Denbora: 65'

1. Izan bedi n ordenako matrize karratu errealen espazio bektoriala: $M_{nxn}(R)$. Egiaztatu hurrengo multzoak M_{nxn}-ren azpiespazio bektorialak direnentz.

a) n ordenako matrize simetrikoen multzoa:

$$F = \left\{ A \in M_{nxn}(R) \,/\, A^t = A \right\}$$

b) n ordenako matrize ortogonalen multzoa:

$$S = \left\{ A \in M_{nxn}(R) \,/\, A^{-1} = A^t \right\}$$

1.5 puntu

2. Kalkulatu ze k-ren baliotarako $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ multzoa $M_{2x2}(R)$-ren sistema sortzaile osoa den, non

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

1.5 puntu

3. Aztertu U-ren dimentsioa, $U = Span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, a, b, eta c-ren arabera. Aurkitu U-ren oinarri bat kasu bakoitzerako.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2 puntu

4. Izan bedi $M_{2x2}(R)$ 2x2-ko matrizeen espazio bektoriala. Aurkitu U azpiespazioaren dimentsioa eta bere oinarri bat, non

a) $U = \left\{ A \in E_{2x2}(R) \,/\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \right\}$

b) $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, \begin{cases} a+b-2c=0 \\ a-d=0 \end{cases} \right\}$

2 puntu

5. Izan bitez $P_2(R)$ koefiziente errealetako 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala, eta U P_2-ko hurrengo multzoa:

$$U = Span\left\{ \vec{u}_1 = 1+2x,\ \vec{u}_2 = 1+x+x^2,\ \vec{u}_3 = -2-x-3x^2,\ \vec{u}_4 = 2+3x+x^2 \right\}$$

Aztertu P_2-ko polinomioek bete behar dituzten baldintzak U-ren barne egoteko. Kalkulatu azpiespazioaren dimentsioa.

puntu 1

jarraitzen du

6. Izan bitez $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ eta $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ espazio bektorial bateko oinarri bi, non

$$\begin{cases}\vec{v}_1=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3\\ \vec{v}_2=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+2\vec{u}_3\\ \vec{v}_3=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+3\vec{u}_3\end{cases}$$

Izan bedi $\vec{x}_U=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ U-rekiko $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak. Kalkulatu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak V oinarriarekikoak.

2 puntu

1 a) $A^t = A$

i) ez-hutsik $\rightarrow (0) \in F$?

$(0)^t = (0)$ ✓

ii) $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \Big\} \in F \rightarrow \begin{cases} A^t = A \\ B^t = B \end{cases}$ $(A+B) \in F$? $\rightarrow (A+B)^t = A+B$?

$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B$ ✓

iii) $\begin{matrix} A \in F \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow A^t = A$ $(\alpha A)^t = \alpha A$? $(\alpha A) \in F$?

$(\alpha A)^t = \alpha (A)^t = \alpha A^t = \alpha A$ ✓ Berraz, $\boxed{\text{F A.E.B. da}}$

b) $A^{-1} = A^t$

i) ez-hutsik $\rightarrow (0) \in S$?

$(0)^{-1} \nexists$ Beraz, $\boxed{\text{S ez da A.E.B.}}$

2 $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{E_3-2E_1 \\ E_4-2E_1}]{E_2-E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-E_2]{E_3+E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$$

Baldin $k-2 \neq 0$ bada, $\vec{e}_4$ izango da l. ind. besteekin. Hau da, lau bektore l. ind. izango dugu. Espazio bektorialaren $(\mathbb{E}_{2\times2}(\mathbb{R}))$ dimentsioa 4 denez, sistema sortzaile osoa izateko, gutxienez lau bektore behar dugu, l. ind. haien artean. Berraz, $\boxed{k \neq 2}$.

③ $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3-E_1]{E_2-E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c-a \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}$$

Baldin $c-b \neq 0$; $c \neq b$ $\longrightarrow$ $\dim U = 3$ $\longrightarrow$ $\boxed{B_U = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,1,0)\}}$

(edozein $\mathbb{R}^3$-ko hiru bektore l. ind. balen arteau, $\dim U = \dim \mathbb{R}^3$ delako).

Baldin $c-b=0$; $c=b$ $\longrightarrow$ $\dim U = 2$ $\longrightarrow$ $\boxed{B_U = \{(1,1,1),(1,2,2)\}}$

④ a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$ $\dim U = 2$ (bi param. aske)

$B_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\begin{cases} a+b-2c=0 \\ a-d=0 \end{cases}$ $\dim U = 2$ ($\dim U = \dim \mathbb{E}_{2x2}$ - bald)

↳ l. ind.

$\downarrow$

$\begin{cases} b = 2c-a \\ d=a \end{cases}$

$B_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(5) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & x_1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2-2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3+E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3+x_2-2x_1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ bektoreen artean, bi baino ez dago independenteik: $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ (beste biak, menpekoak). Beraz, $\boxed{\dim U = 2}$

U-ren baldintza: $x_3+x_2-2x_1=0$ edo $\boxed{x_3=2x_1-x_2}$

(6) $$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad P \cdot \vec{x}_V = \vec{x}_U$$

$U \rightarrow V$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=1 \\ a+2b+2c=2 \\ a+2b+3c=3 \end{array} \right. \quad \ldots, \text{ edo:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[E_3-E_1]{E_2-E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_3-E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=1 \\ b+c=1 \\ c=1 \end{array} \right.$$

$c=1 \rightarrow b=0 \rightarrow a=0$: $\vec{x}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$