61'6 \text{ kg m}^2}$

$\psi(2\pi)$?

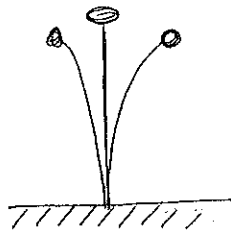
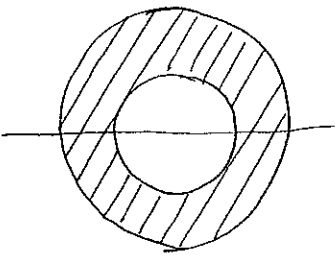
se ha roto la pestaña en $\frac{3\pi}{4}$





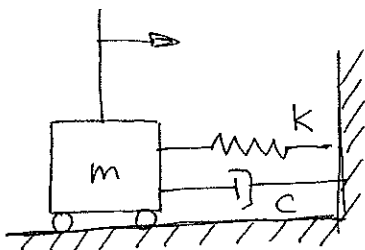
En la frecuencia natural no interviene el amortiguamiento: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 $\omega_p = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$

$K_{flex} = \frac{3EI}{L^3}$ (Nos lo sabemos?)



$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \cdot x^2 + E \cdot C$ (soporte vibrando)

Ejercicio 2 (Resuelto).



V.L con amortig $\left\{ \begin{array}{l} \xi > 1 \\ \text{superc: } x(t) \\ \text{crit: } \xi = 1 \\ \text{subcrit: } \xi < 1 \end{array} \right.$

$x(0) = 0$
 $\dot{x}(0) = v$

$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2m\omega} = 2.02 > 1$: supercritico.

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{vamos a las ec. de régimen supercrítico}).$$

$$\begin{cases} C_1 \rightarrow (\dots) \\ C_2 \rightarrow (\dots) \end{cases}$$

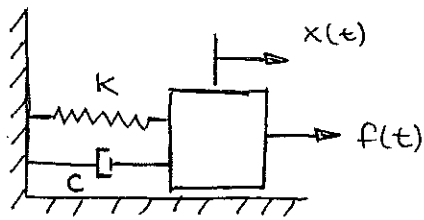
$$\dot{x}(t) = 0.$$

$$C_1 \cdot (-\xi\omega + \bar{\omega}) e^{(-\xi\omega + \bar{\omega})t} + C_2 \cdot (-\xi\omega - \bar{\omega}) e^{(-\xi\omega - \bar{\omega})t} = 0.$$

⊗ La única incógnita de la ecuación: (t)

(...)

RTA. EXACTA ARMÓNICA (Libro: p. 201).



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

frec. exacta.
 $f_0 \cdot \cos \bar{\omega} t$
 $f_0 \cdot \sin \bar{\omega} t$

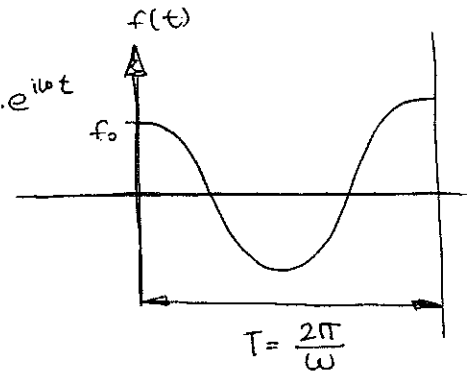
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$f(t) = f_0 \cdot \cos \bar{\omega} t + i f_0 \cdot \sin(\bar{\omega} t) = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega} t}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

ξ $\left\{ \begin{array}{l} \text{superc. } \xi > 1 \\ \text{crit } \xi = 1 \\ \text{subcrit } \xi < 1 \end{array} \right.$



$$x_p(t) = A e^{i\bar{\omega} t} \rightarrow \dot{x}; \ddot{x}$$

$$-m\bar{\omega}^2 A e^{i\bar{\omega} t} + c \cdot i\bar{\omega} A e^{i\bar{\omega} t} + k \cdot A e^{i\bar{\omega} t} = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega} t}$$

$$(-m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} + k) \cdot A = f_0$$

$$A = \frac{f_0/k}{\frac{-m\bar{\omega}^2}{k} + \frac{ic\bar{\omega}}{k} + \frac{k}{k}} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2 + 2\xi i \frac{\bar{\omega}}{\omega}}$$

$f(t) = f_0 \cdot e^{i\bar{\omega} t} \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$

$\omega^2 \leftarrow \frac{k}{m}$
 $\frac{c}{m} = 2\xi \omega$
 $\frac{c}{m} \cdot \frac{km\omega}{k} \cdot \bar{\omega} = 2\xi \omega$
 $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\left\{ A = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i \cdot 2\xi \beta} \right\}$$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

2.346:4

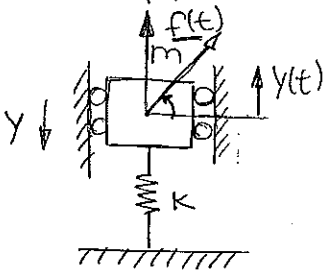
$$100 \text{ kg} = m$$

$$\text{deseq. } 0.04 \text{ kg} \cdot m$$

$$\delta = 4 \text{ mm} \rightarrow mg = k \cdot \delta$$

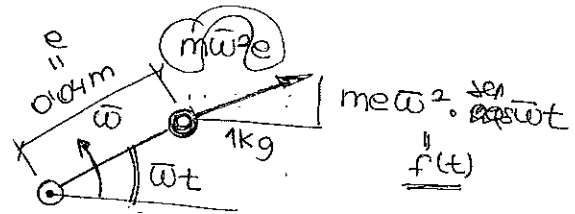
$$k = \frac{mg}{\delta}$$

a) 1500 rpm



$$\bar{\omega} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

 $(\xi=0)$


● No nos dicen nada del amortiguamiento: suponemos nulo.

● No nos dicen nada de gravedad. ($p=mg$) está f

$$m\ddot{x} + kx = m e \bar{\omega}^2 \cos \omega t$$

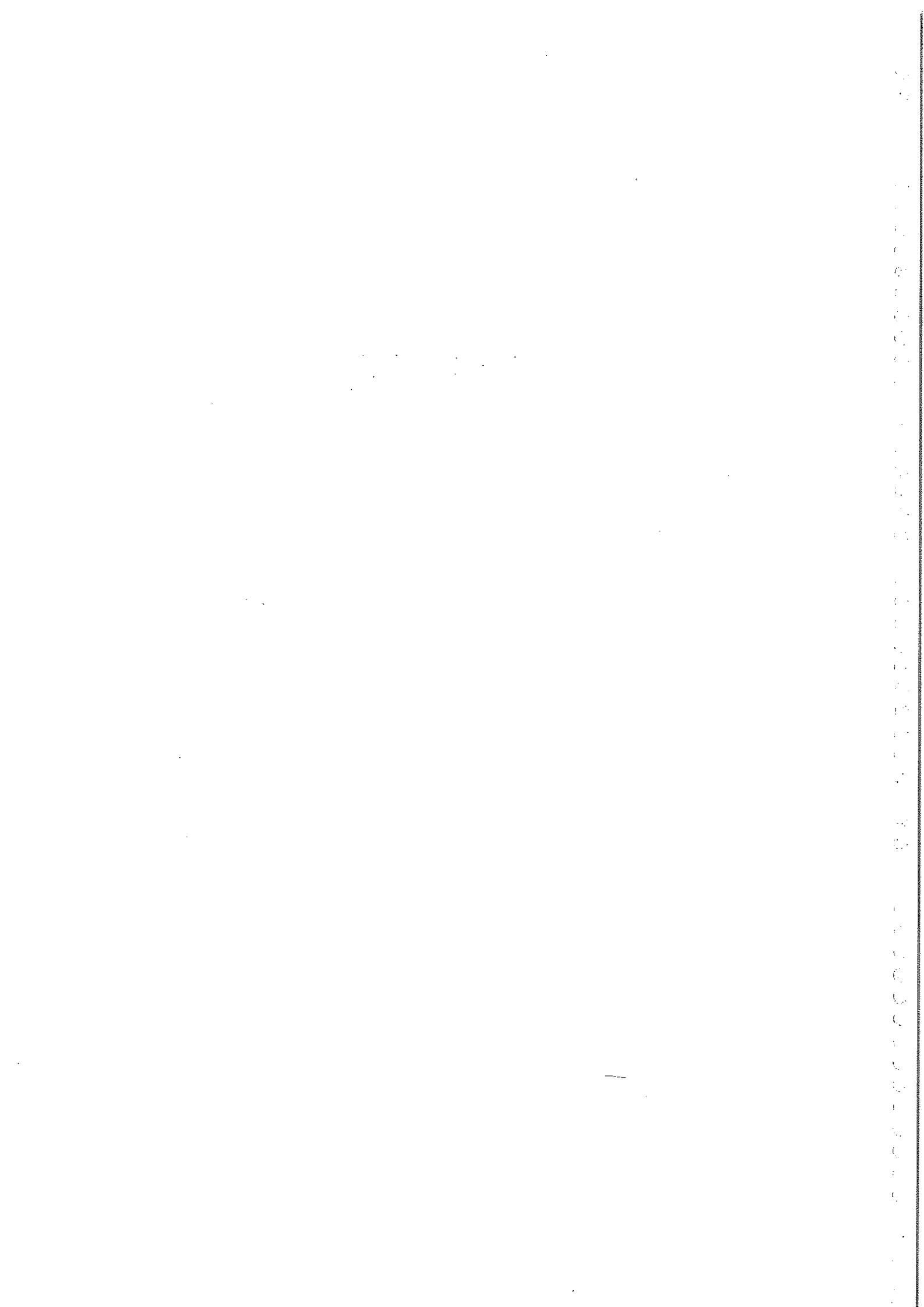
$$\hookrightarrow x(t) = \frac{m e \bar{\omega}^2}{k} \cdot D \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x(t) = \frac{m \cdot e \bar{\omega}^2}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{tg } \varphi = 0}}$$

$$\bar{x} = 4.45 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$F = 111.27 \text{ N}$$



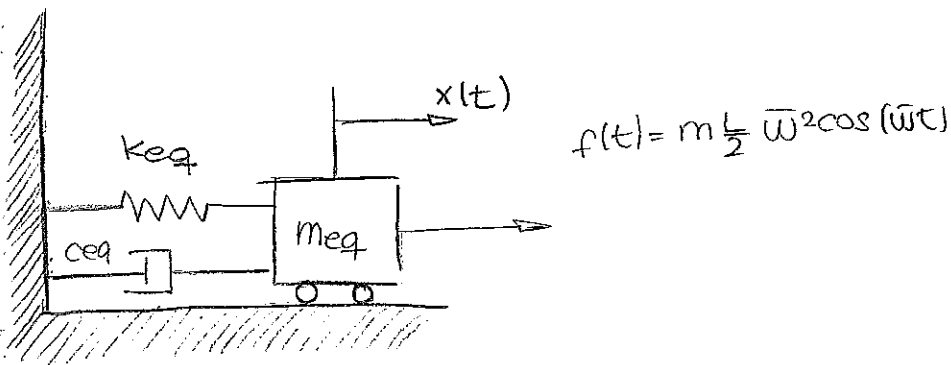
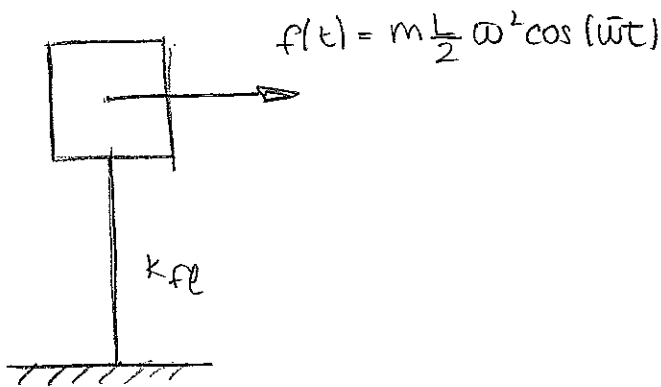
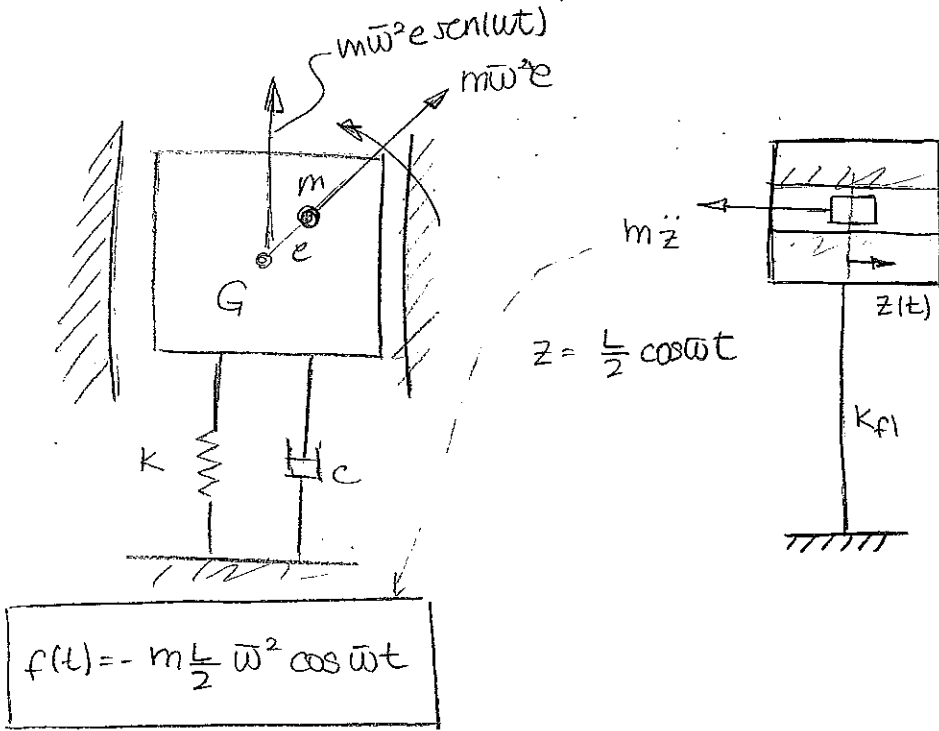
P.348 - (10)

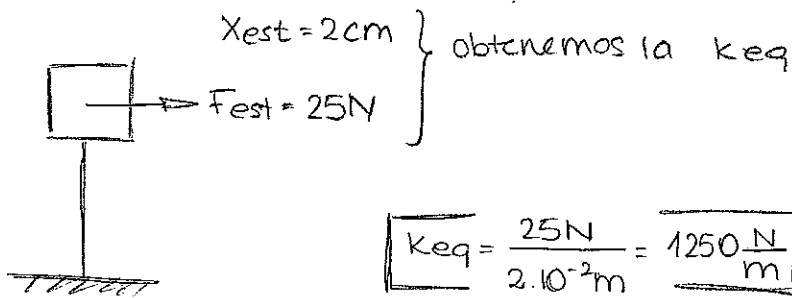
$$z(t) = \frac{L}{2} \cdot \cos(\bar{\omega}t)$$

$$L = 1\text{m}$$

$$m = 0.2\text{kg}$$

Δ fuerza de inercia: vibraciones en el plotter.





A partir de la figura 3... \rightarrow obtenemos el amortiguamiento

ciclo $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\text{cm} \\ x_2 = 1.6\text{cm} \\ x_3 = 1.3\text{cm} \end{array} \right. \left| \right. T_D = \frac{\pi}{2}$

@ Método del elemento logarítmico.

$$L \frac{x_1}{x_2} = \delta = 0.223$$

$$\xi_{eq} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} = \frac{0.223}{\sqrt{0.223^2 + (2\pi)^2}} = \boxed{0.035}$$

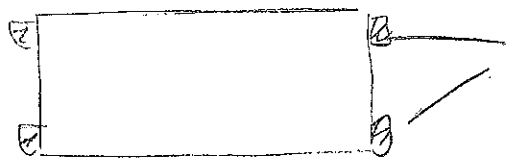
$\leftarrow 1 \text{ ciclo}$

(Lo hacemos con $L \frac{x_2}{x_3}$ y $L \frac{x_1}{x_3}$: así obtenemos 3 valores y hacemos media)

$$\omega = \frac{\sqrt{k_{eq}}}{\sqrt{m_{eq}}} \Rightarrow \boxed{m_{eq} = \frac{k_{eq}}{\omega^2} = 78.03\text{kg}}$$

$$T_D = \frac{\pi}{2}$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi_{eq}^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 4.0025 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



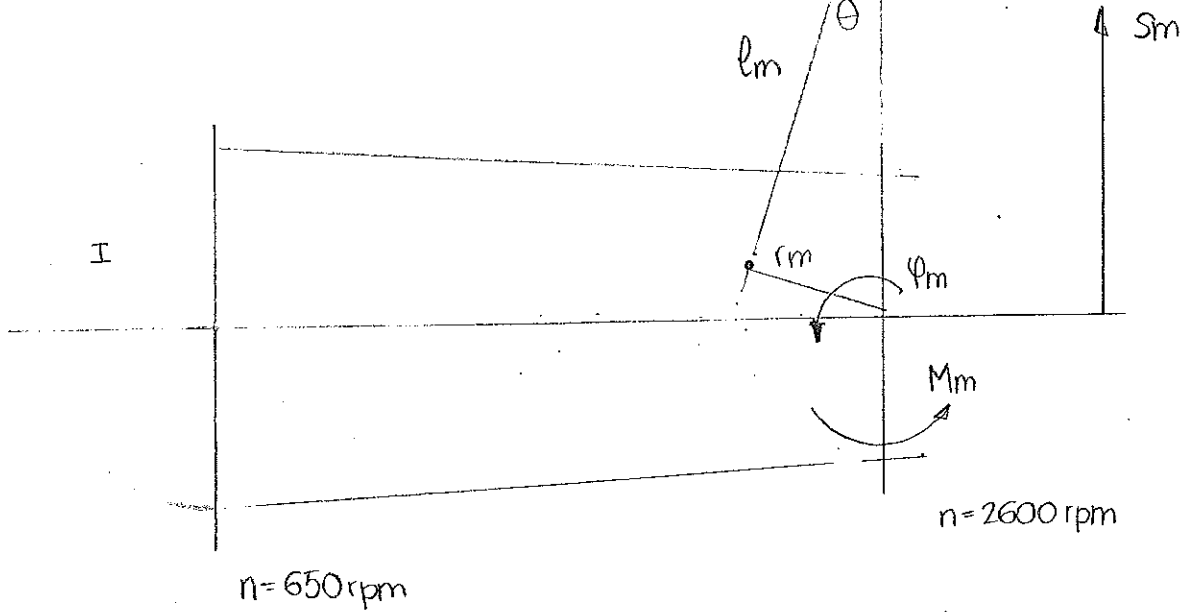
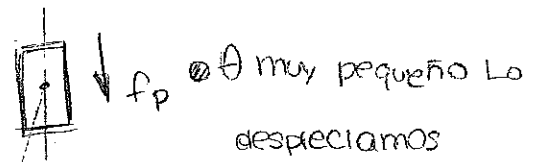
ACELERÓMETRO

lo colocamos ahí porque mide la aceleración en la dirección \perp a la superficie

Seminario Mecanismos. (27.03.2015)

1

Motor 4 tiempos: $Pot_n = 2.6 \text{ kW}$



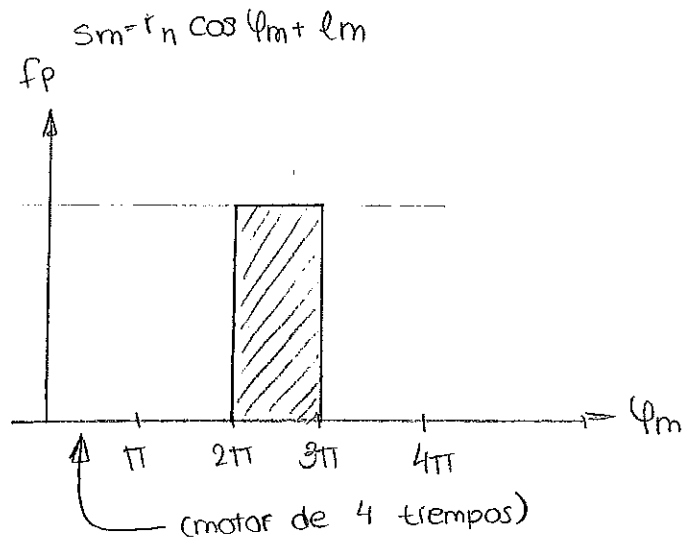
Necesitamos del volante de inercia:

- M (par motor)
- M_r (nos dicen = M)

Ecuación que tenemos:

$$\int_0^{2\pi} M^* dt = 0$$

$\hookrightarrow M - M_r$

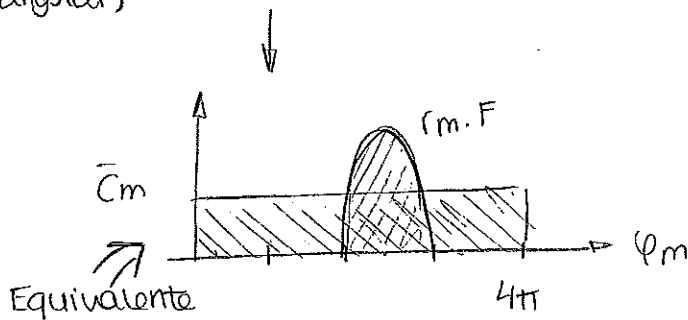


Buscamos el par motor:

$$\underbrace{-f_p \cdot \dot{s}_m}_{\text{pot. entrada (fuerza} \times \text{veloc.)}} = \underbrace{M_m \cdot \dot{\phi}_m}_{\text{pot. salida (momento} \times \text{vel angular)}}$$

$$\implies M_m = -f_p \left(\frac{ds_m}{d\phi_m} \right) = -r_m \cdot \text{sen}(\phi_m)$$

$$M_m = f_p \cdot r_m \cdot \text{sen}(\phi_m)$$



→ par medio

$$Pot_m = \bar{C}_m \cdot \frac{2600 \cdot 2\pi}{60} \Rightarrow \boxed{\bar{C}_m = \frac{30}{\pi}}$$

$$\int_0^{4\pi} F \cdot r_n \cdot \sin \varphi_n \cdot d\varphi = \bar{C}_n \cdot 4\pi \Rightarrow \boxed{F = 1500 \text{ N}}$$

la pot. del momento con el motor de 4 tiempos
 la pot con el par medio

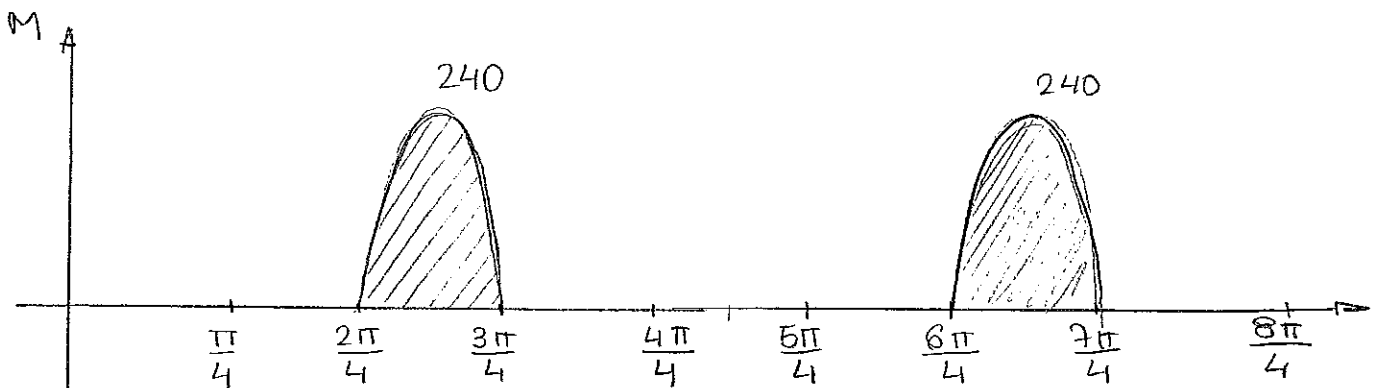
$$r_m \cdot \dot{\varphi}_m = R \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{la vel. en el extremo del disco igual})$$

$$R = r_m \cdot \frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{\varphi}} = 4r_m$$

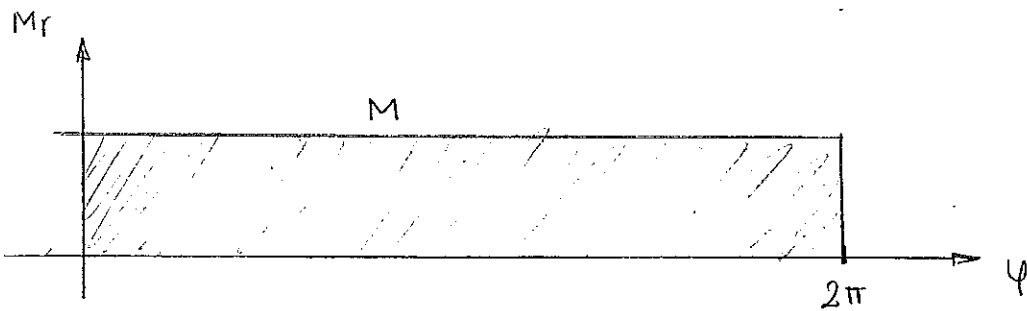
$\varphi_m = 4 \cdot \varphi$ ∴ por cada vuelta del pequeño el grande da un cuarto de vuelta.

$$M_m \dot{\varphi}_m = M \cdot \dot{\varphi} \quad \boxed{M = 4M_m}$$

$$M = 4 \cdot F \cdot r_n \cdot \sin \varphi_m = \frac{4F \cdot r_n \cdot \sin(4\varphi)}{60 \cdot 4} = \frac{240 \cdot \sin(4\varphi)}{240 \cdot \sin(4\varphi)}$$



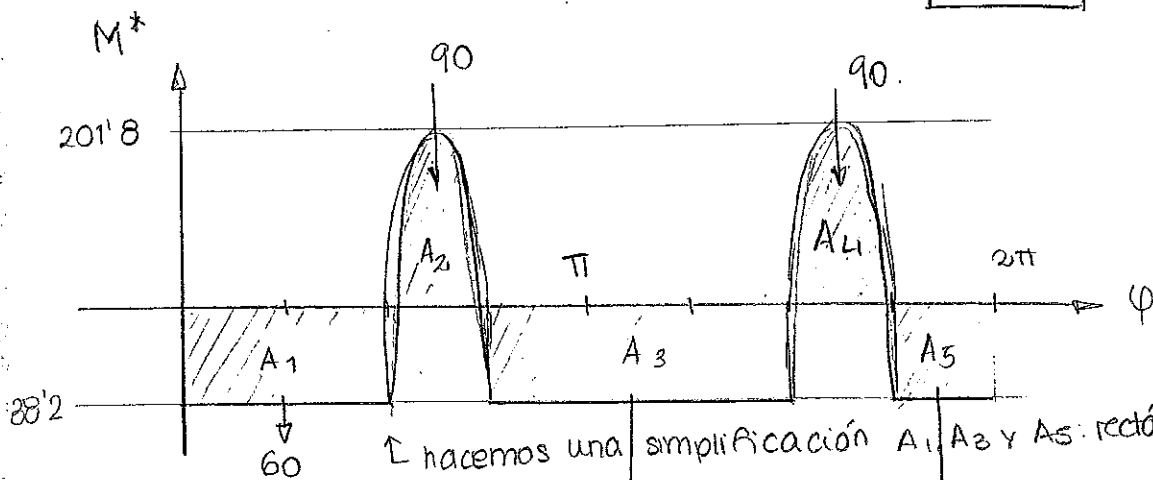
⚠ {Hay que hacerlo en un ciclo de 2π } ⚠



Para sacar el valor de M :

$$\left. \begin{aligned} M^* &= M - M_r \\ \int_0^{2\pi} M^*(\varphi) d\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 240 \cdot \sin(4\varphi) d\varphi = M \cdot 2\pi$$

$$M = 38'2$$



↑ hacemos una simplificación A_1, A_3 y A_5 : rectángulos.

$$\begin{cases} S_1 = A_1 = -60 \\ S_2 = A_1 + A_2 = +30 \\ S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = -60 \\ S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = +30 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

hallamos este: $A_1 = \frac{2}{3} A_3$
 $A_5 = \frac{1}{3} A_3$ } \Rightarrow sacamos A_2 y A_4

$$I = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{\epsilon \omega_r^2} = \frac{30 - (-60)}{0'05 \cdot \left(\frac{650 \cdot 2\pi}{60}\right)^2} = 0'388 \text{ kgm}^2$$

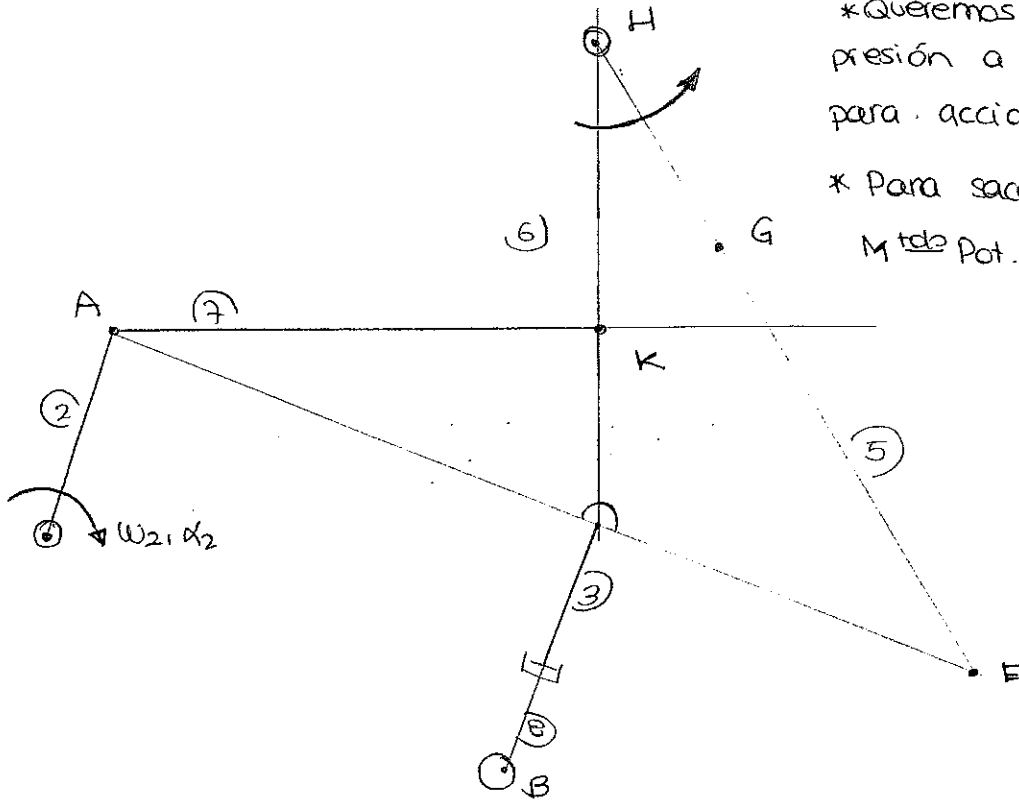
grado de irregularidad \rightarrow en el eje del volante de inercia.

DISCO: $I = \frac{MR^2}{2}$
 ARO: $I = MR^2$

$R = 20\text{cm}$: $M = 19'4\text{kg}$ (sin la simplificación 19'7kg)

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

2. D'Alembert

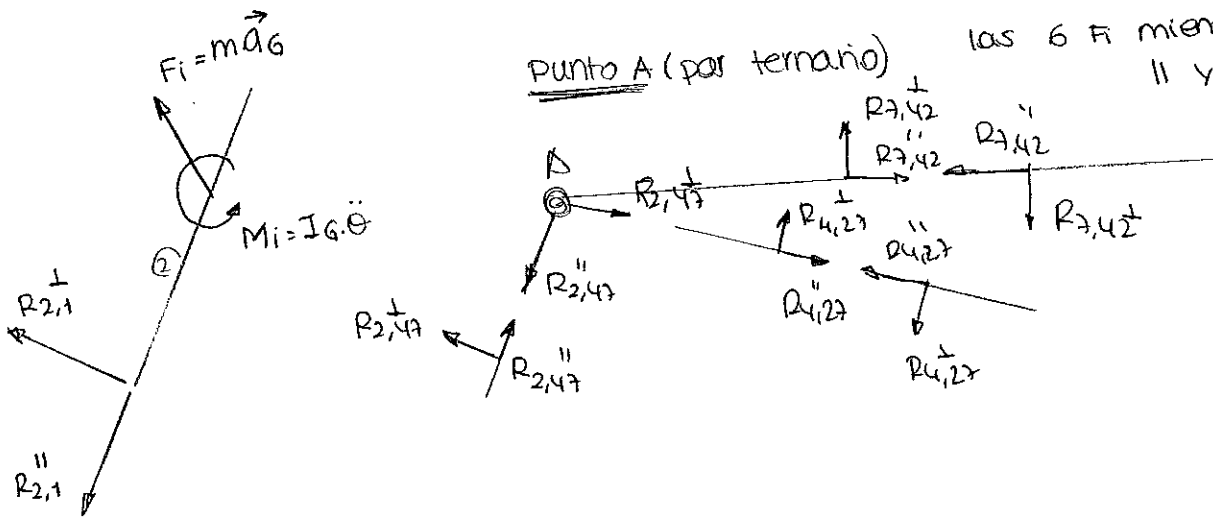


* Queremos obtener la presión a ejercer en el pistón para accionar el mecanismo (P_p)
 * Para sacarlo con el ordenador: M ^{total} Pot. virtuales.

⊙ M^{TD} POT. VIRTUALES: $p.s. \cdot \vec{v} + T_s \cdot \vec{\omega}_s + \sum_{i=2}^r (F_i^c \cdot v_i^i + M_i^i \cdot \omega_i) = 0$.

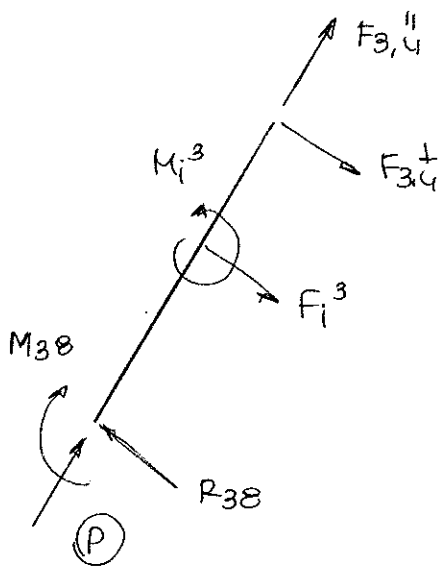
⊙ M^{TD} D'ALEMBERT: Diagramas de sólido libre.

* vale con sacar 2 de las 6 F mientras sean \parallel y \perp .



En el nudo A $\vec{R}_{2,4} + \vec{R}_{4,2} + \vec{R}_{7,4} = 0$ (2. ec escalares)

Para calcular la fza en el pistón debemos saber que es una fza interna.
 Calculamos por inercias y sólidos libres las fuerzas en 3 y en 8. Después, como en resis cortamos por la sección del émbolo para saber su fza.

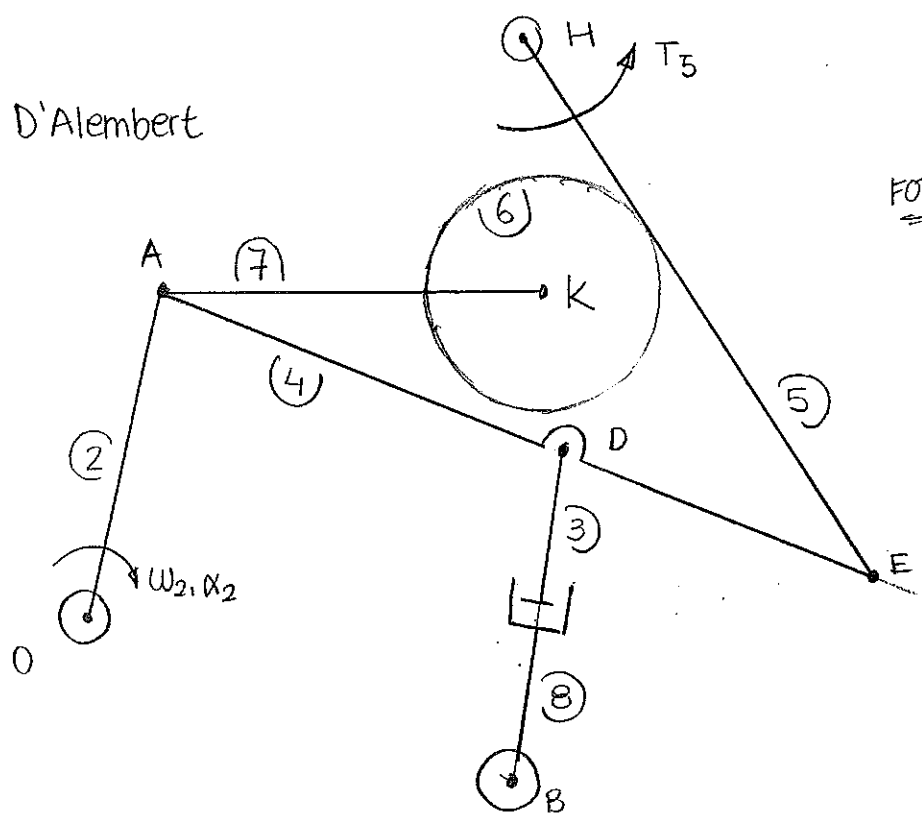


Haciendo el equilibrio de esta sección
podremos calcular \textcircled{P}

*En los puntos A,E con sacar dos vectores
de la reacción total nos vale para saber
Ptot. nos da igual que estén expresados en
dif. sistema de referencia.

2) D'Alembert

FOTOKOPIATU

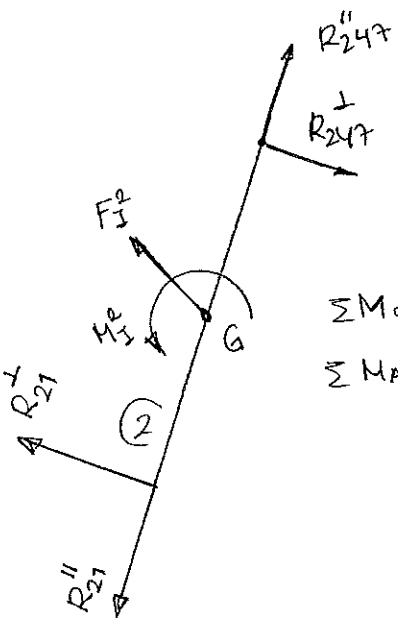


presión del pistón (fuerza por superficie)

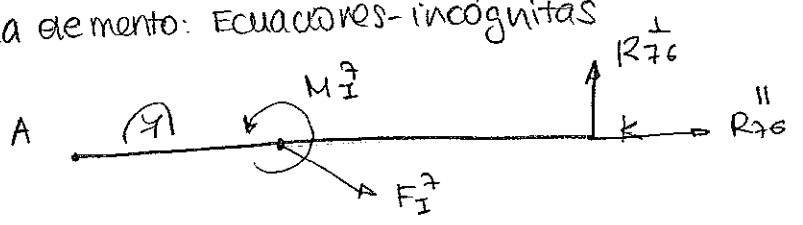
⊙ Potencias virtuales : $\underbrace{p.s.}_{\vec{P}} \cdot \vec{V} + T_5 \cdot \dot{\alpha}_5 + \sum_{i=2}^8 \vec{F}_i^i \cdot \vec{V}_G^i + M_i^i \cdot \dot{\omega}_i = 0$
 (no calcula reacción)

⊙ D'ALEMBERT

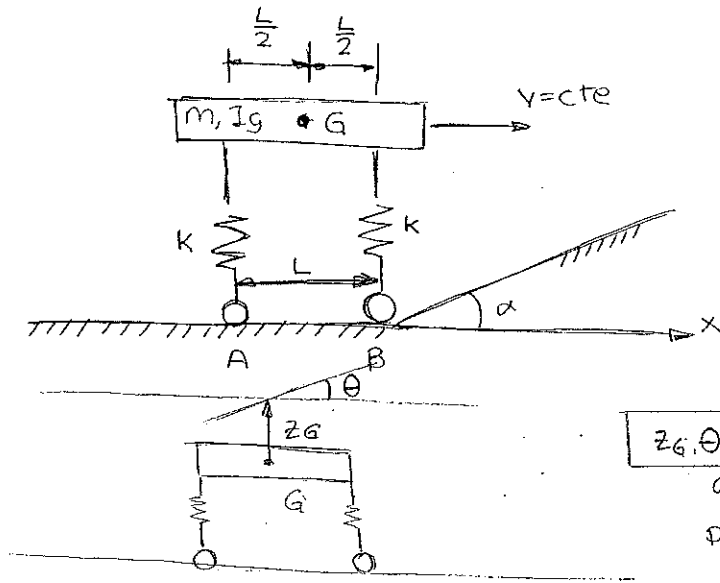
⊙ En cada elemento: Ecuaciones-incógnitas



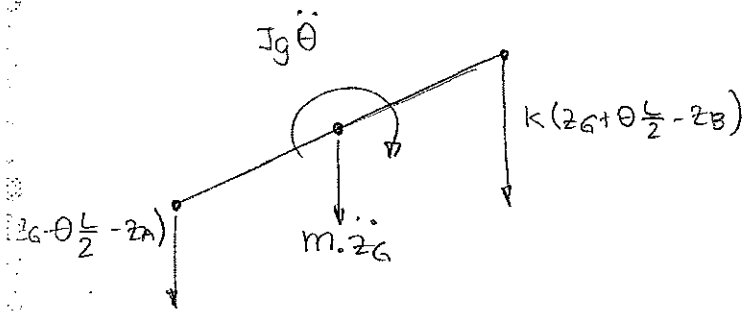
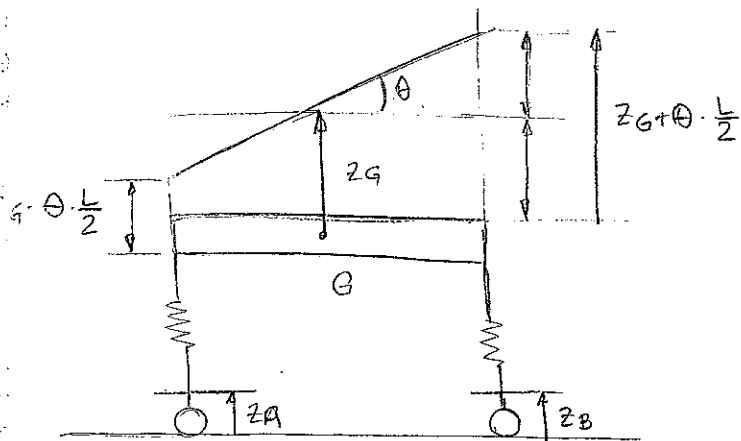
$\sum M_O = 0 : R_{24}^{\perp}$
 $\sum M_A = 0 : R_{21}^{\perp}$



$\bar{R}_{247} + \bar{R}_{274} + \bar{R}_{472} = 0$



z_G, θ grados de libertad \Rightarrow los más habituales, desplazamiento vertical y el giro de la plataforma.



D'Alembert

$$\sum F_V = 0$$

$$-k(z_G - \theta \frac{L}{2} - z_A) - k(z_G + \theta \frac{L}{2} - z_B) - m\ddot{z}_G = 0. \quad (1)$$

$$\sum M_G = 0.$$

$$k(z_G - \theta \frac{L}{2} - z_A) \cdot \frac{L}{2} - k(z_G + \theta \frac{L}{2} - z_B) \cdot \frac{L}{2} - I_G \ddot{\theta} = 0 \quad (2)$$

$$(1) m \ddot{z}_G + 2kz_G = k(z_A + z_B) \quad (1^{\text{a}} \text{ pregunta})$$

$$(2) I_G \ddot{\theta} + k \frac{\ell^2}{2} \theta = \frac{kL}{2} (z_B - z_A)$$

• Frec naturales anulamos el amortiguamiento y las fuerzas

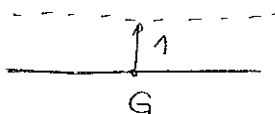
$$\left. \begin{aligned} m \ddot{z}_G + 2kz_G &= 0 \\ I_G \ddot{\theta} + k \frac{\ell^2}{2} \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{funcionan de forma independiente}$$

* como el sistema está descoplado no hay que hacer cambio a coordenadas naturales.

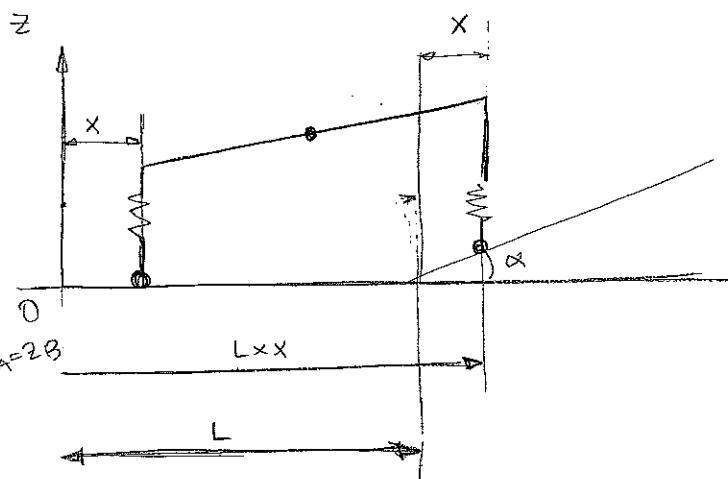
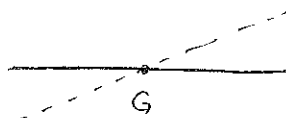
$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k\ell^2}{2I_G}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (2^{\text{a}} \text{ pregunta}) \\ \leftarrow \\ (P. 286) \end{array}$$

modos

1) ω_1
(1, 0)



2) ω_2
(0, 1)



$$v = \frac{x}{t}; x = vt$$

$$\tan \alpha \approx \alpha$$

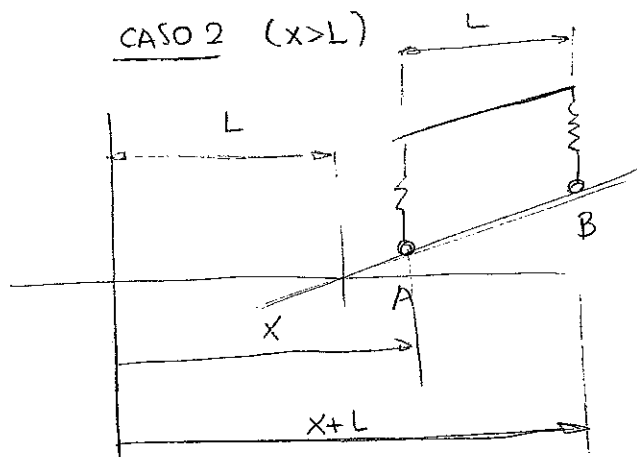
CASO 1 ($0 \leq x \leq L$)

$$z_A = 0$$

$$z_B = x \tan \alpha \approx \alpha x \Rightarrow$$

$$z_B = \alpha \cdot vt$$

CASO 2 ($x > L$)



$$z_A = \alpha(vt - L); z_B = \alpha vt$$

$$m \cdot \ddot{z}_G + 2kz = k \cdot \alpha vt$$

$$I_G \ddot{\theta} + k \cdot \frac{l^2}{2} \theta = k \cdot \frac{l}{2} \alpha vt$$

caso 1

$$z_G = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + z_p$$

$$z_p = \frac{k \cdot \alpha vt}{2k} = \frac{\alpha v}{2} \cdot t$$

$$\dot{z}_G = -A \cdot \omega_1 \cdot \sin \omega_1 t + B \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 t + \frac{\alpha v}{2}$$

$$t=0: x=0 \Rightarrow z_G(0)=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 + \frac{\alpha v}{2} \cdot 0 \Rightarrow A=0 \\ \dot{z}_G(0)=0 \end{array} \right.$$

$$0 = 0 + B \omega_1 \cdot 1 + \frac{\alpha v}{2} \Rightarrow B = -\frac{\alpha v}{2\omega_1}$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$z_G = -\frac{\alpha v}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{\alpha v}{2} t$$

$$\theta_G = \frac{\alpha v}{l} \left(t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right)$$

(*) Sacas las condiciones iniciales del 2 de la situación Anal del 1.

caso 1

$$x=L \Rightarrow vt=L \rightarrow t = \frac{L}{v}$$

$$z_G\left(\frac{L}{v}\right) = -\frac{\alpha v}{2\omega_1} \sin \omega_1 \frac{L}{v} + \frac{\alpha}{2} \cdot v \frac{L}{v}$$

$$\theta\left(\frac{L}{v}\right) = \frac{\alpha v}{l} \left(\frac{L}{v} - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \frac{L}{v} \right)$$

Cond inic caso 2:

$$x > L; vt > L \rightarrow t > \frac{L}{v}$$

$$z_G = A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t + \alpha vt - \frac{\alpha l}{2}$$

$$\theta = A' \cdot \cos \omega_2 t + B' \cdot \sin \omega_2 t + \alpha$$

$$\dot{z}_G = -A \cdot \omega_1 \cdot \sin \omega_1 t + B \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 t + \alpha v$$

$$\dot{\theta} = -A' \cdot \omega_2 \cdot \sin \omega_2 t + B' \cdot \omega_2 \cdot \cos \omega_2 t$$

$$-\frac{\alpha v}{2\omega_1} \sin \omega_1 \frac{L}{v} + \frac{\alpha L}{2} = A \cdot \cos \omega_1 \frac{L}{v} + B \cdot \sin \omega_1 \frac{L}{v} + \alpha v \cdot \frac{L}{v} - \alpha \frac{l}{2}$$

$$\dot{z}_G\left(\frac{L}{v}\right) = \frac{v \cdot \alpha}{2} - \frac{\alpha v}{2} \cos\left(\omega_1 \frac{L}{v}\right)$$

$$\dot{\theta}\left(\frac{L}{v}\right) =$$

caso 2 $x > L; t > L/v$

$$z_G = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + \alpha v \cdot \frac{L}{v} - \alpha \cdot \frac{l}{2}$$

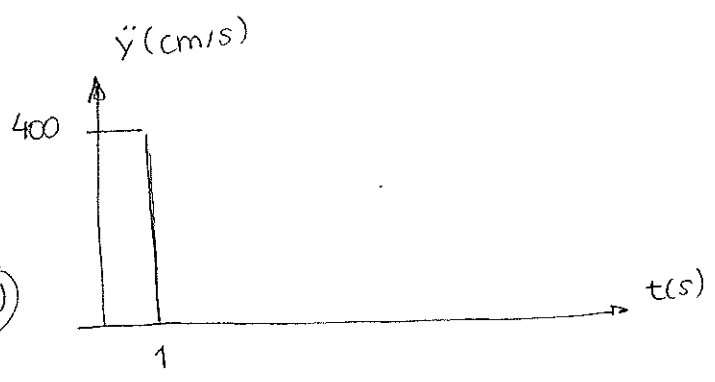
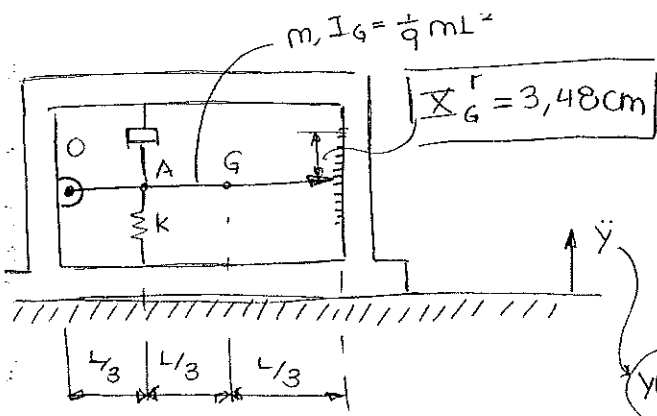
$$\frac{\alpha v}{2} - \frac{\alpha v}{2} \cos\left(\omega_1 \frac{L}{v}\right) = A \omega_1 \sin\left(\omega_1 \frac{L}{v}\right) + B \omega_1 \cdot \cos\left(\omega_1 \frac{L}{v}\right) + \alpha v$$

obtener A y B mediante Cramer

$$z_g = A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t + \alpha v t - \frac{\alpha L}{2}$$

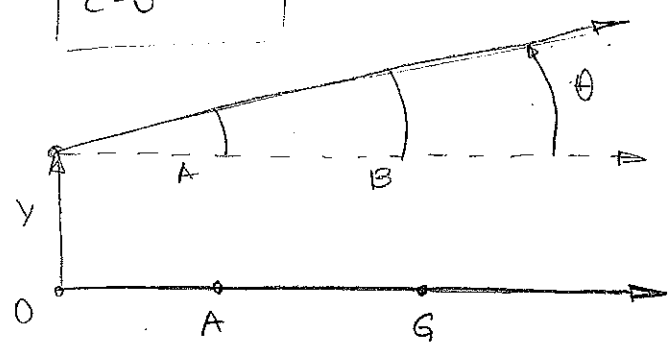
$$\textcircled{1} z_g = \frac{-\alpha v}{2\omega_1} \left[\sin \omega_1 t + \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{L}{v} \right) \right] \right] + \alpha \left(vt - \frac{L}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} \theta = \frac{-\alpha v}{\omega_2 L} \left[\sin \omega_2 t - \sin \left[\omega_2 \left(t - \frac{L}{v} \right) \right] \right] + \alpha$$



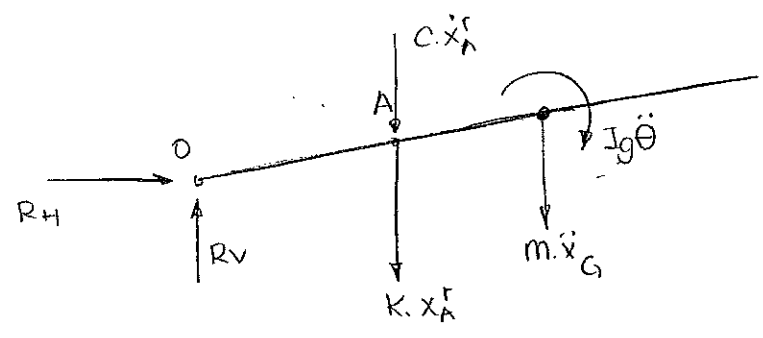
$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$c = 0$$



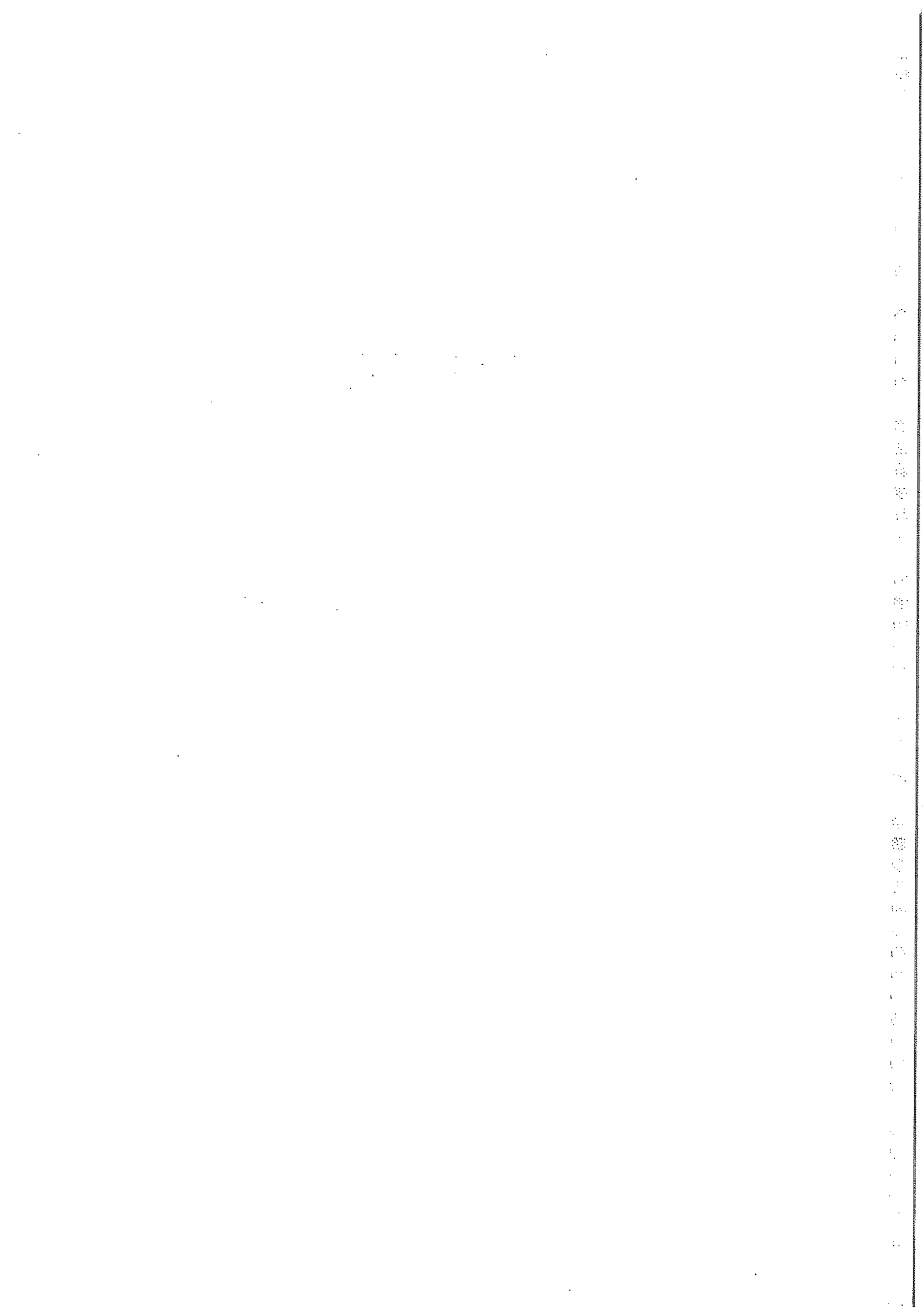
$$x_A = \theta \frac{L}{3} + y; \quad x_A^r = x_A - y = \theta \frac{L}{3}$$

$$x_G = \theta \frac{2L}{3} + y; \quad x_G^r = x_G - y = \theta \frac{2L}{3}$$

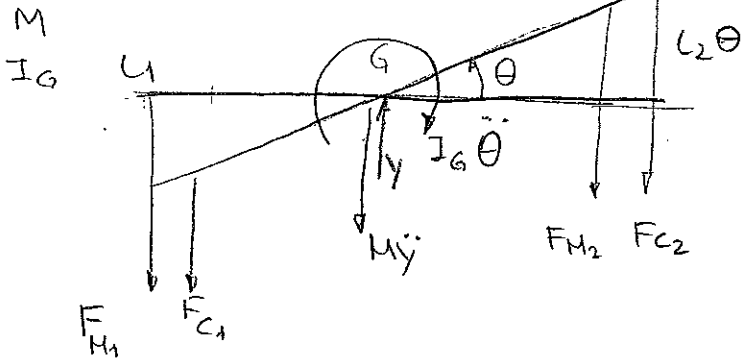
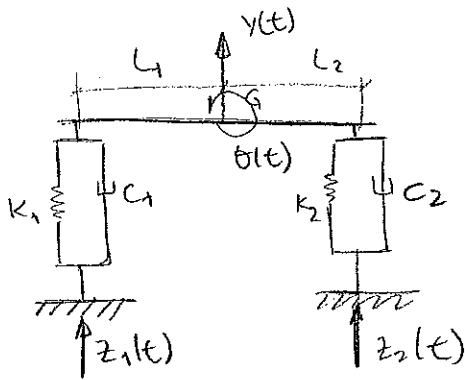


$$\sum M_o = 0 \quad (-c \dot{x}_A^r - K x_A^r) \frac{L}{3} - m \ddot{x}_G \cdot \frac{2L}{3} - I_G \ddot{\theta} = 0$$

$$5m \ddot{x}_G^r + c \dot{x}_G^r + \frac{kL}{6} x_G^r = -4m\ddot{y}$$



SEMINARIO MECANISMOS (MAYO 2014)



* A no ser que te digan lo contrario no se considera el peso propio

$$M\ddot{y} + K_1(y - L_1\theta - z_1) + C_1(\dot{y} - L_1\dot{\theta} - \dot{z}_1) + K_2(y + L_2\theta - z_2) + C_2(\dot{y} + L_2\dot{\theta} - \dot{z}_2) = 0$$

$$I_G\ddot{\theta} - K_1(y - L_1\theta - z_1)L_1 - C_1(\dot{y} - L_1\dot{\theta} - \dot{z}_1)L_1 + K_2(y + L_2\theta - z_2)L_2 + C_2(\dot{y} + L_2\dot{\theta} - \dot{z}_2)L_2 = 0$$

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ F_\theta \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_1L_1 + C_2L_2 \\ -C_1L_1 + C_2L_2 & C_1L_1^2 + C_2L_2^2 \end{bmatrix};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_1L_1 + K_2L_2 \\ -K_1L_1 + K_2L_2 & K_1L_1^2 + K_2L_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} K_1z_1 + C_1\dot{z}_1 + K_2z_2 + C_2\dot{z}_2 \\ -1 \cdot 1 \\ -K_1L_1z_1 - C_1L_1\dot{z}_1 + K_2L_2z_2 + C_2L_2\dot{z}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 0.7668 \text{ m} \\ K_1 = K_2 = 50 \cdot 10^3 \frac{\text{K}}{\text{m}} \\ M = 250 \text{ kg} \\ I_G = 75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$$

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

(si sustituyes los valores te queda diagonal)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{m_{11}}} = 20 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_{22}}{m_{22}}} = 28$$

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$z = 0.1$$

$$\begin{cases} z_1 = z_0 \cos \omega t \\ z_2 = z_0 \cos(\omega t - \pi) \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 24$$

$$250\ddot{y} + 100 \cdot 10^3 y = 50 \cdot 10^3 [0.1 \cos 24t + 0.1 \cos(24t - \pi)]$$

$$y = 0$$

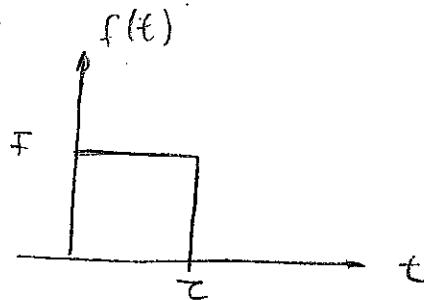
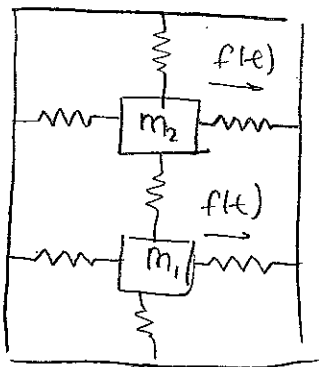
xk nos queda que es una homogénea con cond. iniciales nulas (mda de 50). par.

$$75\ddot{\theta} + 58'798 \cdot 10^3 \theta = 38340 E 0'1 \cos 24t + 0'1 \cos(24t - \pi)] = +7668 \cos(24t) + 0'2 \cos 24t$$

$$\theta(t) = \frac{7668}{58'798 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \cos 24t = 0'492 \cos 24t$$

ω entre una de las naturales (ω_2)

{MAYO 2014}



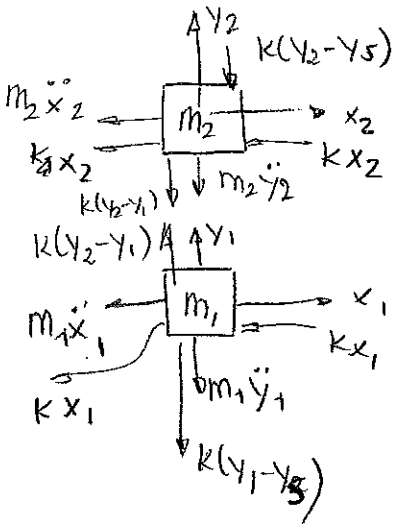
$$Y_2 > Y_1 > Y_s$$

$$Y_s(t) = Y \cdot \sin \omega t$$

$$m_1 = 2m$$

$$m_2 = m$$

$$k$$



$$\sum F_y = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 = f(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + 2kx_2 = f(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^x &= \sqrt{\frac{2k}{m_1}} & \omega_2^x &= \sqrt{\frac{2k}{m_2}} \\ & & & \sqrt{\frac{k}{m}} & & \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{aligned} \right\}$$

Esta no la ponemos de forma matricial porque está super acoplada

$$\sum F_y = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k(y_1 - y_5) - k(y_2 - y_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) + k(y_2 - y_5) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ky \\ ky \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

esta sí en forma matricial

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad - \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \sqrt{\frac{(\beta + \beta)k}{2m}} \\ \omega_2^2 = \sqrt{\frac{(\beta - \beta)k}{2m}} \end{cases}$$

$$t < \tau: \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \end{array} = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_1 t)$$

$$t > \tau: \left. \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{|c} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \frac{F}{2k} (1 - \cos \omega_1 t) + \left(\frac{-F}{2k} (1 - \cos \omega_1 (t - \tau)) \right)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= Y_1 \sin \omega t \\ y_2 &= Y_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$[A] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k y \\ k y \end{Bmatrix}$$

↓

$$[K - \omega^2 M]$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} k y & -k \\ k y & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k y (2k \omega^2 m_2) + k^2 y}{|A|}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k \omega^2 m_1 & k y \\ -k & k y \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k y (2k \omega^2 m_1) + k^2 y}{|A|}$$

