DENBORA : 65 min

1. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ espazio bektoriala.

a) Aurkitu bektoretako multzo bat askea dena baina sortzaile osoa ez dena.

b) Aurkitu bektoretako multzo bat sortzaile osoa dena baina askea ez dena.

c) Aurkitu bektoretako multzo bat sortzaile osoa ez dena ezta askea ere.

d) Aurkitu askea eta sortzaile osoa den bektoretako multzo bat.

2 puntu

2. Izan bedi $S = Span\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Kalkulatu *S*-ren dimentsioa, oinarri bat eta bere ekuazioak.

3 puntu

3. Izan bedi $F = \left\{ p = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathrm{R}) \,/\, a + b = 0 \right\}$.

a) Aztertu *F* multzoa P_2-ko azpiespazio bektoriala denentz.

b) Kalkulatu *F*-ren dimentsioa eta oinarri bat.

c) Osatu *b*) atalean kalkulatutako oinarria P_2-ko oinarri bat lortzeko.

3 puntu

4. Izan bedi *E* espazio bektoriala, eta izan bitez *B* eta *B'* espazio horretako bi oinarri:

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \qquad B' = \{2\vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\}$$

Egiaztatu $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreak linealki independenteak direnentz, $\vec{x}_B = (0,\ 0,\ 4)^t$ eta $\vec{y}_{B'} = (1,\ 0,\ 0)^t$ jakinik.

2 puntu

Arrazoitu erantzun guztiak.

① $\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ bere bektore baten egitura: (a,b,c)

Multzo aske baten bektoreak, linealki independenteak izan behar dira.

$\mathbb{R}^3$-ko sortzaile osoa izateko, 3 bektore l.i., gutxienez, izan behar du multzo horrek.

(2 bektore edo bektore 1 l.i. baino ez badago, sortzailea izango da, baina ez osoa).

Beraz: a) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,0,0)\}$

c) $\{(1,0,0),(2,0,0)\}$

d) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (sortzaile osoa eta askea ≡ oinarria)

② $S = \text{Span}\left\{A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&-1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-E_1]{E_2-E_1} \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{E_3+E_2} \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$A_1\ A_2\ \ A_4$ l.i.

$\boxed{B_S=\{A_1, A_2, A_4\}}$

$\boxed{\dim S = 3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-E_1]{E_2-E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3+E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c+b-a \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{bmatrix}$$

$d-a = 0$

(heina eta dimentsioa berdinak izateko)

Beraz: $\boxed{a=d}$

(3) $F = \{ p = a + xb + cx^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \,/\, a+b=0 \}$

a) i) $0 + 0x + 0x^2 \in F$? $\quad 0 + 0 = 0$ ✓

ii) $p_1 \equiv a_1 + b_1 = 0$ $\quad p_1 \in F$

$p_2 \equiv a_2 + b_2 = 0$ $\quad p_2 \in F$ $\Big\}$ $p_1 + p_2 \in F$?

$p_1+p_2 = a_1 + a_2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)x^2$

$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = 0 + 0 = 0$ ✓

iii) $p \equiv a+b=0$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\Big\}$ $\alpha p \in F$?

$\alpha p = \alpha a + \alpha b x + \alpha c x^2$

$\alpha a + \alpha b = \alpha(a+b) = \alpha \cdot 0 = 0$ ✓

Beraz, F $\boxed{A.E.B.}$ da

b) $\dim \mathbb{P}_2 = 3$

baldintza $= 1$ $\Big\}$ $\dim F = 3 - 1 = \boxed{2 = \dim F}$

$$\boxed{B_F = \{ \underset{\substack{a=1 \\ c=0 \\ (b=-a)}}{1-x}, \underset{\substack{a=0 \\ c=1 \\ (b=-a)}}{x^2} \}}$$

c) Osatu B_F eta lortu $B_{\mathbb{P}_2}$: bektore bat aurkitu behar dugu, B_F-ko bektoreekiko l.i. dena.

B_F ↑ 2 bektore

$B_{\mathbb{P}_2}$ ↑ 3 bektore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2+E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

$a+b \neq 0$ (l.i. izateko!)

$$\boxed{B_{\mathbb{P}_2} = \{\underbrace{1-x, x^2}_{B_F}, x\}}$$

x: $a \neq -b$, c edozein

④

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{y}_{B'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\vec{y}_B} \rightarrow \vec{y}_B = (0,0,2) \text{ eta } \vec{x}_B = (0,0,4)$$

Nabaria da $\boxed{\text{menpekoak}}$ direla. $(\vec{x} = 2\cdot\vec{y})$

edo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_{B'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_B} \rightarrow \vec{x}_{B'} = (2,0,0) \text{ eta } \vec{y}_{B'} = (1,0,0)$$

Menpekoak

Oinarri berberean konparatu behar ditugu!