

# 1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE MAQUINARIA

## 1. Tipos de problema en la Dinámica de maquinaria.

A la hora de abordar el estudio de un sistema mecánico desde el punto de vista dinámico, aparece una nueva magnitud, la masa, que interviene en variables vectoriales como fuerzas o momentos. Asimismo, el análisis dinámico de un mecanismo, incluye el cálculo de las reacciones que aparecen en los pares cinemáticos que unen sus elementos. Por lo tanto, sirve como base para el cálculo resistente que permitirá la obtención de las dimensiones secundarias de dichos elementos.

Si se considera que el mecanismo convierte una acción de entrada en otra acción de salida, se está estudiando el mecanismo desde el punto de vista dinámico.

El conocimiento del comportamiento dinámico de las máquinas da lugar a dos tipos de problemas: el problema directo (dinámico) y el problema inverso (cinetostático)

⊗ Problema dinámico: determinar el movimiento de un sistema mecánico de características dadas, del que se conocen todas las acciones, tanto motoras como resistentes.

(INCÓGNITA: MOVIMIENTO DEL SISTEMA). Da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales.

⊗ Problema cinetostático: conocer las acciones motoras que hagan que la máquina se mueva de determinada manera. (INCÓGNITAS: ACCIONES MOTORAS) Da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Una formulación adecuada para el problema cinetostático puede ser la que se deriva de la aplicación del "Principio de Potencias Virtuales", resultando unas ecuaciones en las que aparecen como incógnitas las acciones motoras y las reacciones en los pares cinemáticos. Si se aplica el "Principio de d'Alembert" al problema dinámico directo, aparecen como incógnitas tanto el movimiento del sistema como las reacciones en los pares. Otra alternativa es la utilización de las "ecuaciones de Lagrange", que relaciona directamente el movimiento con las acciones que lo provocan.

En el caso de que el efecto de las fuerzas de inercia pudiera considerarse

despreciable frente a las fuerzas aplicadas, el problema dinámico podría ser abordado de forma cuasi-estática aplicando los principios de la estática.

2. El análisis dinámico en el diseño de máquinas.

#### a) CICLO DE DISEÑO DE UN MECANISMO-MÁQUINA

El primer paso consiste en definir el tipo de mecanismo más adecuado a las necesidades planteadas mediante un proceso de síntesis estructural. De esta forma se obtienen el tipo y el número de elementos y pares a utilizar, así como su secuencia de unión. A partir de las especificaciones cinemáticas, se realiza la síntesis dimensional que da como resultado las dimensiones principales del mecanismo.

Una vez obtenidas las dimensiones principales, se realiza un análisis cinemático del mecanismo para comprobar su movimiento y para obtener el valor de las variables cinemáticas. A continuación, se realiza una estimación inicial de las secciones de los elementos, pudiendo tomar como referencia aquellas que en otros diseños similares hayan resultado adecuadas. De esta forma, ya serían conocidas las dimensiones secundarias de partida de los elementos.

Con la distribución másica que implican estas dimensiones secundarias, se resuelve el PROBLEMA DINÁMICO INVERSO. Éste da como resultado las reacciones en los pares y las acciones motoras necesarias para que el sistema se mueva como previamente se ha especificado. Si las reacciones en los pares predicen un fallo en cualquiera de los elementos de la máquina, se modifican los materiales o las dimensiones de las secciones en cuestión.

#### b) ETAPAS DEL ANÁLISIS DINÁMICO

① construcción del modelo matemático a partir del sistema físico real: se transforma el sistema físico real, mediante una serie de hipótesis simplificadoras, en un modelo matemático que permite su estudio al aplicar los principios de la dinámica (MODELIZACIÓN)

Algunas hipótesis simplificadas son:

- Considerar los elementos rígidos en vez de deformables.
- No considerar el efecto de las holguras en los pares cinemáticos.
- No considerar el rozamiento en primera instancia.
- Simplificar las formas geométricas de los elementos del mecanismo.
- Utilizar sistemas de masas equivalentes.
- Considerar y modelizar las fuerzas más relevantes que intervienen en el sistema mecánico, despreciando otras de menor magnitud.

El estudio dinámico de los sistemas mecánicos donde no es posible considerar la hipótesis de sólido rígido, se aborda mediante la teoría de vibraciones.

② Planteamiento de las ecuaciones de gobierno: A las ecuaciones de la Dinámica relativas a un problema concreto pueden llegarse por diversos caminos: El método de Newton, el principio de d'Alembert, las ecuaciones de Lagrange.

③ Resolución de las ecuaciones de gobierno: En el caso del problema dinámico inverso se emplearían procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, para la resolución del problema dinámico directo, se tendrán que utilizar métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en unos casos y de sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales en otros.

④ Interpretación de los resultados: En esta etapa se valida la modelización matemática del problema dinámico.

### 3. Los principios de la Estática

Existen ocasiones en que el problema dinámico se convierte en cuasi-estático. A la hora de abordar la resolución del problema cinetostático, una posibilidad es aplicar el Principio de d'Alembert, que en definitiva se basa en la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático a un sólido rígido en equilibrio dinámico, en el cual las fuerzas de inercia son consideradas como fuerzas exteriores aplicadas al sistema. Otra posibilidad para la resolución del problema cinetostático-

tico es la aplicación del Principio de las potencias virtuales.

## a) TIPOS DE FUERZAS ACTUANTES SOBRE UN SÓLIDO RÍGIDO.

sobre un sólido rígido existen diferentes tipos de fuerzas actuantes,  $\vec{F}_{ac}$ .

⊗ Las fuerzas exteriores o externas  $\vec{F}_{ext}$ :

- Fuerzas aplicadas.  $\vec{F}_{ap}$  son aquellas que se ejercen sobre el sólido debido a una causa externa al sistema mecánico. Acciones motoras,  $\vec{F}_{mot}$  y fuerzas resistentes.

$\vec{F}_{res}$ .

- Fuerzas de enlace y reacciones en los pares.  $\vec{F}_{en}$ .

⊗ Las fuerzas interiores o fuerzas de cohesión  $\vec{F}_{int}$

## b) TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA.

### 1. Primera ley de Newton (Ley de Inercia)

"si la resultante de las fuerzas actuantes sobre un cuerpo es nula, éste permanecerá en reposo o con movimiento rectilíneo y uniforme."

### 2. Tercera ley de Newton (Ley de acción y reacción)

"Para cada acción ejercida por un cuerpo sobre otro, existe otra fuerza de reacción opuesta y colineal efectuada por el segundo sobre el primero."

### 3. Ecuaciones de equilibrio estático de un sólido rígido.

El equilibrio de un sólido rígido implica el equilibrio de todos los puntos materiales que lo componen. En un sólido rígido las fuerzas interiores forman un sistema cuya fuerza resultante es nula. La condición necesaria para que exista equilibrio es que el sistema de vectores deslizantes constituido por las fuerzas exteriores  $\vec{F}_{ext}^i$  que actúan sobre el sólido rígido sea nulo.

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_{ext}^i = 0 & ; \vec{F}_{ext}^i : \text{fuerzas exteriores (f. aplicadas y reacción en pares)} \\ \sum_i \vec{M}_O^i = 0 & \vec{M}_O^i : \text{momentos de dichas fuerzas respecto de O.} \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones constituye la CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE para que un sólido rígido que se encuentra inicialmente en reposo, mantenga este estado a lo largo del tiempo.

#### 4. Principio de los trabajos virtuales.

- DESPLAZAMIENTO VIRTUAL ( $\delta \vec{r}_i$ ): es un cambio infinitesimal en la posición de un punto de un sistema mecánico, compatible con los enlaces del mismo y sin variación en el tiempo.

- ENLACE PERFECTO: aquel en el que la fuerza de enlace no realiza trabajo.

● La fuerza de enlace es perpendicular al desplazamiento relativo entre los sólidos.  
(NO rozamiento)

● Existe rozamiento, pero el punto de aplicación de la fuerza de enlace tiene velocidad relativa nula. (Dos sólidos en contacto con rodadura pura).

El PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES establece que: "en un sistema mecánico en equilibrio constituido por sólidos rígidos sometidos a enlaces perfectos, el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas en un desplazamiento virtual del sistema es nulo."

$$\delta W_{ap} = \sum_i \vec{F}_{ap} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Este principio sólo considera el trabajo de las fuerzas aplicadas.

Las fuerzas de enlace de los pares que se han liberado para analizar dicha parte, serían ahora unas nuevas fuerzas aplicadas. En el caso de que existiera rozamiento en los pares cinemáticos, y si la magnitud de este fuera conocida, podría ser introducida como una nueva fuerza aplicada al sistema mecánico.

#### c) REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS. DIAGRAMAS DE SÓLIDO LIBRE

Cada par nos permite unos grados de libertad y restringe otros del movimiento relativo entre los elementos que une. En el caso de mecanismos planos existen pares de clase I y de clase II. En mecanismos espaciales hay hasta de clase IV. Para obtener el valor de las reacciones en los pares del sistema mecánico, se debe aislar cada uno de sus elementos del resto, considerar todas las fuerzas aplicadas sobre dicho elemento y reemplazar los pares cinemáticos por reacciones a las que dan lugar. Cada grado de libertad del movimiento relativo entre dos elementos que es restringido por el par cinemático, origina una determinada reacción. Si un par restringe

una determinada traslación, la reacción es una fuerza. Si se restringe un giro, aparece como reacción un momento.

#### 4. Los principios de la Dinámica.

##### a) LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

###### 1. La segunda ley de Newton

"La resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido origina una variación de su cantidad de movimiento". Suponiendo que la masa se mantiene constante a lo largo del tiempo.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ext}}^i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}_G) = m \cdot \vec{a}_G$$

Donde  $\vec{a}_G$  es la aceleración de su centro de gravedad.

###### 2. Teorema del Momento Cinético.

"El momento de fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido respecto de un punto cualquiera O, es igual a la derivada del tiempo del momento cinético respecto a ese punto, más el producto vectorial de la velocidad de dicho punto por la cantidad de movimiento del sólido"

$$\vec{N}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} + \vec{V}_O \wedge \vec{p}$$

Donde  $\vec{N}_O$  es el momento de fuerzas exteriores respecto del punto O,  $\vec{H}_O$  el momento cinético respecto de O y  $\vec{V}_O$  la velocidad de dicho punto. Para el caso de un sólido rígido plano con movimiento plano, de masa M, momento de inercia respecto al punto O,  $I_O$ , y velocidad angular  $\vec{\omega}$ , se convierte en:

$$\vec{H}_O = M \cdot \vec{OG} \wedge \vec{V}_O + I_O \cdot \vec{\omega}$$

$$\text{Si } O \equiv G, \quad \vec{N}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt}$$

Dado que el sistema tiene movimiento plano, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  es siempre constante en dirección y perpendicular al plano que lo contiene.

$$\vec{H}_G = I_G \cdot \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{N}_G = I_G \cdot \vec{\alpha}$$

###### 3. El Teorema de la energía.

Sea T la energía cinética de un sistema mecánico. Un incremento diferencial de

la energía cinética,  $dT$ , del sistema es igual al trabajo diferencial,  $dW$ , realizado por todas las fuerzas actuantes.

$$dT = dW$$

En el caso de que el sistema sea un sólido rígido.

$$dW_{int} = 0$$

si está sometido a enlaces perfectos

$$dW_{enl} = 0.$$

Por lo que la expresión resultante sería.

$$dT = dW_{ap}$$

donde  $dW_{ap}$  es el trabajo diferencial realizado por las fuerzas aplicadas. Si las fuerzas aplicadas derivan de un potencial  $V$  resulta:

$$dW_{ap} = -dV.$$

$$dT + dV = 0 \Rightarrow T + V = E$$

Donde  $E$  es una magnitud constante denominada Energía Mecánica del sólido.

## b) PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

"Todo sistema mecánico en movimiento se encuentra en equilibrio si se considera que está sometido simultáneamente a las fuerzas exteriores sobre él aplicadas y a las fuerzas de inercia".

Si las fuerzas de inercia se consideran como unas fuerzas exteriores más, a dicho sistema se le pueden aplicar las ecuaciones del equilibrio estático.

Para un punto de masa  $m$  sobre la que se aplica una fuerza  $\vec{F}$ , se verifica que,

$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

En el caso de un sólido rígido de masa  $M$  sometido a un conjunto de fuerzas exteriores de resultante  $\vec{F}_{ext}$ ,

$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} - M\vec{a}_G = \vec{0} \\ \vec{N}_O - \frac{d\vec{H}_O}{dt} - \vec{v}_O \wedge \vec{p} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} - M\vec{a}_G = \vec{0} \\ \vec{N}_O - I_G \cdot \vec{\alpha} + \vec{OG} \wedge (-M\vec{a}_G) = \vec{0} \end{cases}$$

Este sistema puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{iner}} = \vec{0} \\ \vec{N}_O + \vec{M}_{\text{iner}} + \vec{OG} \wedge \vec{F}_{\text{iner}} = \vec{0} \end{cases}$$

Donde  $\vec{F}_{\text{iner}} = -M\vec{a}_G$  es la fuerza de inercia y  $\vec{M}_{\text{iner}} = -I_G \cdot \vec{\alpha}$  la inercia de giro.

Si el momento de las fuerzas exteriores se toma respecto del centro de gravedad del sólido rígido

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} - M\vec{a}_G = \vec{0} \\ \vec{N}_G - I_G \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \end{cases}$$

### c) EL PRINCIPIO DE LAS POTENCIAS VIRTUALES.

Sea un sistema mecánico constituido por varios sólidos rígidos unidos mediante enlaces perfectos, sometido a unas acciones exteriores (N fuerzas y M momentos). El Principio de los Trabajos Virtuales establece que, si el sistema está en equilibrio, el trabajo generado por las fuerzas aplicadas en un desplazamiento virtual es nulo.

$$\delta W_{\text{ap}} = 0.$$

En el caso de que el sistema esté en movimiento (equilibrio dinámico) se sigue verificando si las acciones de inercia son consideradas como unas acciones aplicadas más dentro de esas N fuerzas y M momentos.

$$Pot_{\text{ap}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{ap}}^i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^M \vec{M}_{\text{ap}}^j \cdot \vec{\omega}_j = 0$$

Donde  $\vec{v}_i$  son las velocidades de los puntos i de aplicación de las fuerzas  $\vec{F}_{\text{ap}}^i$  y  $\vec{\omega}_j$  las velocidades angulares de los elementos j sobre los que se aplican los momentos  $\vec{M}_{\text{ap}}^j$ , siendo ambas las correspondientes a un campo de velocidades virtual del sistema mecánico.

El principio de potencias virtuales queda "la potencia generada por el conjunto de acciones que actúan sobre un sistema mecánico, incluidas las fuerzas de inercia, es nula para cualquier campo de velocidades virtuales".



#### d) LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

Supóngase un sistema sometido a  $N$  fuerzas aplicadas y cuya posición viene definida por  $N$  coordenadas generalizadas  $q_j$ .

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{ap.}^i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \delta q_j$$

Donde  $Q_j$  es la fuerza generalizada asociada a la coordenada  $q_j$  que se obtiene mediante la expresión

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ap.}^i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

De esta forma se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j=1 \dots n$$

Que son las denominadas ECUACIONES DE LAGRANGE y que constituyen las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sistema mecánico formado por sólidos rígidos sometidos a enlaces perfectos.

Si algunos de las fuerzas aplicadas son conservativas, resulta:

$$Q_j^c = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Donde  $V$  es la energía potencial del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad j=1 \dots n$$

siendo  $L=T-V$  la denominada FUNCIÓN LAGRANGIANA y  $Q_j^{nc}$  las fuerzas generalizadas no conservativas.

#### 5. Sistemas de masas equivalentes.

Se trata de simplificar los sistemas mecánicos mediante la sustitución de sus elementos por grupos de masas concentradas colocadas en determinados puntos rigidamente ligadas entre sí.

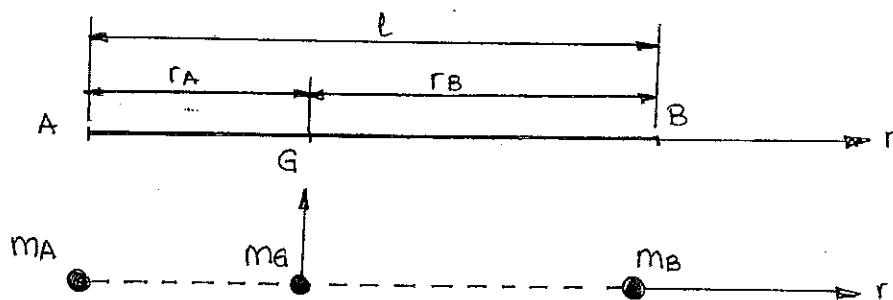
Para que se verifique la equivalencia entre un elemento del mecanismo y su correspondiente sistema de masas equivalentes es que ambas posean iguales características másicas e inerciales.

Si entre ambos sistemas se verifica la igualdad de masa y de la posición del centro de gravedad, se dice que son ESTÁTICAMENTE EQUIVALENTES

Si hay igualdad en todas las características másicas e inerciales (masa, centro de gravedad e inercia) se dice que ambos sistemas presentan una EQUIVALENCIA COMPLETA

#### a) SISTEMA LINEAL (CON MOVIMIENTO PLANO)

Sea una barra de masa  $m$ , longitud  $l$  e  $I_G$  el momento de inercia respecto de su centro de gravedad  $G$ . Dicho sistema continuo puede ser sustituido por tres masas puntuales  $m_A, m_B$ , y  $m_G$  rígidamente unidas entre sí, colocadas precisamente en los extremos  $A$  y  $B$  de la barra y en su centro de gravedad  $G$ .



Si se sitúa el origen de coordenadas en el centro de gravedad y de las condiciones deducimos:

$$\begin{cases} m_A + m_B + m_G = m & (\text{masa}) \\ -m_A \cdot r_A + m_B \cdot r_B + m_G \cdot 0 = 0 \cdot m & (\text{centro de gravedad}) \\ m_A \cdot r_A^2 + m_B \cdot r_B^2 = I_G & (\text{inercia}) \end{cases}$$

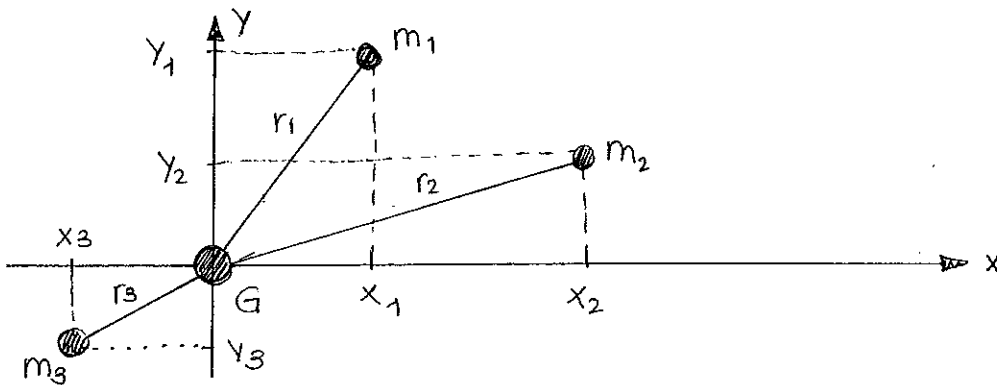
Se obtiene así:

$$m_A = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{I_G}{l} ; m_B = \frac{1}{r_B} \cdot \frac{I_G}{l} ; m_G = m - \frac{I_G}{r_A r_B}$$

En caso de que los puntos elegidos para situar las masas fueran cualesquiera, el planteamiento es idéntico. Si se deseara obtener un sistema de masas equivalentes con más de 3 masas puntuales, podrían elegirse arbitrariamente  $(n-3)$  masas y determinarse las tres restantes mediante la imposición de las condiciones.

Podría prescindirse de la masa  $m_G$  siempre que los parámetros de los que depende pudieran ajustarse de tal manera que  $m_G$  se anulara. En este caso la barra podría ser sustituida por dos masas únicamente.

b) SISTEMA PLANO



El número de masas que hace determinado al sistema de ecuaciones es de cuatro. Si se toma el origen de coordenadas con el que se van a referenciar las masas en el centro de gravedad y se sitúa allí una de las masas puntuales:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 + m_2 + m_3 + m_G = m \quad (\text{masa}) \\ m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 = 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 = 0 \\ m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 = I_G \quad (\text{inerencia}) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{(centro de gravedad)}$$

c) SISTEMA ESPACIAL

Son necesarias 10 masas puntuales  $m_i$  para obtener un sistema de masas equivalentes a un sólido rígido de masa  $m$ , centro de gravedad  $G$  y componentes del tensor de inercia  $I_x, I_y, I_z, C_x, C_y, C_z$ . si se sitúa el origen de coordenadas en el centro de gravedad del sólido espacial:

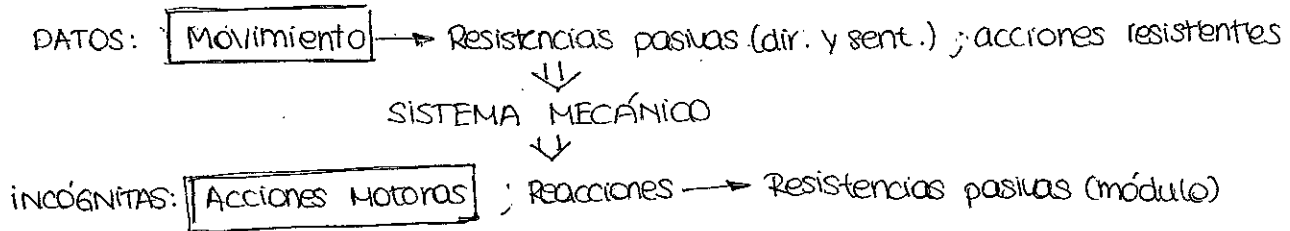
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{10} m_i = m \quad (\text{masa}) \\ m_i x_i = 0 \\ m_i y_i = 0 \\ m_i z_i = 0 \\ m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_x \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} m_i y_i z_i = C_x \\ m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_y \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} m_i x_i z_i = C_y \\ m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_z \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} m_i x_i y_i = C_z \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{(inerencia)}$$



## 2. EL PROBLEMA DINÁMICO INVERSO.

### 1. Definición, utilidad y planteamiento del problema dinámico inverso.

El problema dinámico inverso o PROBLEMA CINETOSTÁTICO consiste en calcular las acciones motoras que se han de suministrar al sistema mecánico para la consecución de un movimiento deseado, así como las reacciones en los pares cinemáticos.



Es necesario conocer las reacciones a las que los diferentes elementos del sistema van a verse sometidos en las uniones con sus elementos adyacentes. Dicho dimensionamiento determina las características másicas e inerciales de los elementos, las cuales definen su capacidad resistente. Las dimensiones principales se obtienen imponiendo condicionamientos cinemáticos como la consecución de una trayectoria determinada o mediante la síntesis dimensional. Posteriormente, mediante el análisis cinetostático, se dimensionan los elementos de acuerdo con las apropiadas teorías de fallo, de forma que puedan transmitir adecuadamente dichos esfuerzos.

#### a) LAS PROPIEDADES MÁSICAS E INERCIALES DE LOS ELEMENTOS

Han de suponerse conocidas las distribuciones másicas de los elementos según su geometría longitudinal y transversal. Para dimensionar correctamente los elementos, ha de resolverse el problema cinetostático de forma iterativa, hasta que la diferencia entre las distribuciones másicas de los elementos en dos iteraciones consecutivas no supere una determinada tolerancia previamente especificada.

#### b) EL MOVIMIENTO DEL SISTEMA MECÁNICO

El movimiento del sistema mecánico es conocido, el que se obtuvo en la fase de síntesis dimensional. Si la posición del sistema mecánico es conocida a lo largo de la secuencia de movimientos, también lo son sus derivadas (su campo de aceleraciones).

Las fuerzas de inercia, por tanto, son también conocidas.

### C) LAS ACCIONES RESISTENTES Y LAS RESISTENCIAS PASIVAS.

Se suministran como datos, los esfuerzos originados por la aplicación para la cual se está diseñando el sistema mecánico. Las resistencias pasivas se materializan en esfuerzos, cuyas direcciones y sentidos vienen determinados por el movimiento del sistema; sus módulos, sin embargo, dependen de las correspondientes reacciones normales, que son incógnitas.

### d) PRINCIPIOS Y MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Puede llevarse a cabo mediante la aplicación de cualquiera de los principios de la dinámica apuntados en el tema anterior, aunque son de gran utilidad el PRINCIPIO DE D'ALEMBERT Y EL PRINCIPIO DE LAS POTENCIAS VIRTUALES, en particular. El primero de ellos es útil cuando se desean calcular todas las reacciones en los pares cinemáticos, además de las acciones motoras en los elementos de entrada. El segundo tiene la ventaja de poder calcular las acciones motoras directamente.

2. Aplicación del principio de d'Alembert: equilibrio dinámico.

⊗ HIPÓTESIS: \* Mecanismos planos con movimiento plano.

\* Enlaces perfectos (sin rozamiento)

\* Mecanismos sin restricciones redundantes ni singularidades. (G: Grübler)

### A) PREVISIÓN DEL NÚMERO DE ECUACIONES Y DE INCÓGNITAS.

Sea un mecanismo plano con  $N$  elementos (incluyendo el Ajo),  $G$  grados de libertad,  $P_I$  pares de clase I y  $P_{II}$  pares de clase II; según el criterio de Grübler:

$$G = 3(N-1) - 2P_I - P_{II}.$$

El número de ecuaciones algebraicas viene dado por:

$$N_{EC} = (N-1) \cdot 3$$

y el número de reacciones coincide con el n.º de grados de libertad impedidos por los pares.

$$N_{REAC} = 2P_I + P_{II}$$

Por tanto, el número de incógnitas queda

$$N_{INC} = G + 2P_I + P_{II}$$

## b) PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES POR CADA ELEMENTO.

Se plantean las tres ecuaciones de la estática plana por cada elemento: pueden plantearse dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas más una de equilibrio de momentos o tres ecuaciones de equilibrios de momentos.

### ⊕ ACCIONES EN UN ELEMENTO:

1. Acciones aplicadas: fuerzas puntuales  $F^i$  ó momentos aplicados  $M^i$ .
2. Fuerzas de inercia: cada elemento está sometido a dos acciones de inercia: una fuerza y un momento. La fuerza de inercia  $F_I$  se aplica en el centro de gravedad  $G$  del elemento. Su magnitud es el producto de la masa del elemento por la aceleración de su centro de gravedad. Se ha de aplicar un momento  $M_I$  generado por la inercia de giro, de magnitud igual al producto de la aceleración angular del elemento por el momento de inercia del elemento con respecto al centro de gravedad, y cuyo sentido es el contrario al de la aceleración angular.
3. Reacciones en los pares: cuando se aísla un elemento  $j$  que está unido a otro  $i$  mediante un enlace, la reacción a la que el primero se ve sometido se simbolizará mediante la letra  $R$  con dos subíndices, correspondientes a los elementos que une el par.

De acuerdo con el principio de acción y reacción:  $\vec{R}_{ij} + \vec{R}_{ji} = \vec{0}$

\* Reacciones en los pares de rotación: han de descomponerse según los ejes coordenados que se elijan.  $(R_{ji}^I, R_{ji}^{II})$ . Para pares de rotación ternarios o de orden superior:

$$\vec{R}_{ij,k} + \vec{R}_{jk,i} + \vec{R}_{ik,j} = \vec{0}$$

\* Reacciones en los pares prismáticos: se interpreta como un sistema de fuerzas, ambas perpendiculares a la dirección de deslizamiento y situadas en sentidos extremos del par.

Este sistema puede reducirse a una sola fuerza perpendicular más un momento.

\* Reacciones en los pares de leva: un par de leva tiene una sola reacción, su dirección es perpendicular a las superficies de contacto y está aplicada en el punto de contacto.

Cuando haya RODADURA (suficiente fuerza de rozamiento), el par de leva se comportará como un par de rotación instantáneo en el punto de contacto, donde aparecerá una reacción con dos componentes independientes entre sí.

### c) RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

La mejor estrategia es ir planteando las acciones elemento a elemento intentando desacoplar el problema para así resolver subsistemas de ecuaciones con menor número de incógnitas.

### d) FORMULACIÓN PARA MECANISMOS TRIDIMENSIONALES.

El número de ecuaciones a plantear por cada elemento móvil es seis:  $N_{EC} = 6(N-1)$ . y el número de incógnitas es igual al número de acciones motoras  $G$ , más el número de reacciones.

$$N_{REAC} = 5P_I + 4P_{II} + 3P_{III} + 2P_{IV} + P_V.$$

### e) EFFECTO DEL ROZAMIENTO (ENLACES NO PERFECTOS).

No altera ni el número de ecuaciones ni el de incógnitas. El rozamiento se materializa mediante una fuerza aplicada en un punto de la superficie de rozamiento, con dirección tangente a las superficies y de magnitud  $F_{ROZ} = \mu \sqrt{R_{ij}^x{}^2 + R_{ij}^y{}^2}$ . Concretamente, la orientación angular del punto de aplicación viene dada por  $\varphi = \arctan \frac{R_{ij}^y}{R_{ij}^x}$ .

Esta fuerza entra a formar parte del sistema de ecuaciones que pierde linealidad.

En los casos de pares prismáticos y de leva, aún teniendo en cuenta el rozamiento, si bien se incrementa el grado de acoplamiento de sus ecuaciones, el sistema resultante en lo tocante a dichos pares sigue siendo lineal. Esto es debido a que las fuerzas de rozamiento pueden expresarse como el producto del coeficiente de rozamiento al deslizamiento por la correspondiente reacción normal de la reacción en el par.

### f) APLICACIÓN A MECANISMOS CON RESTRICCIONES REDUNDANTES.

Cuando el número de grados de libertad del sistema mecánico no coincide con el dado por la fórmula de Gröbler, el número de ecuaciones no coincide con el número de incógnitas. El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, y por lo tanto, el sistema no se puede resolver; siempre pueden calcularse las acciones motoras, pero no todas las reacciones.

### 3. Aplicación del principio de las potencias virtuales.

Este principio es de especial interés cuando las resistencias pasivas son nulas o despreciables y únicamente interesa calcular las acciones motoras, dejando de lado las reacciones (las reacciones en los pares no consumen potencia).



## A) Planteamiento del problema. Cálculo de las acciones motoras.

Sea un sistema mecánico con 1 gdl y N elementos. Pasos:

1. Análisis cinemático del mecanismo: se obtienen las velocidades  $\vec{\omega}_j$  y las aceleraciones  $\vec{\alpha}_j$  de cada elemento j, y las velocidades lineales  $\vec{v}_k$  de los puntos k donde hay fuerzas aplicadas y de los centros de gravedad de los elementos.

2. Cálculo de las acciones de inercia de cada elemento j del mecanismo:  $\vec{F}_I^j = -m_j \cdot \vec{a}_{G_j}$  y  $\vec{M}_I^j = -I_{G_j} \cdot \vec{\alpha}_j$ .

3. Obtención de un campo de velocidades virtuales  $(\vec{\omega}_j, \vec{v}_k)$ . El campo real de velocidades  $(\omega_j, v_k)$  anteriormente calculado, vale como tal.

4. Finalmente, la ecuación de potencias virtuales es:

$$\vec{T}_e \cdot \vec{\omega}_e + \sum_{k=1}^{NP} \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \sum_{j=2}^N \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j + \sum_{j=2}^N (\vec{F}_I^j \cdot \vec{v}_{G_j} + \vec{M}_I^j \cdot \vec{\omega}_j) = 0$$

Donde  $\vec{T}_e$  es el par motor aplicado al elemento de entrada

$\vec{\omega}_e$  es la velocidad angular virtual del momento de entrada.

$\vec{F}_k$  es la fuerza resistente aplicada en el punto k

NP es el número de puntos de aplicación de las fuerzas  $\vec{F}_k$

$\vec{M}_j$  es el momento resistente aplicado en el elemento j.

$\vec{\omega}_j$  es la velocidad angular virtual del elemento j.

$\vec{v}_{G_j}$  es la velocidad virtual del centro de gravedad del elemento j.

Si el mecanismo tiene g grados de libertad, entonces hay que aplicar el principio de las potencias virtuales g veces con g campos de velocidades virtuales diferentes. De esta manera se extraen g ecuaciones con g incógnitas (las acciones motoras). Lo más conveniente es plantearlos de forma que en cada uno de ellos sólo haya una acción motora que desarrolle potencia, fijando todas las entradas excepto la correspondiente a la acción motora que se pretende calcular.

Aunque se empleen varios campos de velocidades para el planteamiento de las ecuaciones, las fuerzas de inercia son las mismas.

## b) CÁLCULO DE LAS REACCIONES

Mediante este método también pueden calcularse las reacciones. Basta con "aislar las reacciones" y aplicar un campo de velocidades virtuales tal que sólo desarrolle potencia una de las reacciones.

### 3. EL PROBLEMA DINÁMICO DIRECTO.

#### 1. Definición, utilidad y aplicaciones del problema dinámico directo.

Consiste en calcular el movimiento de un sistema mecánico, así como las reacciones en los pares y el valor de las resistencias pasivas.

DATOS: Acciones motoras y Acciones resistentes

↓  
SISTEMA MECÁNICO

↓  
INCÓGNITAS: Movimiento Reacciones y Resistencias pasivas

El análisis dinámico directo es imprescindible para simular el movimiento de dicho sistema bajo acciones diferentes a las acciones para las que fue diseñado. Un análisis cinetostático, sería, en principio, suficiente para obtener las magnitudes de las acciones motoras necesarias para que el sistema se mueva según el régimen de movimiento y cargas establecidas. El comportamiento de dicho sistema ante nuevas condiciones de cargas no previstas, únicamente se puede conocer mediante la resolución del problema directo.

El problema directo también es de aplicación en sistemas flexibles como los robots en serie y las plataformas de cinemática paralela. Una de las funciones de estos mecanismos es ubicar masas en localizaciones prefijadas del espacio. A su vez, el análisis dinámico directo se revela útil para comprobar que las especificaciones de potencia y de par de los motores, son suficientes para el cumplimiento de los citados requisitos cinemáticos.

#### 2. Coordenadas independientes vs coordenadas dependientes.

Elección del tipo de coordenadas que se pueden adoptar para definir la cinemática del sistema mecánico. Dichas coordenadas pueden ser independientes o bien dependientes.

Las coordenadas independientes son también denominadas coordenadas generalizadas. Constituyen el número mínimo necesario para definir la posición del mecanismo (número de gdl).

Cuando el problema dinámico se formula mediante coordenadas generalizadas, las acciones de inercia serán función exclusiva de dichas coordenadas.

Se pueden adoptar también las denominadas coordenadas dependientes cuyo número

es mayor al estrictamente necesario para definir la posición del mecanismo. con las coordenadas dependientes se busca una mayor simplicidad en la formulación del problema dinámico, aún a costa de aumentar la complejidad de su resolución.

Cuando se utilizan las coordenadas dependientes, el sistema de ecuaciones de gobierno se compondrá de las ecuaciones diferenciales del movimiento propiamente dichas, junto con las ecuaciones de restricción, que son las ecuaciones algebraicas que relacionan las coordenadas dependientes entre sí. El sistema resultante es un sistema mixto de ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas. Si se usan coordenadas independientes, resulta un sistema de ecuaciones diferenciales.

La adopción de coordenadas independientes implica una mayor dificultad a la hora de plantear las ecuaciones de gobierno, pero su resolución es menos costosa.

En los casos en que la cinemática del mecanismo es sencilla, las coordenadas generalizadas ofrecen más ventajas que las dependientes.

### 3. Las ecuaciones del movimiento. Aplicación de los principios de la dinámica.

Las ecuaciones del movimiento del sistema se obtienen aplicando al mismo alguno de los principios de la dinámica señalados en el tema 1. En el caso de la segunda ley de Newton, es mucho más cómodo aplicarla elemento a elemento.

La aplicación del equilibrio dinámico que establece el principio de d'Alembert es una variante del método anterior. Ambos métodos proporcionan ecuaciones algebraico diferenciales. Esto significa que en las ecuaciones en las que aparecen como incógnitas tanto las coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo como las reacciones en los pares, todas ellas dependientes del tiempo. En el caso de emplear coordenadas dependientes, habrá que añadir al sistema de ecuaciones anterior, las ecuaciones cinemáticas de restricción que ligan a dichas variables. Estas ecuaciones de restricción son ecuaciones algebraicas.

En el caso de las ecuaciones de Lagrange, se aplica al sistema mecánico en su totalidad, se pueden utilizar tanto coordenadas independientes como dependientes. En el caso de formularse en coordenadas independientes obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales, coincidentes en número con el de las coordenadas adoptadas. (No aparecen las reacciones en los pares.)

En el caso de utilizar coordenadas dependientes, se obtiene un sistema formado por tantas ecuaciones diferenciales como coordenadas dependientes, más las ecuaciones algebraicas de restricción. En este caso se podrán calcular las reacciones a través de los multiplicadores de Lagrange. Dichos multiplicadores representan a las fuerzas de enlace que aseguran el cumplimiento de las ecuaciones de restricción.

Por último, el teorema de la Energía se aplica a la totalidad del sistema mecánico, de donde se extrae una única ecuación diferencial.

4. Dinámica de los sistemas de un grado de libertad sometidos a acciones dependientes de la posición.

El funcionamiento de estas máquinas es de tal forma que las acciones aplicadas dependen únicamente del parámetro que define la posición del mecanismo, es decir, las acciones dependen únicamente de la posición y no son función explícita del tiempo. La aplicación del TEOREMA DE LA ENERGÍA formulado en coordenadas generalizadas resulta muy adecuado.

#### 0.1) MÉTODO DE QUINN

"En un mecanismo de un grado de libertad, la contribución que supone la energía cinética del elemento  $j$  sobre la energía cinética total, no depende de la velocidad del elemento de entrada". La energía cinética del elemento  $j$  puede expresarse como:

$$T_j = \frac{1}{2} m_j \cdot v_{Gj}^2 + \frac{1}{2} I_{Gj} \cdot \omega_j^2$$

Donde  $m_j$  es la masa del elemento,  $v_{Gj}$  es la velocidad de su centro de gravedad,  $\omega_j$  es la velocidad angular del elemento e  $I_{Gj}$  el momento de inercia con respecto a su centro de gravedad. Puede expresarse la orientación de cualquier elemento y la posición de su centro de gravedad en función de su coordenada generalizada:

$$\varphi_j = f_j(\varphi_e)$$

$$s_{Gj} = f_{Gj}(\varphi_e)$$

Siendo  $\varphi_j$  el ángulo del elemento  $j$  con respecto al elemento fijo,  $s_{Gj}$  la coordenada horaria de la trayectoria del centro de gravedad del elemento  $j$  y  $\varphi_e$  la orientación del elemento de entrada (coordenada generalizada)

$$\omega_j = \frac{df_j(\psi_e)}{d\psi_e} \cdot \omega_e$$

$$\Rightarrow \omega_j = g_j(\psi_e) \cdot \omega_e$$

$$v_{G_j} = \frac{df_{G_j}(\psi_e)}{d\psi_e} \cdot \omega_e$$

$$v_{G_j} = g_{G_j}(\psi_e) \omega_e$$

siendo  $\omega_e$  la derivada con respecto al tiempo de la coordenada generalizada.

De esta forma obtenemos que la energía cinética del elemento  $j$  es:

$$T_j = \frac{1}{2} \omega_e^2 (m_j \cdot g_{G_j}^2(\psi_e) + I_{G_j} \cdot g_j^2(\psi_e))$$

Y, por tanto, la energía cinética total será:

$$T = \frac{1}{2} \omega_e^2 \sum_{i=2}^N (m_i \cdot g_{G_i}^2(\psi_e) + I_{G_i} \cdot g_i^2(\psi_e))$$

siendo  $N$  el número de elementos del mecanismo.

El coeficiente de contribución de energía del elemento  $j$  ( $\epsilon_j$ ) representa la contribución del elemento  $j$  a la energía cinética del sistema completo y viene dado por:

$$\epsilon_j(\psi_e) = \frac{T_j}{T} = \frac{(m_j \cdot g_{G_j}^2(\psi_e) + I_{G_j} \cdot g_j^2(\psi_e))}{\sum_{i=2}^N (m_i \cdot g_{G_i}^2(\psi_e) + I_{G_i} \cdot g_i^2(\psi_e))}$$

Las acciones se encuentran expresadas en función de la coordenada generalizada. El problema dinámico directo se redefine como el cálculo de la velocidad y la aceleración angular del elemento de entrada cuando la coordenada generalizada toma un valor determinado. Aplicando el teorema de la Energía se resuelve el problema: "El trabajo realizado por las acciones exteriores entre dos posiciones del mecanismo es igual al incremento de energía cinética entre dichas posiciones".

$$[W_{Ext}]_{\psi_e^0}^{\psi_e} = T(\psi_e) - T(\psi_e^0)$$

Donde  $\psi_e^0$  es el valor de la coordenada generalizada en el instante inicial.

En el caso particular de que el elemento de entrada sea una manivela, si la distancia del punto fijo  $O$  al centro de gravedad  $G_e$  es  $l_e$ .

$$|\omega_e| = \sqrt{\frac{2\epsilon_e(\psi_e) ([W_{Ext}]_{\psi_e^0}^{\psi_e} + T(\psi_e^0))}{I_e}}$$

## b) MÉTODO DE ZHUKOVSKI

"Elegido un elemento cualquiera de un mecanismo de un grado de libertad y con ciz fijo, al que se denominará elemento de reducción, como por ejemplo una manivela o una deslizadera, se puede tomar ese elemento aisladamente como representativo del mecanismo, dotándole de una inercia (o una masa) equivalente y aplicándole un momento (o una fuerza) equivalente, de forma que el movimiento del elemento sea el mismo tanto aisladamente como perteneciente al mecanismo." Se suelen tomar como elementos de reducción los elementos de entrada al mecanismo.

Los parámetros equivalentes toman los siguientes nombres:

$$\begin{cases} I^*(\varphi) \rightarrow \text{Inercia reducida} \\ M^*(\varphi) \rightarrow \text{Momento reducido ó generalizado.} \\ m^*(\varphi) \rightarrow \text{Masa reducida} \\ F^*(\varphi) \rightarrow \text{Fuerza reducida ó generalizada.} \end{cases}$$

Esta equivalencia se concreta en lo siguiente:

- El trabajo realizado por las acciones exteriores en ambos mecanismos es el mismo. De aquí se extrae el concepto de acción generalizada:  $M^*$  y  $F^*$ .
- La energía cinética almacenada por ambos mecanismos es la misma. De aquí se extrae el concepto de inercia generalizada:  $I^*$  y  $m^*$ .

Para el caso en el que el elemento de reducción sea una manivela.

$$\begin{cases} M^*(\varphi_0) = \sum_j F_j \cdot \cos \alpha_j \cdot g_{fj} + \sum_j M_j \cdot g_j \\ I^*(\varphi_0) = \sum_{i=2}^N (m_i \cdot g_{Gi}^2 + I_{Gi} \cdot g_i^2) \end{cases}$$

- Para el cálculo de las magnitudes reducidas no es necesario utilizar campos de velocidades reales. Tanto el momento como la inercia reducida se obtienen a partir de los coeficientes de influencia, lo cual significa que pueden calcularse a partir de un campo de velocidades virtuales.  $\tilde{\omega}_i, \tilde{v}_i$ .
- Puede deducirse la coincidencia entre el concepto de acción reducida y el de fuerza generalizada según las ecuaciones de Lagrange.

El problema puede abordarse aplicando el teorema de la Energía al elemento de

reducción.

$$M^*(\varphi_e) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e} \omega_e^2 + I^*(\varphi_e) \cdot \alpha_e$$

"Ecuación generalizada del movimiento para cualquier sistema (real de 1 gdl.)"

Luego,

$$\alpha_e = \frac{M^*(\varphi_e) - \frac{1}{2} \frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e} \omega_e^2}{I^*(\varphi_e)}$$

### C) DETERMINACIÓN DE LAS MAGNITUDES CINEMÁTICAS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

Una vez resuelto lo anterior, es posible conocer su variación a lo largo del tiempo, sin más que plantear:

$$\omega_e(\varphi_e) = \frac{d\varphi_e}{dt} \rightarrow dt = \frac{1}{\omega_e(\varphi_e)} d\varphi_e \rightarrow \int_{t_0}^t dt = \int_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} \frac{1}{\omega_e(\varphi_e)} d\varphi_e$$

De donde:

$$t = t_0 + \int_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} \frac{1}{\omega_e(\varphi_e)} d\varphi_e$$

con lo que puede calcularse el instante de tiempo en el que se llega a un determinado valor de la variable de posición



## 4. VOLANTES DE INERCIA

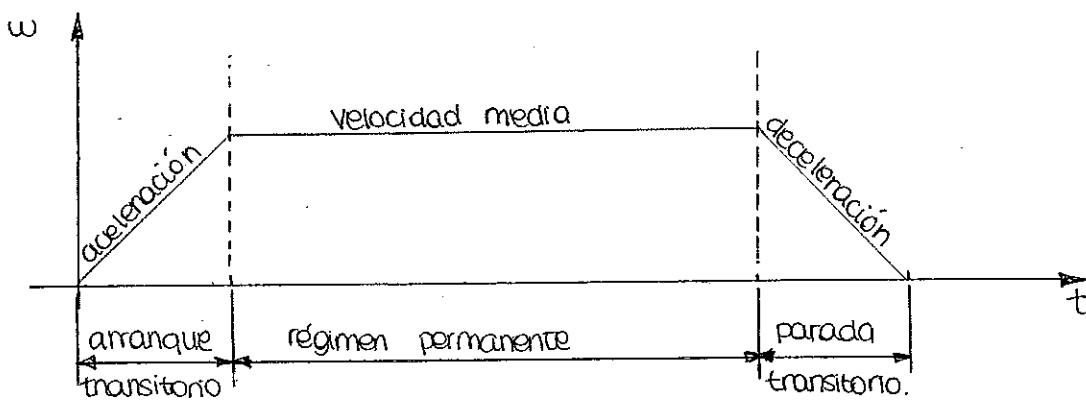
### 1. Características de las máquinas que funcionan en régimen.

Una máquina puede funcionar de dos maneras: en régimen estacionario o en régimen transitorio. Se dice que una máquina funciona en régimen estacionario, o simplemente en régimen, cuando su movimiento reviste un carácter cíclico, cuando su velocidad tiene una variación periódica.

$$\omega(\varphi) = \omega(\varphi + \lambda)$$

siendo  $\omega$  la velocidad angular del eje de entrada,  $\varphi$  su posición angular y  $\lambda$  el período. (Motor de explosión de cuatro tiempos:  $\lambda = 4\pi$ ).

El régimen transitorio ocurre cuando no se da tal periodicidad. En la mayoría de las máquinas se dan los dos regímenes. El transitorio discurre al inicio y al final del funcionamiento de la máquina. Cuando el régimen permanente es notablemente superior al transitorio, basta con realizar el cálculo del volante en régimen estacionario.



De acuerdo con el teorema de la energía, para que una máquina funcione en régimen es necesario que el trabajo de las fuerzas exteriores sea nulo en un ciclo completo del movimiento:

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} M^*(\varphi) d\varphi = 0$$

Donde  $M^*$  es el momento de fuerzas reducido al eje de entrada de la máquina:

Hay dos parámetros representativos del funcionamiento en régimen de una máquina:

● La velocidad media o de régimen:  $\omega_a = \frac{1}{2} (\omega_{m\acute{a}x} + \omega_{m\acute{i}n})$

● Grado de irregularidad:  $\varepsilon = \frac{\omega_{m\acute{a}x} - \omega_{m\acute{i}n}}{\omega_a}$  (fluctuación máxima de la velocidad en un ciclo)

Dichos parámetros son generalmente datos iniciales de diseño.

## 2. Efecto del volante de inercia.

El volante de inercia es un elemento pasivo de gran inercia, capaz de almacenar gran cantidad de energía cinética. Se monta solidario al eje o a uno de los ejes de la máquina. Su implantación es la disminución de las fluctuaciones de la velocidad de rotación de un eje. Cuando los esfuerzos motores son mayores que los resistentes, el volante de inercia acumula energía cinética sin que se incremente de forma importante la velocidad de giro. Cuando las fuerzas resistentes aumentan hasta superar las motoras, el volante de inercia libera parte de su energía sin que disminuya su velocidad angular de forma apreciable.

$$\Delta W_1^2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \begin{cases} \text{si } I \uparrow: \omega_2 - \omega_1 \rightarrow 0 \\ \text{si } I \downarrow: \omega_2 - \omega_1 \uparrow \end{cases}$$

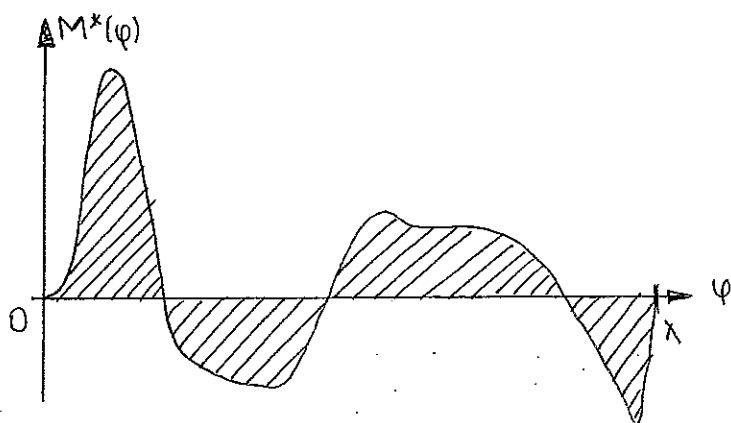
Donde  $I$  es la inercia del eje sobre el que se monta el volante de inercia y,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las velocidades angulares del eje en los instantes  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente. Si el trabajo resistente supera al motor, la variación de la velocidad del eje es negativa; en caso contrario, la variación de la velocidad será positiva. Para un determinado incremento de trabajo  $\Delta W_1^2$ , si la inercia  $I$  es muy alta, la fluctuación de la velocidad es baja, mientras que si la inercia  $I$  es baja, la fluctuación será alta.

La inercia reducida  $I^*(\varphi)$  y el momento de fuerzas reducido  $M^*(\varphi)$  suelen ser fuertemente variables con la posición  $\varphi$  del elemento de entrada.

Dentro del grupo de máquinas rotativas se encuentran las que presentan simetría axial, lo que supone  $I^*(\varphi) \approx \text{cte}$ . En muchas de ellas, el momento reducido  $M^*(\varphi)$  es cero o bien presenta una variación tan pequeña que la propia inercia de máquina es más que suficiente para mantener una velocidad aproximadamente constante.

### 3. Cálculo exacto del volante de inercia. Método gráfico de Wittenbauer.

Supóngase una máquina de la que se conoce su ciclo de funcionamiento. El primer paso consiste en obtener un diagrama de momentos reducidos



Se trata de calcular el momento de inercia  $I$  del volante de una máquina que girando a una velocidad de régimen  $\omega_a$ , consiga un grado de irregularidad  $\epsilon$ . En régimen permanente, el área total de  $M^*(\varphi)$  a lo largo de un ciclo de movimiento es nula. Se dispone de todos los datos de la máquina para calcular la inercia reducida del mecanismo  $I^*(\varphi)$ , sin considerar el volante.

Despreciando el efecto de las fuerzas de rozamiento:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (I + I^*(\varphi)) \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} (I + I^*(\varphi_0)) \cdot \omega_0^2$$

En forma diferencial

$$M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} d[(I + I^*(\varphi)) \omega^2]$$

Realizando el cambio de variable  $z = (\omega/\omega_a)^2$ :

$$\frac{2}{\omega_a^2} \cdot M^*(\varphi) \cdot d\varphi = d[(I + I^*(\varphi)) z]$$

Integrando

$$\frac{2}{\omega_a^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d(\varphi) = (I + I^*(\varphi)) z - (I + I^*(\varphi_0)) z_0 \quad ; \quad F(\varphi) = \frac{2}{\omega_a^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi$$

$$z = \frac{F(\varphi) + (I + I^*(\varphi_0)) z_0}{I + I^*(\varphi)}$$

Para determinar los valores máximo y mínimo de la velocidad angular del eje de la máquina se utiliza el denominado diagrama energético de Wittenbauer que representa  $F(\varphi)$  en función de  $I^*(\varphi)$

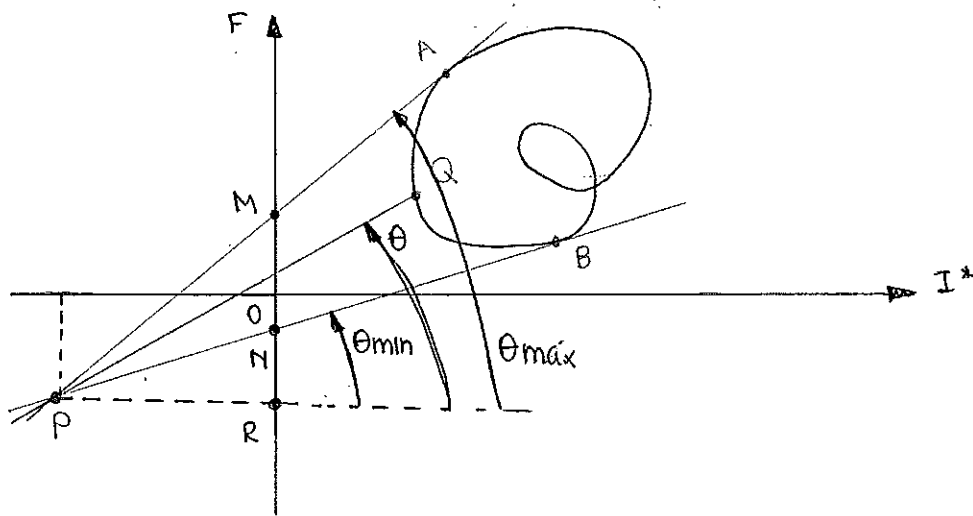
Se obtiene que:

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\min} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

A partir de aquí, el método de Wittenbauer se materializa en los siguientes pasos:

- ⊗ Trazar la gráfica  $F(p)$  en función de  $I^*(p)$ .
- ⊗ A partir de  $\varepsilon$  calcular  $\theta_{\max}$  y  $\theta_{\min}$
- ⊗  $\theta_{\max}$  y  $\theta_{\min}$  sitúan el punto P en el gráfico  $F-I^*$ .
- ⊗ La abscisa del punto P es el momento de inercia,  $I$ , del volante



Si el valor de irregularidad  $\varepsilon$  es muy pequeño, pueden determinarse las intersecciones de dichas tangentes con el eje de ordenadas.

$$\overline{MN} = \overline{MR} - \overline{NR} = I \cdot (\operatorname{tg} \theta_{\max} - \operatorname{tg} \theta_{\min})$$

Y teniendo en cuenta

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} - \operatorname{tg} \theta_{\min} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_d^2}$$

$$\overline{MN} = I \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min})}{\omega_d^2} = 2I\varepsilon$$

Luego

$$I = \frac{\overline{MN}}{2\varepsilon}$$

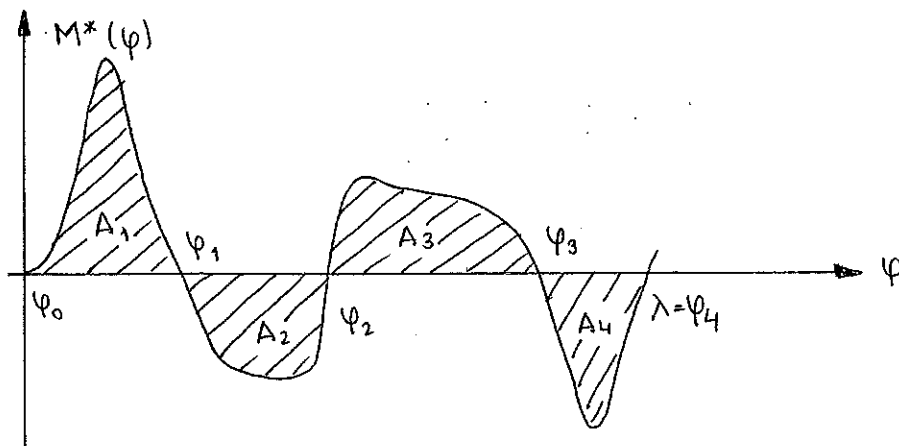
#### 4. Cálculo aproximado del volante.

Se parte de la expresión

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (I + I^*(\varphi)) \omega^2 - \frac{1}{2} (I + I^*(\varphi_0)) \omega_0^2$$

Se asume hipótesis de que la inercia del volante  $I$  es muy superior a la inercia reducida  $I^*(\varphi)$ .

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2)$$



Si la máquina trabaja en régimen se verificará que:

$$\int_0^{\lambda} M^*(\varphi) d\varphi = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

Donde

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^*(\varphi) d\varphi = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^*(\varphi) d\varphi = A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_3} M^*(\varphi) d\varphi = A_3 = \frac{1}{2} I (\omega_3^2 - \omega_2^2)$$

$$\int_{\varphi_3}^{\varphi_4} M^*(\varphi) d\varphi = A_4 = \frac{1}{2} I (\omega_0^2 - \omega_3^2)$$

Concluimos que  $\omega_1$  y  $\omega_3$  son máximos puesto que la integral  $A_i$  es positiva; de igual manera  $\omega_2$  y  $\omega_4 = \omega_0$  serán mínimos por ser la integral negativa.

Se identifican de manera sistemática en las denominadas áreas acumuladas  $S_i$ :

$$S_1 = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

$$S_2 = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_0^2)$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} I (\omega_3^2 - \omega_0^2)$$

$$S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} I (\omega_4^2 - \omega_0^2)$$

$$S_{\max} - S_{\min} = \frac{1}{2} I (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

$$S_{\max} - S_{\min} = \frac{1}{2} I (\omega_{\max} + \omega_{\min}) (\omega_{\max} - \omega_{\min}) = I E \omega_a^2$$

De donde deducimos que

$$I = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{E \omega_a^2}$$

La simplificación realizada consiste en despreciar  $I^*(\rho)$  frente a  $I$

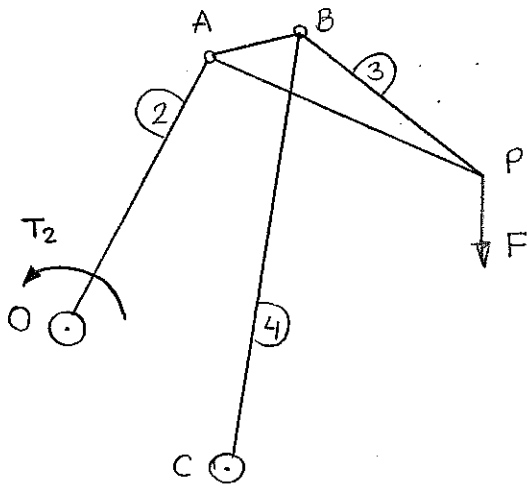
5. Funciones de los volantes de inercia.

# 1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE MAQUINARIA

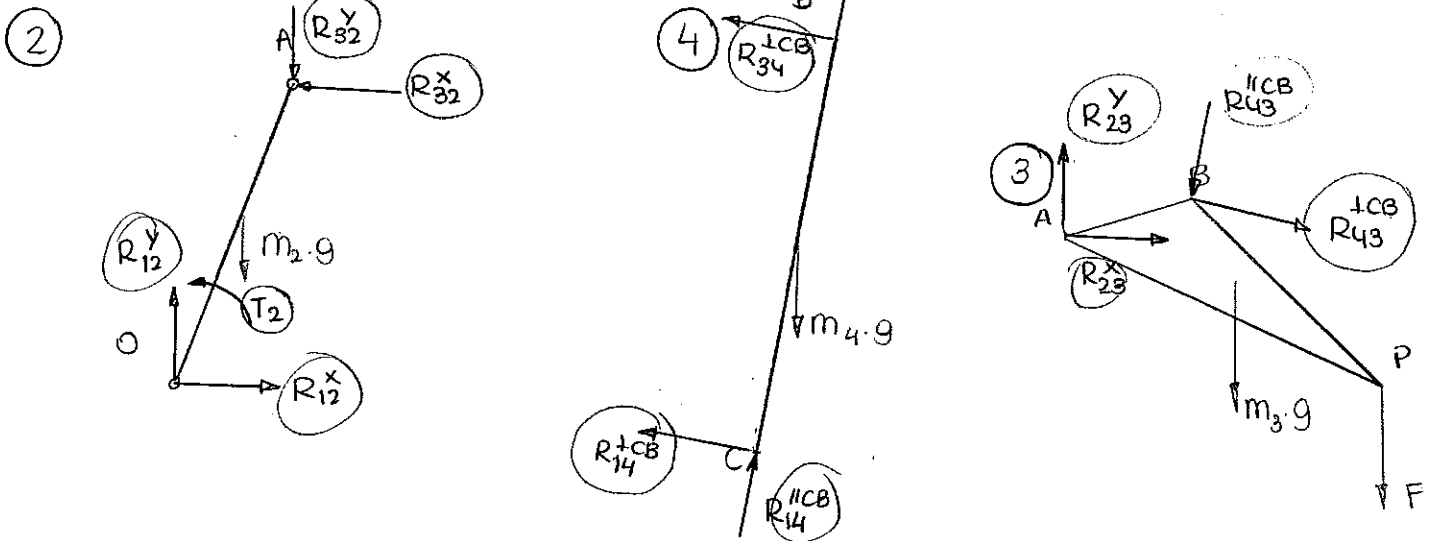
## P.23. EJEMPLO DE APLICACIÓN

⊗ Análisis cuasi-estático.

⊗ se considerará despreciable el efecto del rozamiento en los pares cinemáticos.



## ⊗ DIAGRAMAS DE SÓLIDO LIBRE



1) Partimos del elemento 4. Planteando la ecuación de equilibrios de momentos en el punto C, obtenemos  $\sum \overset{\rightarrow +CB}{R}_{34}$ . Asimismo, planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección  $\perp$  a CB obtenemos  $\sum \overset{\rightarrow +CB}{R}_{14}$ .

2) Del elemento 3 conocemos  $\overset{\rightarrow +CB}{R}_{43} = - \overset{\rightarrow +CB}{R}_{34}$ ; de esta forma tenemos 3 incógnitas  $(\overset{\rightarrow y}{R}_{23}, \overset{\rightarrow x}{R}_{23})$  y  $(\overset{\rightarrow +CB}{R}_{43})$ . Planteando las 3 ecuaciones del equilibrio estático para el elemento 3 resolveremos todas las incógnitas.

3) Volviendo al elemento 4 y planteando el equilibrio de fuerzas paralelas a

CB obtenemos  $\begin{pmatrix} \vec{R}_{14}^{CB} \\ R_{14} \end{pmatrix}$  ( $\vec{R}_{34}^{CB} = -\vec{R}_{43}^{CB}$ )

4) Por último sabiendo que  $\vec{R}_{23}^y = -\vec{R}_{32}^y$ ;  $\vec{R}_{23}^x = -\vec{R}_{32}^x$  y aplicando las tres ecuaciones

de equilibrio del elemento 2 hallamos las 3 últimas incógnitas  $\begin{pmatrix} \vec{R}_{12}^x \\ R_{12}^x \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \vec{R}_{12}^y \\ R_{12}^y \end{pmatrix}$  y  $T_2$