Aljebra 2018ko urriak 31

Denbora: 60’
Oharra: Arrazoitu erantzunak

1.

a) Definitu E espazio bektorial baten *sistema sortzaile*aren kontzeptua.

b) Definitu oinarri batekiko *bektore baten koordenatu*en kontzeptua.

c) Arrazoitu hurrengo matrizeak oinarri aldaketa adierazi ahal duen espazio bektorial jakin batean (hau da, ea B matrizea iragaite matrizea izan ahal den espazio bektorial batean):

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Izan bedi $S=\{A\in \mathrm{E}_{2x2}(\mathrm{R}) / h(A)=1\}$. Egiaztatu S E_{2x2}-ko azpiespazio bektoriala den.

1.5 puntu

2. Aztertu $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$ matrize multzoa sistema sortzaile osoa den E_{2x2}–rako (2x2-ko matrizeen espazio bektoriala).

1.5 puntu

3. Izan bitez $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrizea eta $F=\{\mathrm{A}\in \mathrm{E}_{2x3}(\mathrm{R}) / \mathrm{M}\cdot\mathrm{A}=(0)\}$ multzoa.

a) Aztertu F E_{2x3}-ko azpiespazio bektoriala den.

b) Kalkulatu F-ren dimentsioa eta bere oinarri bat.

c) Eztabaidatu, k parametroaren arabera, $\vec{x}$ bektorea F-ren barne dagoenentz, non

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

3 puntu

4. Izan bitez P_3 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala eta U P_3-ko hurrengo azpimultzoa:

$$U=\{\ p\in P_3 / a+bx^2+(a-b)x^3\}$$

a) Kalkulatu U-ren dimentsioa, bere oinarri bat eta ekuazio kartesiarrak.

b) Osatu U-ren oinarria, P_3-ko oinarri bat lortzeko.

2 puntu

5. Izan bedi P_2 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala. Eta izan bitez P_2-ko hurrengo oinarriak: $B_1=\{1,x,1-x+x^2\}$ eta $B_2=\{x^2,x^2-x,1+x\}$.

a) Baldin ***p***-ren koordenatuak, B_1 oinarriarekikoak, $p_{B1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ badira, kalkulatu ***p***-ren koordenatuak, B_2 oinarriarekikoak.

b) Zein da ***p*** polinomioa?

2 puntu

①

a) Teoria

b) Teoria

c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ezin da inagaite matrizea izan, ez delako karratua.

d) $S = \{ A \in \mathbb{E}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, h(A) = 1 \}$

i) ez-hutsik? $\longrightarrow (0)_{2\times2} \in S$? $\longrightarrow h((0)) = 0 \neq 1 \Rightarrow \boxed{S \text{ ez da AEB}}$

②

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \dim \mathbb{E}_{2x2} = 4$$

↳ Lehenengo lau matrize linealki independenteak dira, beraz, lehenengo lau horiekin (espazio bektorialaren dimentsioa berdin) nahiko zen sistema sortzaile osoa izateko ($\mathbb{E}_{2x2}$-koa). Gehitzen badugu (matrize gehiago), sistema sortzaile osoa izaten jarraitzen du.

Beraz, bai, bada sist. sortzaile osoa ($\mathbb{E}_{2x2}$-koa).

③

$M=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ $F=\{A\in \mathbb{E}_{2\times3}(\mathbb{R}) \,/\, M\cdot A=(0)\}$

a) F AEB?

i) ez-hutsik $\rightarrow (0)_{2\times3}\in F?$ $\rightarrow M\cdot(0)=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ✓

ii) $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}\in F \rightarrow \left\{\begin{matrix}M\cdot A=(0)\\M\cdot B=(0)\end{matrix}\right.$

$(A+B)\in F? \rightarrow M\cdot(A+B)=(0)?$

$M\cdot(A+B)=MA+MB=(0)+(0)=(0)$ ✓

iii) $A\in F \rightarrow M\cdot A=(0)$

$\lambda\in\mathbb{K}$

$(\lambda A)\in F? \rightarrow M\cdot(\lambda A)=(0)?$

$M\cdot(\lambda A)=M\cdot\lambda A=\lambda\cdot MA=\lambda\cdot(0)=(0)$ ✓

Beraz, $\boxed{F \ \mathbb{E}_{2\times3}\text{-ko A.E.B. da}}$

b) $M\cdot A=(0)$

$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}a+2d=0\\b+2e=0\\c+2f=0\\2a+4d=0\\2b+4e=0\\2c+4f=0\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}\}\text{ 3 baldintza l.i.}\\ \}\text{ menpekoak aurrekoekikoak}\end{matrix}$

$\dim \mathbb{E}_{2\times3}=\dim F+\text{bald. kp.}$

$6 \ = \dim F + 3 \rightarrow \boxed{\dim F=3}$

$\left\{\begin{matrix}a=-2d\\b=-2e\\c=-2f\end{matrix}\right.$ Parametro askeei balioak emanez:

$$\boxed{B_F=\left\{\begin{bmatrix}-2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}}$$

c) $\vec{x}=\begin{bmatrix}-2&-2&-4\\1&+1&k\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-2&0&0&-2\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-4\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&k\end{bmatrix}\xrightarrow[E_6+\frac{E_3}{2}]{E_4+\frac{E_1}{2} \quad E_5+\frac{E_2}{2}}\begin{bmatrix}-2&0&0&-2\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&k-2\end{bmatrix}$$

Baldin $k=2$, $\vec{x}\in F$

Baldin $k\neq2$, $\vec{x}\notin F$

④ $\mathbb{P}_3 \equiv \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$

$U = \{ p \in \mathbb{P}_3 / a + bx^2 + (a-b)x^3 \}$

$\hookrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \delta = \alpha - \gamma \end{cases} \rightarrow$ 2 baldintza kp.

a)

$\dim \mathbb{P}_3 = \dim U +$ bald. kp ; $\boxed{\dim U = 4 - 2 = 2}$

Parametro askeei balioak emanez: $\boxed{B_U = \{1 + x^3, x^2 - x^3\}}$

Ek: $\boxed{\begin{cases} \beta = 0 \\ \delta = \alpha - \gamma \end{cases}}$

b) $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ eta $\dim U = 2$, berat, bi bektore behar dugu B_U osatzeko eta $B_{\mathbb{P}_3}$ lortzeko.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & -1 & \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_3]{E_4 - E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & -1 & \delta_1 - \alpha_1 & \delta_2 - \alpha_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4 + E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 - \alpha_1 + \gamma_1 & \delta_2 - \alpha_2 + \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Heina $= 4$ izateko (dimentsioa berdin): $\begin{cases} \beta_1 \neq 0 \\ \delta_1 - \alpha_1 + \gamma_1 = 0 \\ \delta_2 - \alpha_2 + \gamma_2 \neq 0 \end{cases}$

Horiek betetzen dituen bektore bi: $\underset{\{x\}}{(0,1,0,0)}$ eta $\underset{\{1\}}{(1,0,0,0)}$
(polinomio)

Beraz, $\boxed{B_{\mathbb{P}_3} = \{1 + x^3, x^2 - x^3, x, 1\}}$

⑤ $\mathbb{P}_2 = a + bx + cx^2$ $\qquad B_1 = \{\underset{p_1}{1}, \underset{p_2}{x}, \underset{p_3}{1-x+x^2}\}$ $\qquad B_2 = \{\underset{q_1}{x^2}, \underset{q_2}{x^2-x}, \underset{q_3}{1+x}\}$

a) $\vec{x}_B = P \cdot \vec{x}_{B'}$

Iragaite matrizea lortzeko, nabarmen da →
$$\left.\begin{cases} q_1 = -p_1 + p_2 + p_3 \\ q_2 = -p_1 \qquad + p_3 \\ q_3 = p_1 + p_2 \end{cases}\right\} P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nabarmen ez bada, atera ahal da modu honetan:

adibidez q_1 p_1, p_2 eta p_3-ren arabera:

$$\underbrace{x^2}_{q_1} = a\underbrace{1}_{p_1} + b\underbrace{x}_{p_2} + c\underbrace{(1-x+x^2)}_{p_3};$$

$$x^2 = (a+c) + (b-c)x + cx^2 \quad \begin{cases} 0 = a+c \rightarrow 0 = a+1; \ \boxed{a=-1} \\ 0 = b-c \rightarrow 0 = b-1; \ \boxed{b=1} \\ \boxed{1=c} \end{cases} \Big\} \ q_1 = -p_1 + p_2 + p_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -1 = -a-b+c \longrightarrow -1 = -1+\cancel{b}-\cancel{b}+b; \ b=0 \\ 1 = a+c \longrightarrow 1 = 1-b+c; \ b=c \qquad c=0 \\ 1 = a+b; \ a = 1-b \qquad a=1 \end{cases}$$

Hau da, $\boxed{p_{B_2} = (1,0,0)}$

b) B_1 edo B_2 erabili ahal dira.

B_1: $p = -1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = -\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{x} + x^2 = x^2$

B_2: $p = 1 \cdot q_1 + 0\, q_2 + 0\, q_3 = x^2$

$\boxed{p(x) = x^2}$