DENBORA: 60'

1.

a) Oinarri batekiko bektore baten koordenatuen definizioa.

b) Azpiespazio bektorialaren sistema sortzailearen definizioa.

c) Frogatu oinarri batekiko bektore baten koordenatuak bakarrak direla.

1.5 puntu

2. Izan bedi $F = \left\{ A \in \mathrm{E}_{2x2}(\mathrm{R}) \,/\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} \right\}$

a) Aztertu F $\mathrm{E}_{2x2}(\mathrm{R})$-ko azpiespazio bektoriala denentz.

b) Kalkulatu F-ren oinarri bat eta bere ekuazio kartesiarrak.

c) Osatu F-ren oinarria E_{2x2}-ren oinarri bat lortu arte.

4 puntu

3. Izan bedi $S = Span\{ \vec{u}_1 = (1, 2, 1)^t,\ \vec{u}_2 = (2, 1, -1)^t,\ \vec{u}_3 = (a, b, c)^t \}$.

a) Aztertu, a, b, eta c-ren balioen arabera, $\vec{v} = (2, 5, 3)^t$ bektorea S-ren barne dagoenentz.

b) Aztertu S-ren dimentsioa a, b, eta c-ren balioen arabera. Lortu S-ren oinarri bat kasu bakoitzerako.

2 puntu

4. Arrazoitu hurrengo matrizeetatik zeintzuek adieraz dezakete espazio bektorial baten oinarri aldaketa (hau da, zeintzuk izan daitezke iragaite matrizea oinarri batetik beste batera):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

puntu 1

5. Izan bedi E azpiespazio bektoriala, eta izan bitez B eta B' espazio bektorial horretako oinarri bi:

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \qquad B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$$

Egiaztatu $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreak linealki independenteak diren, $\vec{x}_B = (1,\ 1,\ 1)^t$ eta $\vec{y}_{B'} = (1,\ 1,\ 1)^t$ jakinik.

1.5 puntu

1.

a) Oinarri batekiko bektore baten koordenatuen definizioa.

Definizioa: Izan bedi $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ E espazio bektorialaren oinarria. $\vec{x}\in E$ bektorea kontsideratzen badugu, bektore hau B oinarriko bektoreen konbinazio lineal bezala hurrengo moduan adierazten da:

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n$$

Adierazpen honen $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ elementuei B oinarriarekiko $\vec{x}$ <u>bektorearen koordenatuak</u> deitzen zaie.

b) Azpiespazio bektorialaren sistema sortzailearen definizioa.

$S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ multzoa F-ren <u>sistema sortzailea</u> dela esaten dugu. Hau da, S multzoa $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ bektoreez sortuta dago eta $F=Span\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ moduan adierazten da.

c) Frogatu oinarri batekiko bektore baten koordenatuak bakarrak direla.

Absurdura eramanez, $\vec{x}\in E$ bektorea bi modu desberdinetan adieraz daitekeela suposatuko dugu. Orduan, hurrengo bi adierazpen desberdinak ditugu:

$$\begin{aligned}\vec{x}&=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n\\ \vec{x}&=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\cdots+\beta_n\vec{e}_n\end{aligned}$$

Bi adierazpen hauen kenketa eginez, hurrengoa lortzen dugu:

$\vec{0}=(\alpha_1-\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e}_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e}_n$. Baina $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n\}$ oinarria denez, sistema askea da. Ondorioz, $\vec{0}$ bektorea lortzeko aukera bakarra izango dugu; koefiziente guztiak nuluak izatea.

$$0=\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\cdots=\alpha_n-\beta_n\Rightarrow\alpha_i=\beta_i\ \forall i=1,\ldots,n\,.$$

Suposatu duguna gezurra da $\Rightarrow\vec{x}$ era bakar batean adierazten da.

2. Izan bedi $F=\left\{A\in E_{2x2}(\mathrm{R})\,/\,A=\begin{pmatrix}a & b\\ a+b & 0\end{pmatrix}\right\}$

a) Aztertu F $E_{2x2}(\mathrm{R})$-ko azpiespazio bektoriala denentz.

i) $\vec{0}\in F$? $\rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0+0 & 0\end{bmatrix}\in F$

ii)

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} \in F \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix} A=\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} a' & b' \\ a'+b' & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} A+B=\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a' & b' \\ a'+b' & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ a+a'+b+b' & 0 \end{bmatrix}\in F$$

iii) $$\left.\begin{matrix} \lambda\in\mathbb{R} \\ A\in F \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda A=\lambda\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda(a+b) & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda a+\lambda b & 0 \end{bmatrix}\in F$$

Beraz, *F* azpiespazio bektoriala da.

b) Kalkulatu *F*-ren oinarri bat eta bere ekuazio kartesiarrak.

F-ren definiziotik ikusten dira zeintzuk diren ekuazioak: $\begin{cases} c=a+b \\ d=0 \end{cases}$

Bi baldintza linealki independente egonez, eta espazio bektorialaren dimentsioa berdin 4 izanez, *F* azpiespazioaren dimentsioa berdin 2 da eta, beraz, oinarri batean 2 bektore egongo da. Aldi berean, bi parametro aske izango dugu. Kasu honetan, parametro askeak *a* eta *b* dira, eta balioak emanez oinarri bat lortuko dugu:

$$B_F=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

c) Osatu *F*-ren oinarria E_{2x2}-ren oinarri bat lortu arte.

Lehen esan dugun bezala, E_{2x2}-ren dimentsioa 4 da. Beraz, 4 bektore izango du bere oinarri batek. Baina *F* azpiespazioan 2 bektore baino ez dago. Hau da, 2 bektore gehiago beharko dugu, baina 2 bektore berri horiek linealki independenteak izango dira *F*-renekin.

Demagun 2 bektore berriak *A*1 eta *A*2 direla: $A1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A2=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & e \\ 0 & 1 & b & f \\ 1 & 1 & c & g \\ 0 & 0 & d & h \end{bmatrix}\xrightarrow{E_3-E_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & e \\ 0 & 1 & b & f \\ 0 & 1 & c-a & g-e \\ 0 & 0 & d & h \end{bmatrix}\xrightarrow{E_3-E_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & e \\ 0 & 1 & b & f \\ 0 & 0 & c-a-b & g-e-f \\ 0 & 0 & d & h \end{bmatrix}$$

4 bektoreak (*F*-renak eta *A*1 eta *A*2) linealki independenteak izateko, matrize mailakatuaren heina berdin 4 izan behar da, eta horretarako:

$$\begin{cases} d=0 \\ h\neq 0 \\ c-a-b\neq 0;\; c\neq a+b \end{cases}$$

Beraz, E_{2x2}-ren oinarri bat, *F*-rena osatuz, hurrengoa izan ahal da:

$$B_{E_{2x2}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Izan bedi S=S*pan*{ $\vec{u}_1$=(1, 2, 1)^t, $\vec{u}_2$=(2, 1, –1)^t, $\vec{u}_3$=(a, b, c)^t}.

a) Aztertu, a, b, eta c-ren balioen arabera, $\vec{v}$ = (2, 5, 3)^t bektorea S-ren barne dagoenentz.

$\vec{v}$ bektorea S-ren barne egoteko, linealki menpekoa izan behar da S sortzen duten bektoreekin, hau da, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, eta $\vec{u}_3$ bektoreak.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & b & 5 \\ 1 & -1 & c & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_3-E_1]{E_2-2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -3 & b-2a & 1 \\ 0 & -3 & c-a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3-E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -3 & b-2a & 1 \\ 0 & 0 & c+a-b & 0 \end{bmatrix}$$

Ikusten da c+a-b berdin 0 ala ez, $\vec{v}$ bektorea beti egongo dela S-ren barne.

Hau da, berdin 0 bada (marra gorria), $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ linealki independenteak izango ziren ($\vec{u}_3$ menpekoa) eta $\vec{v}$ bektorea haien menpe, beraz, S-ren barne.

Baina ezberdin 0 izango balitz (marra berdea), $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, eta $\vec{u}_3$ bektoreak independenteak izango ziren eta $\vec{v}$ bektorea, berriz, haien menpe, beraz, S-ren barne.

b) Aztertu S-ren dimentsioa a, b, eta c-ren balioen arabera. Lortu S-ren oinarri bat kasu bakoitzerako.

Aurreko atalean ikusi dugun bezala, bi kasu izango dugu:

i) $c+a-b \neq 0 \;\rightarrow\; \dim S = 3 \;\rightarrow\; B_S = \{(1,2,1),(2,1,-1),(1,0,0)\}$

non (1,0,0) bektoreak betetzen du aurreko baldintza linealki independentea izateko.

ii) $c+a-b = 0 \;\rightarrow\; \dim S = 2 \;\rightarrow\; B_S = \{(1,2,1),(2,1,-1)\}$

4. Arrazoitu hurrengo matrizeetatik zeintzuek adieraz dezakete espazio bektorial baten oinarri aldaketa (hau da, zeintzuk izan daitezke iragaite matrizea oinarri batetik beste batera):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Iragaite matrizea izateko, matrize hori karratua izan behar da (bi oinarriek dimentsio bera izan behar dute) eta bere zutabeak (oinarri berriaren bektoreak zaharraren menpe) linealki independenteak (bestela ez da oinarria izango).

A matrizean, ikusten da $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ eta $\vec{e}_3'$ bektoreak menpekoak izango zirela (bat independentea eta besteak menpekoak). Beraz, ezin dute oinarria sortu eta *A* matrizea ezin da iragaite matrizea izan.

B matrizea ez da karratua, beraz, ezin da iragaite matrizea izan.

C matrizea iragaite matrizea izan daiteke, karratua delako eta bere zutabeak linealki independenteak direlako.

5. Izan bedi E azpiespazio bektoriala, eta izan bitez *B* eta *B'* espazio bektorial horretako oinarri bi:

$$B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}, \qquad B'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\}$$

Egiaztatu $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreak linealki independenteak diren, $\vec{x}_B=(1,\ 1,\ 1)^t$ eta $\vec{y}_{B'}=(1,\ 1,\ 1)^t$ jakinik.

Lehenengoa, bektore biak ($\vec{x}$ eta $\vec{y}$) oinarri beran jarriko ditugu. Adibidez, *B*' oinarrian:

$$\vec{x}_B=P\cdot\vec{x}_{B'} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix};\ \begin{cases}1=a+b+c\\1=b+c\\1=c\end{cases} \rightarrow (a,b,c)=(0,0,1)=\vec{x}_{B'}$$

Orain, $\vec{x}_{B'}$ eta $\vec{y}_{B'}$ konparatzen baditugu, linealki independenteak ikusten direla ikusten da.