eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

2. Gaia II

Hartmann-en Teorema
Euler-Savary-ren formula

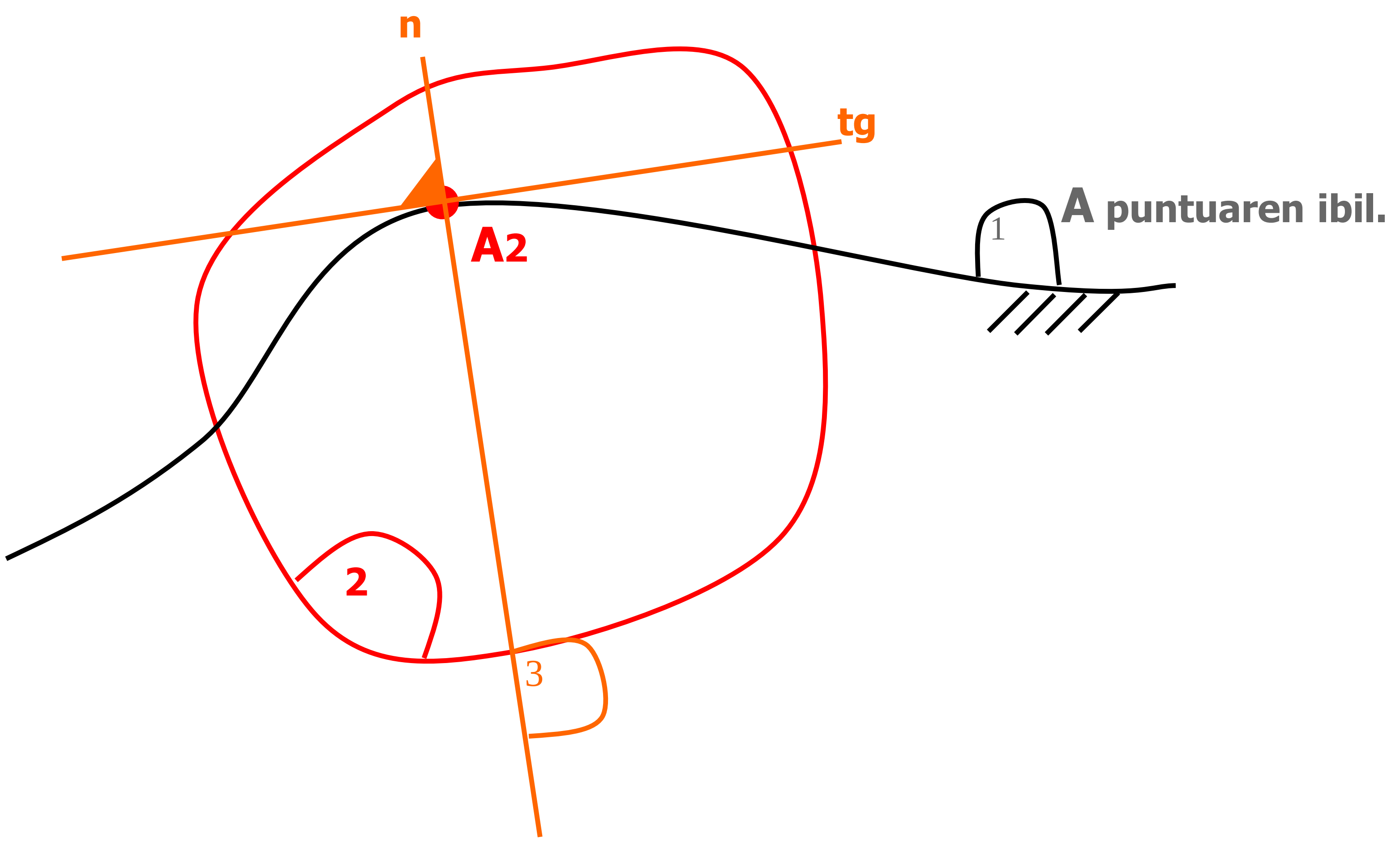
Aurkibidea

1. **Hartmann**-en teorema
2. **Euler-Savary**-ren formula. Lehenengo eta bigarren adierazpenak.

Hartmann-en Teorema

- Demagun **2. plano mugikorreko puntu bat, A_2**, non puntu honen ibilbidea inprimatzen dugu 1go plano finkoan.

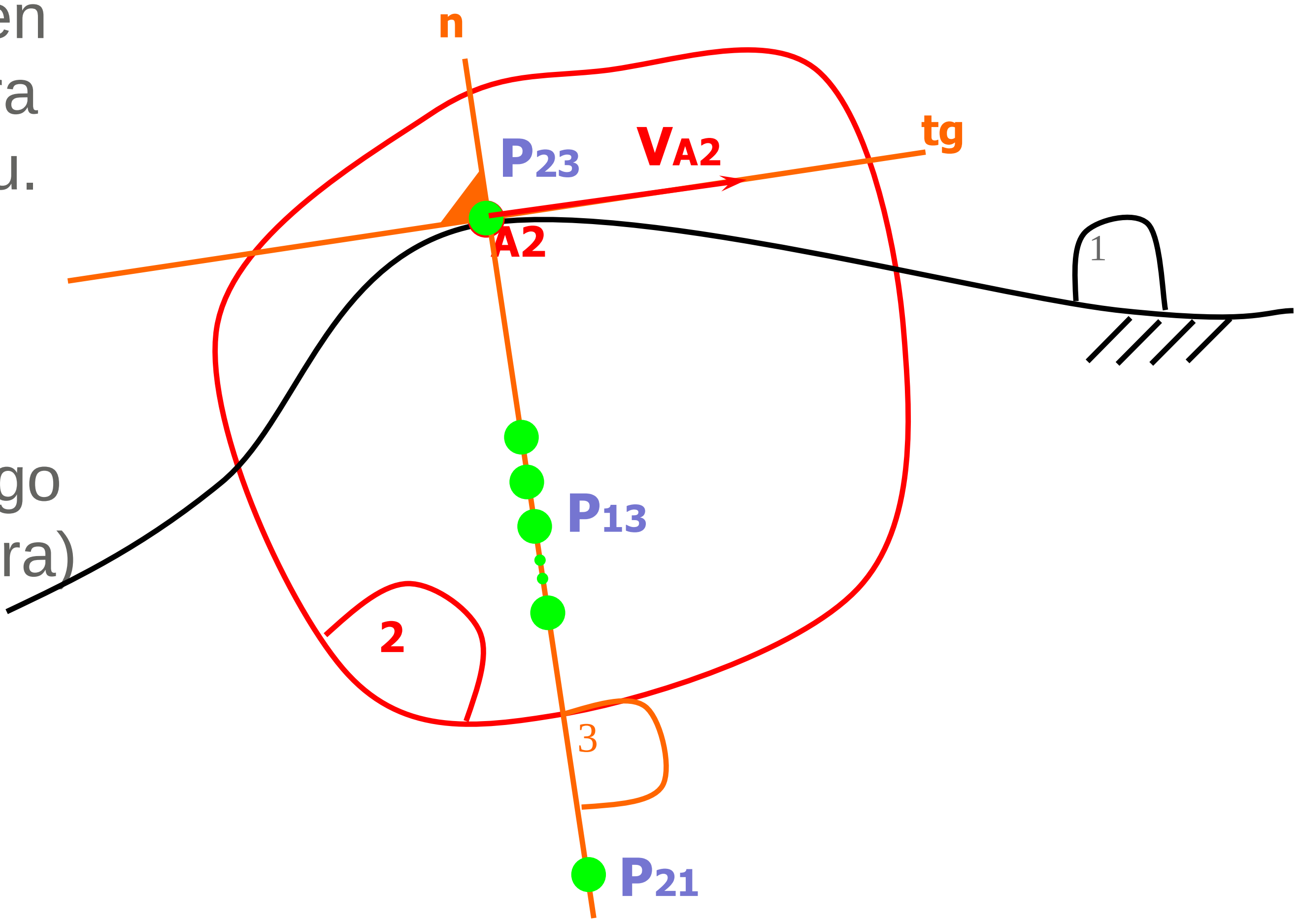
- Beste plano baten higidura kotutan har dezagun:
  - **3. planoa definitzen da**, A puntuak egiten duen ibilbidearekiko normalaren eta ukitzailearen bidez.



Hartmann-en Teorema

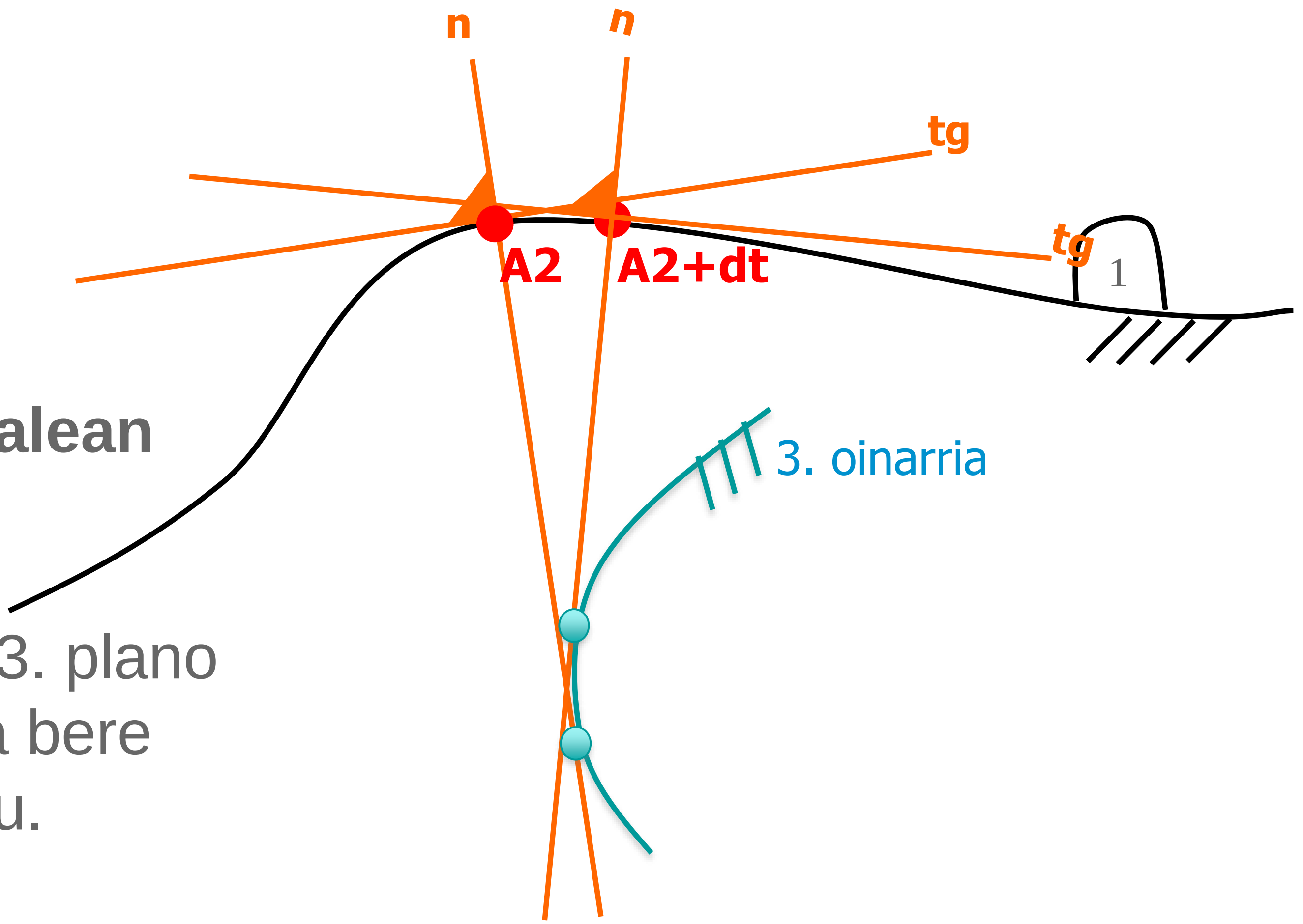
Mugimenduaren polo erlatiboak

- P_{21}: A puntuaren ibilbidearen normalean egongo da kokatuta
- P_{23}: dakigunez, A puntua 2. eta 3. planoen barnekoa da. Puntu honek, biraketa lotura zinematiko bat balego bezala jokatzen du. Beraz, **A puntua P_{23} poloa** da.
- P_{13}: Aronhold-Kennedy-ren teorema aplikatuz, P_{13} normalaren gainean egongo da (hiru poloak lerrokatuta egon behar dira)



Hartmann-en Teorema

- Suposatu bi aldiune desberdinak: t eta (t+Δt)



P_{13} beti egongo da normalean kokatuta.

Beraz, normala izango da 3. plano mugikorraren **erruleta**. Eta bere oinarria marraztu dezakegu.

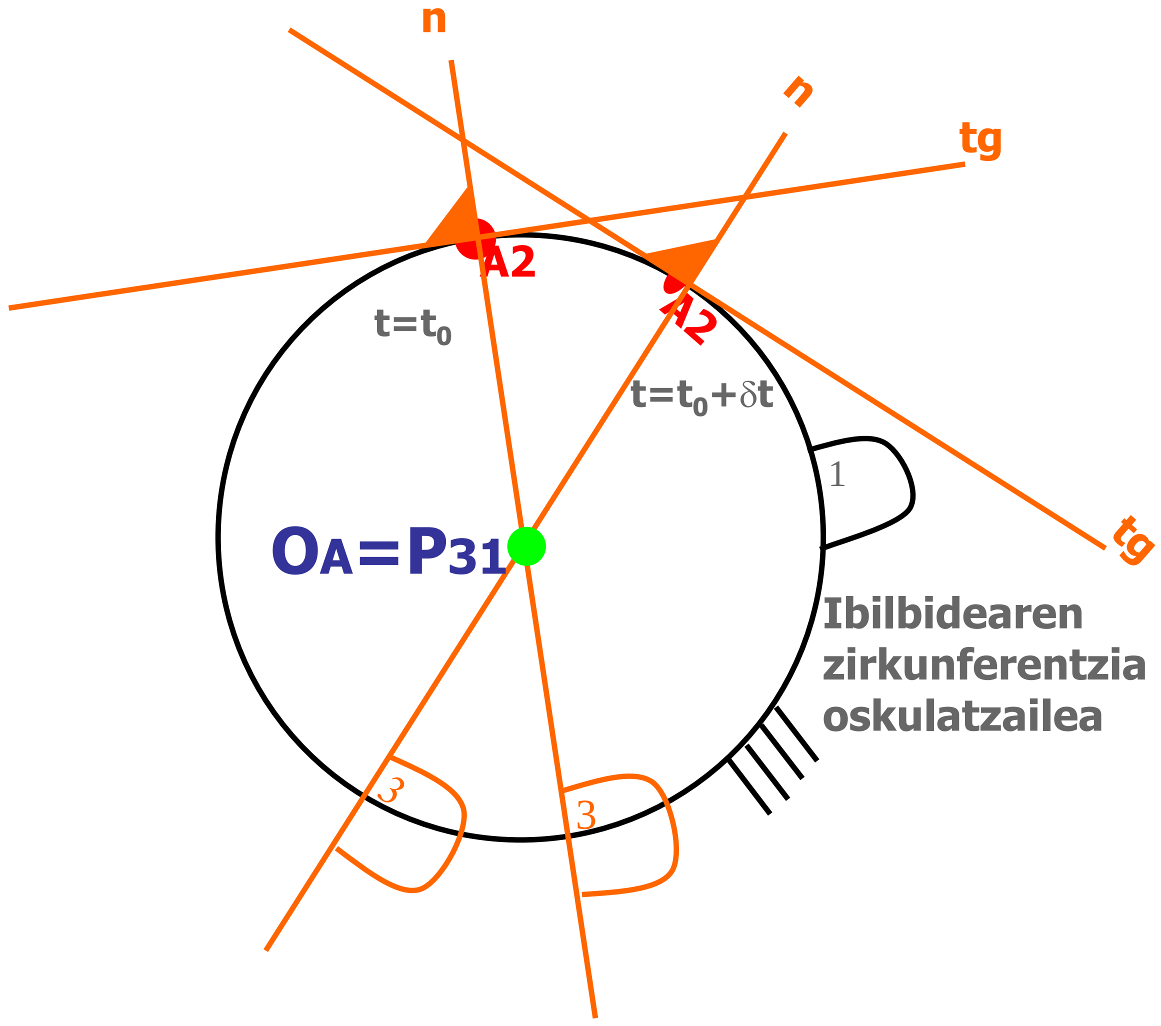
Non dago zehatz-mehatz P31?

Azter dezagun A2 puntuaren mugimendu diferentzial bat bere ibilbidearen gainean, azken hau bere zirkunferentzia oskulatzailearen bidez hurbilduz

Hartmann-en Teorema

Mugimendu diferentziala aztertuz: A puntuaren ibilbideak arku bat deskribatzen du, bere **zirkunferentzia oskulatzailea**ren gainean.

3. planoko mugimendua: bira diferentzial bat O_A zentruarekiko



Beraz, **$O_A=P_{31}$**

Gainera, O_A zirk. oskulatzailearen zentrua da, aldiune horretan; beraz, A puntuaren ibilbidearen zentrua.

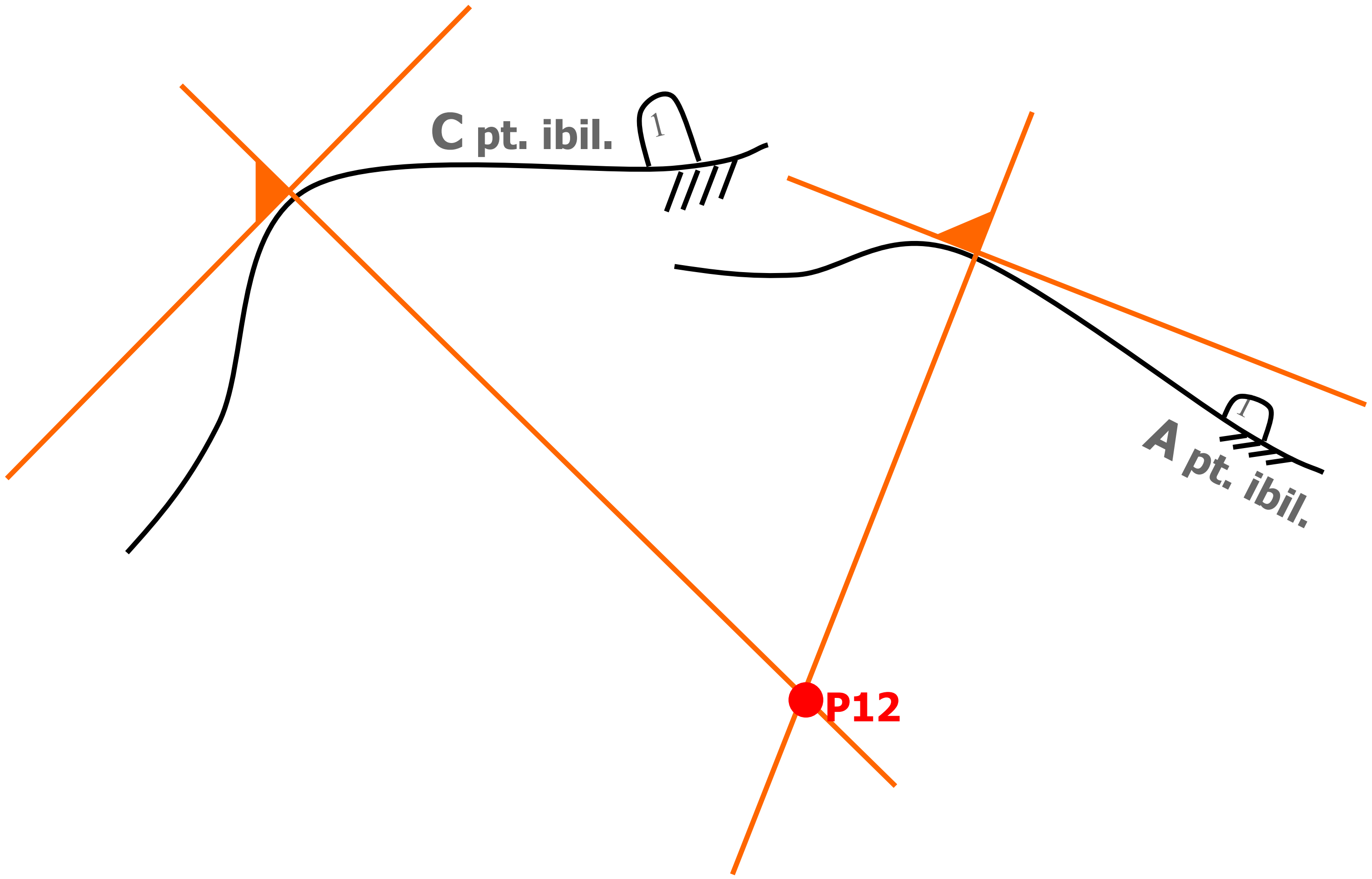
3.planoko oinarria, A puntuaren ibilbidearen kurbatura zentroen leku geometrikoa izango da, hau da, A-ren ibilbidearen eboluta

Laburbilduz: "Puntu baten ibilbidearen kurbatura zentroa, ibilbide horren plano normalaren ABZ-rekin bat dator"

Hartmann-en Teorema

3. planoaren mugimendua guztiz definituta dago, baina 2. planoaren mugimendua?

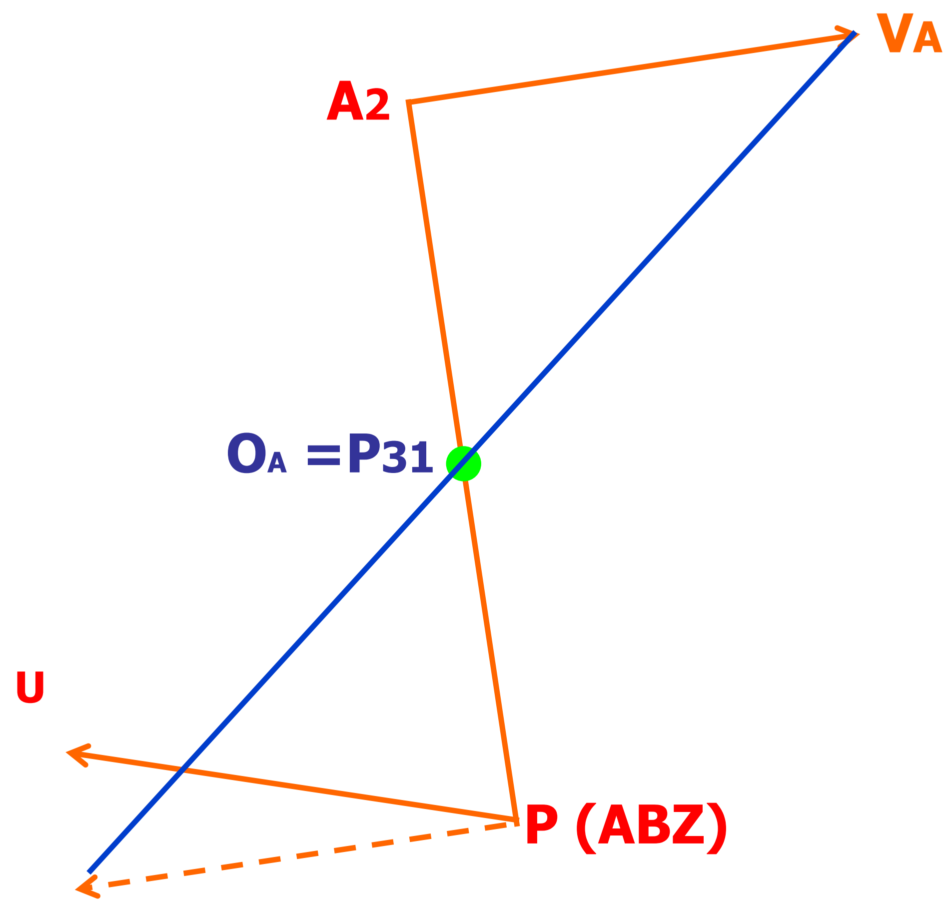
Bakarrik A puntuaren abiadura dakigu. Beraz, **P_{12} eskuratzeko beste puntu baten mugimendua jakin behar da**



Hartmann-en Teorema

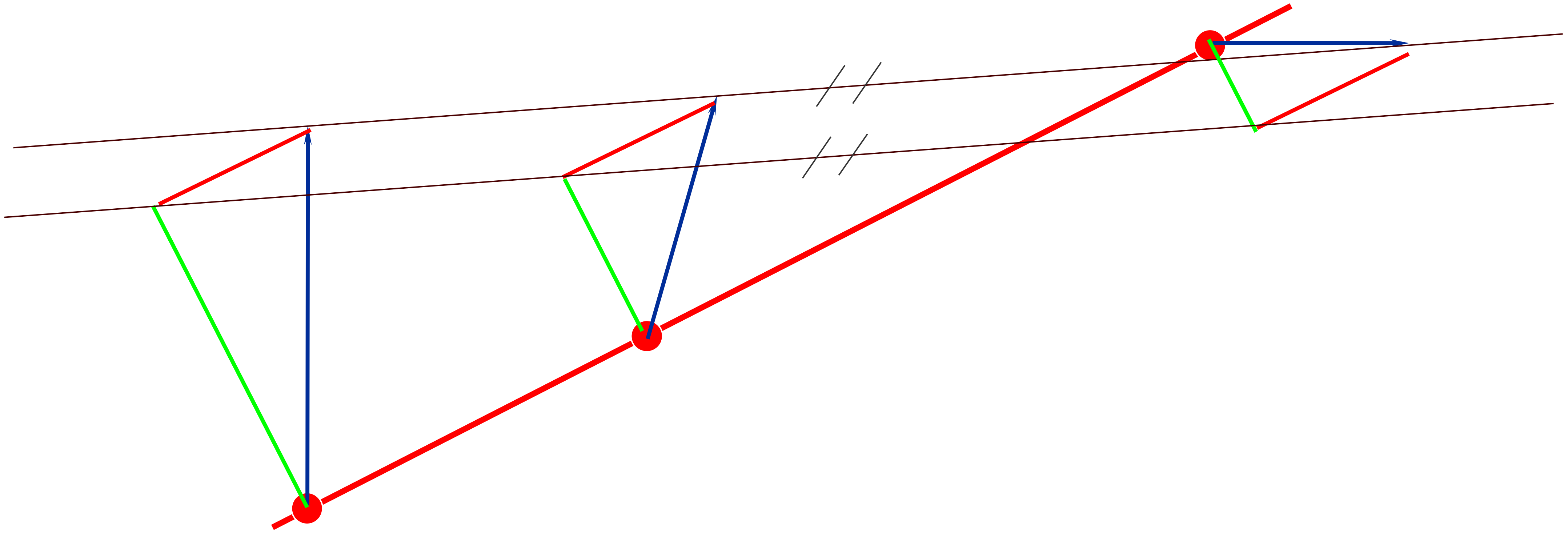
Hartmann-en teoremak honako hau ezartzen du:

“Puntu baten abiaduraren bektorearen muturra, bere ibilbidearen kurbatura zentrua eta jarraipen abiaduraren osagai paraleloaren muturra lerrokatuta daude”



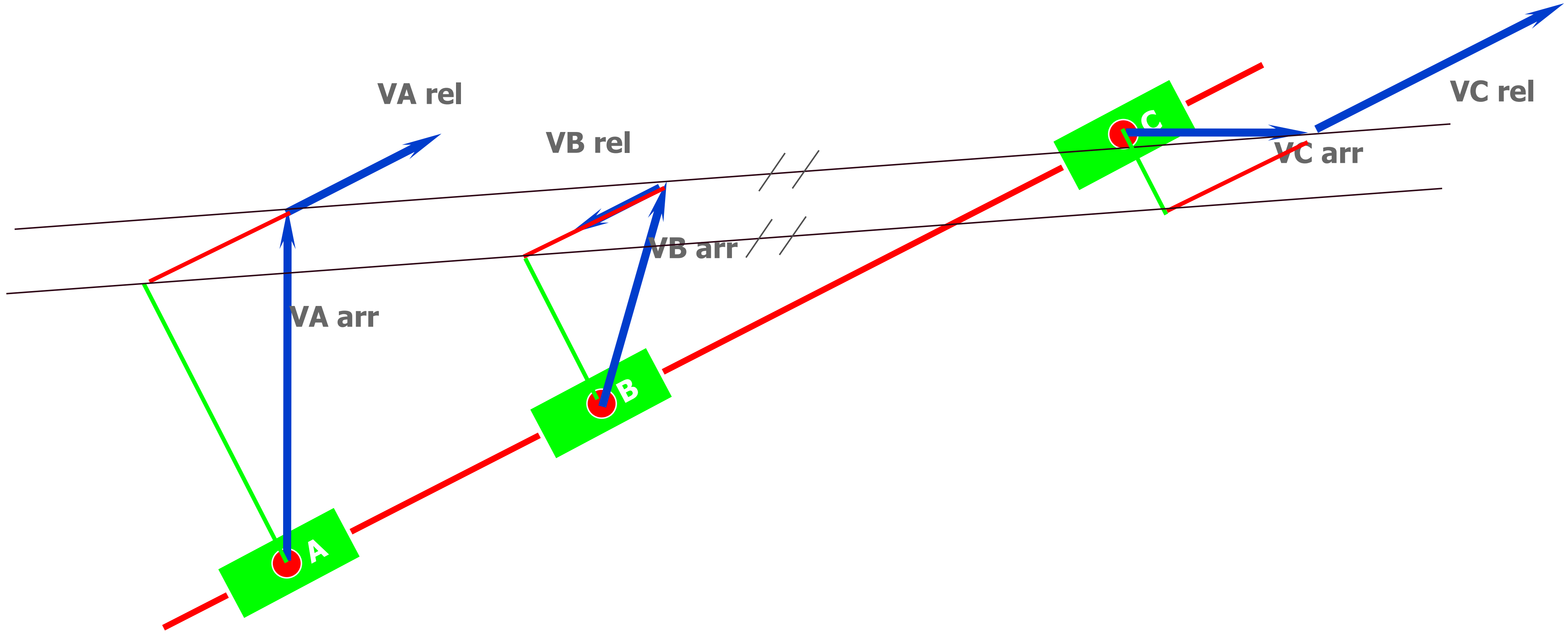
Hartmann-en Teorema

- Burmester-en teoremak dioenez: Solido zurrun batean lerrokaturik dauden hiru puntu hartuta, bai euren abiaduren murrutak, bai abiadura horien osagai normalen muturrak lerrokaturik egongo dira



Hartmann-en Teorema

- Ez bakarrik solido zurrun bateko puntuak, baizik eta edozein aldiunetan lerrokaturik dauden hiru puntu hartuta, bai euren abiaduren murrutak, bai abiadura horien osagai normalen muturrak lerrokaturik egongo dira

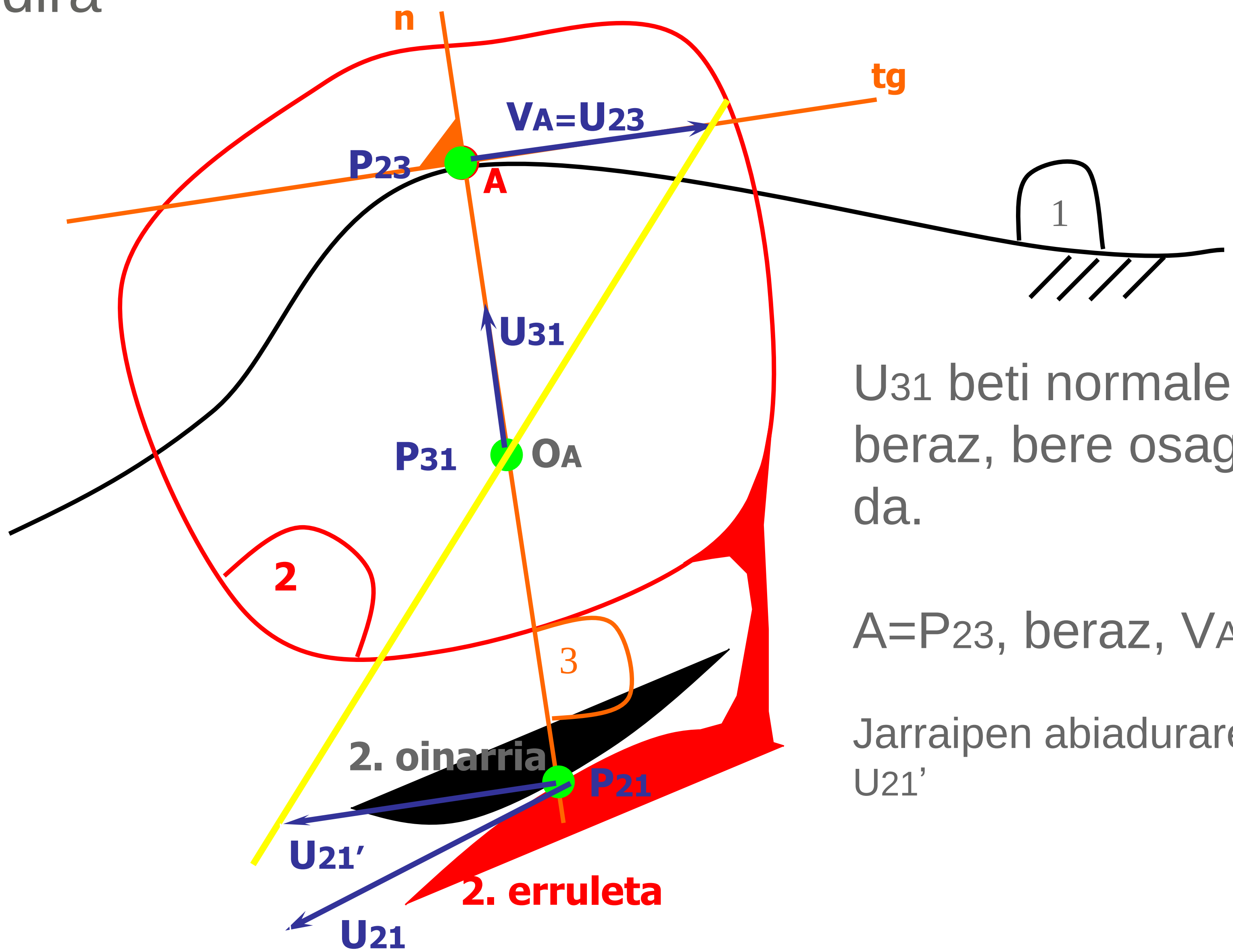


Hartmann-en Teorema

Frogapena

- P_{23},P_{31},P_{21} beti lerrokatuta (Aronhold-Kennedy)

- Beraz, **hiru puntu hauen abiaduren osagai normalak lerrokatuta** egon behar dira



U_{31} beti normalean dago kokatuta, beraz, bere osagai elkartzuta nulua da.

$A=P_{23}$, beraz, $V_A=U_{23}$

Jarraipen abiaduraren osagai normala da U_{21}'

Euler-Savary-ren formula

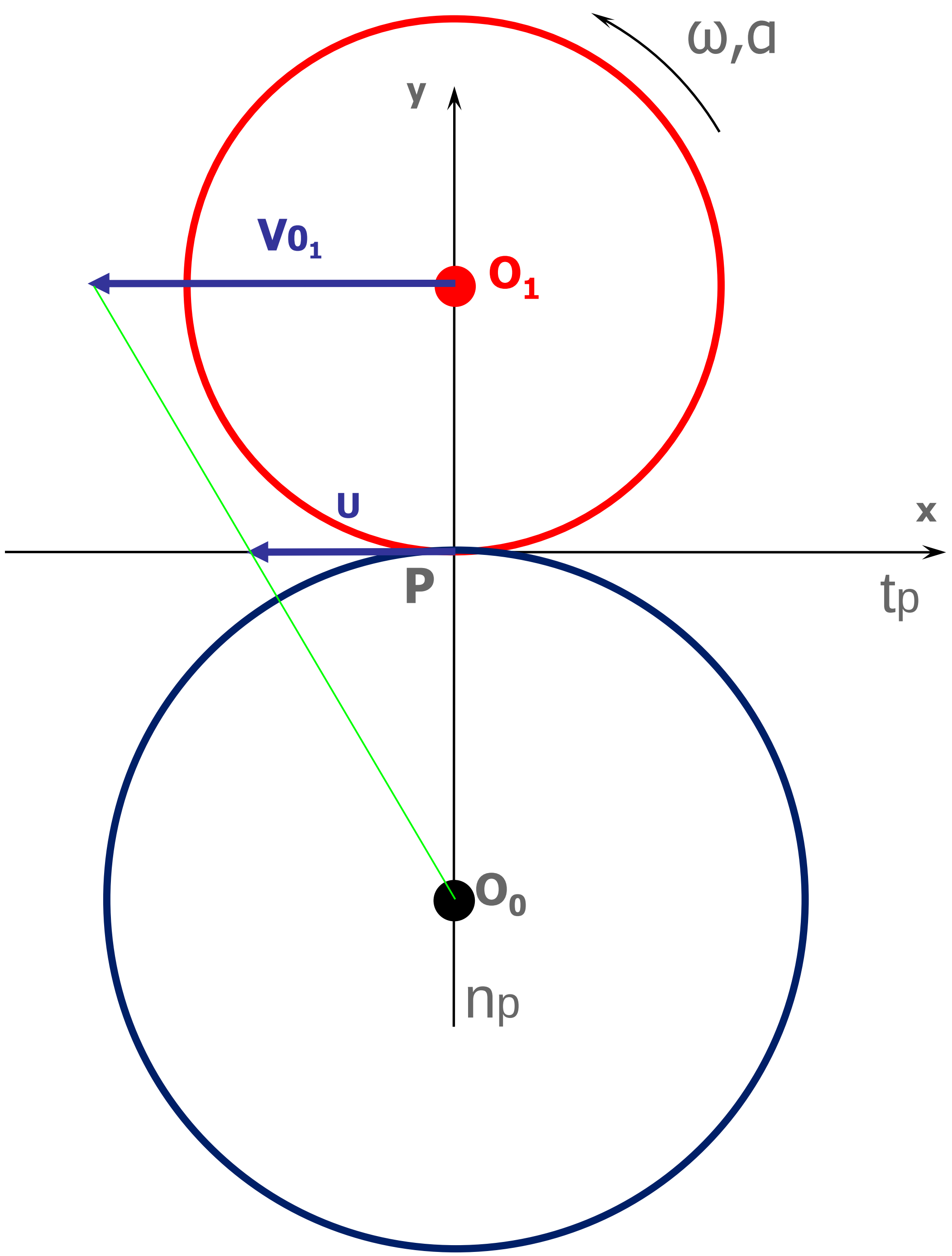
Hartmann-en teoremaren aplikazio analitikoa oinarriaren eta erruletaren kurbatura zentruei

Oinarria eta erruletaren ordez, heuren zirkunferentzia oskulatzaileak erabiltzen dira

“y” ardatza: polotik erruletaren kurbatura zentrurantz (normal polarra)

“x” ardatza: w positiboa izan dadin “z” ardatzaren arabera (ukitzaile polarra)

O_1 puntuaren ibilbidearen kurbatura zentrua: O_0 puntua. Beraz, Hartmann-en teorema beteko dute.



Hirukien antzekotasuna: $\dfrac{v_{O_1}}{u} = \dfrac{\overline{O_0P} + \overline{PO_1}}{\overline{O_0P}}$

$$\frac{\omega \times r}{u} = \frac{r_0 + r_1}{r_0} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

Euler-Savary-ren formula

- **Demagun plano mugikorraren puntu bat, A puntua.**

$$\frac{v_A}{u'} = \frac{\overline{O_AP}+\overline{PA}}{\overline{O_AP}}$$

$$\frac{\omega\cdot\overline{PA}}{u'} = \frac{\overline{O_AP}+\overline{PA}}{\overline{O_AP}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega}{u} = \frac{\overline{O_AP}+\overline{PA}}{\overline{O_AP}\cdot\overline{PA}}\cdot\operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{\frac{\omega}{u} = \left(\frac{1}{\overline{O_AP}^{*}}+\frac{1}{\overline{PA}^{*}}\right)\cdot\operatorname{sen}\theta}$$