DENBORA : 65 min

1. Izan bedi $\mathbf{P}_2$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala. Froga ezazu U multzoa P_2-ko azpiespazio bektoriala den:

$U = \{ p(x) \in \mathbf{P}_2 \,/\, p(5) = 0 \}$, 2 edo maila txikiagoko polinomioak soluzioa berdin 5 daukatenak

1.5 puntu

2. Egiaztatu $x+2x^2+2x^3$ polinomioa $p(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ eta $q(x)=1+x^2$ polinomioen konbinazio lineala den.

Kalkulatu p(x)-k eta q(x)-k sortutako azpiespazio bektorialaren ekuazio kartesiarrak.

2 puntu

3. 2 ordenako matrize karratuen espazio bektorialean hurrengo bektoreen familia dago:

$$\left\{ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Egiaztatu bektoreen familia M_{2x2}-ko sistema sortzaile osoa den.
b) Aurkitu bektoreen familiak sortutako azpiespazioaren oinarri bat eta dimentsioa.
c) Ze baldintza M_{2x2}-ko bektore batek bete behar du Span$\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}\}$ sisteman egoteko?
d) Osatu $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}$ bektoreek sortutako azpiespazioaren oinarria M_{2x2}-ko oinarri bat lortu arte.

3.5 puntu

4. Arrazoitu hurrengo baieztapenak egiazkoak ala gezurrezkoak diren:

a) Baldin $\mathbb{R}^n$ -ko $\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},...,\mathbf{x_n}\}$ bektore guztiak ez-nuluak badira $\Rightarrow$ $\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},...,\mathbf{x_n}\}$ askea da.
b) Baldin $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ askea bada $\Rightarrow$ $\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}-3\mathbf{y}\}$ askea da.
c) Ez dago $\mathbb{R}^4$ -ko oinarririk osagai nulu batekiko bektorea izanez.
d) Baldin $\mathbb{R}^4$ -ko edozein oinarritik bektore bi kentzen bada, geratzen den multzoa $\mathbb{R}^2$ -ko oinarri bat da.

1.5 puntu

5. $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean, $\vec{x}$ bektoreak ohiko oinarriarekiko hurrengo koordenatuak dauzka:

$$\vec{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osatu $\left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bektoreen multzoa $B' = \{\mathbf{u_1},\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ oinarria lortzeko, non oinarri horrekiko $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak hurrengoak izango diren: $\vec{x}_{\mathrm{B'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.5 puntu

(1) $\mathbb{P}_2 \rightarrow p(x) = a + bx + cx^2$

$U = \{p / p(5) = 0\} \rightarrow p(5) = a + 5b + 25c = 0;$

$a = -5b - 25c = -5(b+5c)$

i) ez-hutsik: polinomio nulua: $0 + 0x + 0x^2 = 0$

$0 = -5(0 + 5\cdot 0) = 0$ ✓

ii) $p, q \in U \rightarrow \begin{cases} p(5) = 0 \ ; \ a = -5(b+5c) \\ q(5) = 0 \ ; \ a' = -5(b'+5c') \end{cases}$

$(p+q) \in U$?

$\underbrace{a + bx + cx^2}_{p(x)} + \underbrace{a' + b'x + c'x^2}_{q(x)} = a + a' + (b+b')x + (c+c')x^2$

$a + a' = -5[b + b' + 5(c+c')] \overset{?}{=}$

$= -5(b + b' + 5c + 5c') =$

$= -5(b + 5c + b' + 5c') =$

$= -5(b+5c) - 5(b'+5c')$ ✓

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$p \in U \rightarrow p(5) = 0 \ , \ a = -5(b+5c)$

$(\alpha p) \in U$?

$\alpha a + \alpha b x + \alpha c x^2 = (\alpha p) \rightarrow \alpha a = -5(\alpha b + 5\alpha c) = -5\alpha(b+5c) =$

$= \alpha \cdot [-5(b+5c)]$ ✓

$\boxed{\text{Beraz, A.E.B. da}}$

(2) $x+2x^2+2x^3=r(x)$

$p(x)=1+2x+3x^2+4x^3$

$q(x)=1+x^2$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\3&1&2\\4&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{E_3-3E_1\\E_4-4E_1}]{E_2-2E_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&-2&2\\0&-4&2\end{bmatrix}\xrightarrow[E_4-2E_2]{E_3-E_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

r ~~polinomioak~~ ez da konbinazio lineala, baizik eta l.i.

p eta q l.i. dira (haien artean). Haien A.E.B.-ri W deituko diogu. $\dim W=2$

ek: $$\begin{bmatrix}1&1&a\\2&0&b\\3&1&c\\4&0&d\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{E_3-3E_1\\E_4-4E_1}]{E_2-2E_1}\begin{bmatrix}1&1&a\\0&-2&b-2a\\0&-2&c-3a\\0&-4&d-4a\end{bmatrix}\xrightarrow[E_4-2E_2]{E_3-E_2}\begin{bmatrix}1&1&a\\0&-2&b-2a\\0&0&c-b-a\\0&0&d-2b\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}c=a+b\\d=2b\end{array}}$$

③ $W = \left\{ \vec{e_1} = \begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, \vec{e_3} = \begin{bmatrix}2&-4\\2&0\end{bmatrix}, \vec{e_4} = \begin{bmatrix}1&5\\1&1\end{bmatrix} \right\}$

a) Sistema sortzaile <u>osoa</u> izateko M_{2x2}-koa, lau bektore independente egon behar, gutxienez. Kasu honetan, lauak l.i. izan behar dira.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-4&5\\1&0&2&1\\2&1&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-2E_1]{E_3-E_1} \begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-4&5\\0&0&0&0\\0&1&-4&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-4&5\\0&1&-4&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_2} \begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-4&5\\0&0&0&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

4-garren bektorea, menpekoa da. Beraz lauak ez dira l.i.
Beraz, W <u>ez</u> da sist. sortzaile <u>osoa</u>.

b) $\boxed{\dim W = 3}$ $\boxed{B_W = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}}_{\vec{e_1}}, \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}}_{\vec{e_2}}, \underbrace{\begin{bmatrix}1&5\\1&1\end{bmatrix}}_{\vec{e_4}} \right\}}$

c) $$\begin{bmatrix}1&0&1&a\\0&1&5&b\\1&0&1&c\\2&1&1&d\end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-2E_1]{E_3-E_1} \begin{bmatrix}1&0&1&a\\0&1&5&b\\0&0&0&c-a\\0&1&-1&d-2a\end{bmatrix} \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \begin{bmatrix}1&0&1&a\\0&1&5&b\\0&1&-1&d-2a\\0&0&0&c-a\end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_2} \begin{bmatrix}1&0&1&a\\0&1&5&b\\0&0&-6&d-b-2a\\0&0&0&c-a\end{bmatrix}$$

$\boxed{c=a}$

d) c) atalean ikusten den moduan, $c \neq a$ bada, laugarren bektorea l.i. izango da besteekin. Beraz, adibidez, $\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}$.

(4) a) Ez. Adibidez, guztiak bektore bera dira. Edo bigarrena lehenengoaren bikoitza da. Askea izateko, l.i. izan behar dira.

b) Ez. Hirugarrena besteen menpekoa da.

c) Ez. Ohiko oinarria, adibidez.

d) Bai. Oinarria bada ($\mathbb{R}^4$-koa), lau bektoreak l.i. dira, eta bi kentzen badituzu, beste bi geratuko da l.i. direnak. Eta l.i. direnez, $\mathbb{R}^2$-ko oinarri bat sortzen dute.

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot \vec{x}_{B'} = \vec{x}_B$$

$-1 + 2a = 1$; $a = 1$

$-2 + 1 + 2b = 1$; $b = 1$

$-3 + 1 + 2c = 0$; $c = 1$

$\boxed{\vec{u}_3 = (1,1,1)'}$

Oinarria izateko $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$-rekin, l.i. izan behar dira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3 - 3E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3 - E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

l.i. ✓