Denbora: 60'

1.

a) Definitu E espazio bektorial baten *sistema sortzaile*aren kontzeptua.

b) Azaldu zer adierazten duen ondoko adierazpena: $Span\ \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

c) Azaldu E espazio bektorial baten *sistema sortzaile*aren eta *oinarri*aren arteko ezberdintasuna.

1.5 puntu

2. Egiaztatu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ $\mathbb{R}^4$-ko sistema sortzailea den, non

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.5 puntu

3. Izan bedi $F = \left\{ A \in \mathrm{E}_{2x2}(\mathrm{R}) \,/\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \right\}$

a) Aztertu F $\mathrm{E}_{2x2}(\mathrm{R})$-ko azpiespazio bektoriala denentz.

b) Aurkitu F-ren dimentsioa eta kalkulatu bere oinarri bat.

c) Aztertu, k-ren arabera, $\vec{x}$ bektorea F-ren barne dagoenentz, non

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$

4 puntu

4. Izan bitez $\mathbb{P}_3(x)$ 3 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala eta

$U = Span\{p_1(x) = x^2+1,\ \ p_2(x) = -x^3 - x - 1,\ \ p_3(x) = x^2,\ \ p_4(x) = 2x^3 + 2x + 2\}$, non

$p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \in \mathbb{P}_3(x)$.

Aurkitu U-ren dimentsioa eta kalkulatu bere oinarri bat.

1 puntu

5. Izan bitez $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ eta $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ espazio bektorial baten oinarri bi, ondoko erlazioekin:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

a) Aurkitu B_1-etik B_2-rako iragaite matrizea.

b) Izan bedi $\vec{x}$ bektorea. B_2 oinarriarekiko bere koordenatuak ondokoak dira: $\vec{x}_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aurkitu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak B_1 oinarriarekikoak.

2 puntu

(2)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-E_2]{E_3+E_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$-ko sistema sortzailea izateko, lau bektoreak linealki independenteak izan beharko zuen, eta ez dira. Beraz, ez da.

(3) a) $F \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$

i) ez-hutsik: $(0) \in F? \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F$ ✓

ii) $\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} \in F \rightarrow (A+B) \in F?$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a'-b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & a-b+a'-b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & a+a'-(b+b') \end{bmatrix} \checkmark$$

iii) $\begin{matrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ A \in F \end{matrix}$ $(\lambda A) \in F?$

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda(a-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a - \lambda b \end{bmatrix} \checkmark$$

Beraz, F AEB da.

b) Bi parametro aske (a eta b) $\longrightarrow \boxed{\dim F = 2}$

edo bi baldintza l. ind. $\left\{\begin{matrix} c=b \\ d=a-b \end{matrix}\right.$, beraz $\underset{4}{\dim EB} = \underset{2}{\dim AEB} - \underset{2}{\text{bald}}$

$$\boxed{B_F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4-E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_4+E_2]{E_3-E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$ $\forall k$ $\vec{x} \notin F$ (l. ind. da)

edo $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ $c \neq b$ $\forall k \rightarrow \vec{x} \notin F$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_4-E_2]{E_3+E_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\dim U = 3}$

$\boxed{B_U = \{P_1, P_2, P_3\}}$

(5) a) $\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

b) $\vec{X}_{B_1} = P \cdot \vec{X}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

(1) Izan bedi $E(\mathbb{K})$ espazio bektoriala. E-ren bektoreen sistema finitu bat emanda, $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$, $\vec{x} \in E$ bektorea S-ren bektoreen konbinazio lineala da, baldin $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ existitzen badira non hurrengo baldintza betetzen den:

$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$

$\vec{e}_i$ bektoreen konbinazio linealaren bidez lor daitekeen multzoa, F, E-ren azpiespazio bektoriala izango da. Hau da:

$F = \{\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n / \alpha_i \in \mathbb{K} \wedge \vec{e}_i \in E, i = 1, \cdots, n\}$. F multzoa modu honetan idatz badaiteke, F E-ren azpiespazio bektoriala da.

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ multzoa F-ren sistema sortzailea dela esaten dugu.

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ multzoa F-ren sistema sortzailea dela esaten dugu. Hau da, S multzoa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ bektoreez sortuta dago eta $F = Span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ moduan adierazten da.

Oinarriaren bi definizio emango dugu ,espazioa finitua edo infinitua denaren arabera:

- $E(\mathbb{K})$ espazio bektorialaren familia finitua oinarria dela diogu, baldin familia hori E-ren sistema sortzailea eta askea bada. Hau da, E-ren oinarria, sistema aske eta sortzaile bat izango da.
- Multzo infinitua $E(\mathbb{K})$ espazio bektorialaren oinarria da, baldin eta soilik baldin E espazioaren bektore bakoitza oinarriko bektoreen kopuru finituen konbinazio lineal bezala adieraz badaiteke.

E-ren sistema sortzailea den $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ sistema ez balitz askea, linealki mendekoak diren bektoreak kenduz oinarria lortuko genuke.