DENBORA: 50'

EBATZITA

1. Izan bitez $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ eta $F = \{A \in E_{2x2}(\mathrm{R}) / M \cdot A = (0)\}$

Aztertu F $E_{2x2}(\mathrm{R})$-ren azpiespazio bektoriala den **1.5 puntu**

1) Multzoa ez-hutsik da? $\rightarrow \quad (0) \in F\,? \quad \rightarrow \quad M \cdot (0) = (0)$

2)
$$\left.\begin{array}{l} A \in F \rightarrow M \cdot A = (0) \\ B \in F \rightarrow M \cdot B = (0) \end{array}\right\} (A+B) \in F\,? \rightarrow M \cdot (A+B) = (0)\,?$$
$$M \cdot (A+B) = M \cdot A + M \cdot B = (0) + (0) = (0)$$

3)
$$\left.\begin{array}{l} A \in F \rightarrow M \cdot A = (0) \\ \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\alpha A) \in F\,? \rightarrow M \cdot (\alpha A) = (0)\,?$$
$$M \cdot (\alpha A) = \alpha M \cdot A = \alpha(0) = (0)$$

Hiruak betetzen dira, beraz, azpiespazioa da.

2. Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ 2 edo maila txikiagoko polinomioen espazio bektoriala. Erantzun hurrengo galderak (**arrazoituz laburki**):

a) Eman $\mathbb{P}_2(x)$-ren sistema sortzaile bat, oinarria ez dena.

b) Eman $\mathbb{P}_2(x)$-ren bektore linealki independente multzo bat eta espazio horren oinarria ez direnak.

c) Eman $\mathbb{P}_2(x)$-ren oinarri ezberdin bi. **1.5 puntu**

a) $\mathbb{P}_2(x)$ espazioak dimentsio 3-koa da, beraz, bera sortzeko gutxienez hiru bektore linealki independente beharko da. Baina hiru hartzen badugu, hori oinarri bat izango zen. Orduan hartuko dugu oinarri bat (espazioa sortzeko) eta beste bat (jakina, menpekoa) gehituko dugu. Oinarria kanonikoa izan daiteke. Erantzuna:

$$\{1, x, x^2, 2\}$$

b) Aurreko atalean esan den moduan, oinarri batean hiru bektore linealki independente egongo da. Orduan, atal honetako eskaera betetzeko, oinarri baten bektore bat edo bi hartzea nahiko izango da:

$$\{1, x\}$$

c) $\{1, x, x^2\}$ eta $\{2, x+1, x^2+1\}$, hau da, ohiko oinarria (errezena) eta bera baina dena gehi 1 (horrela badakigu bektore horiek linealki independenteak direla).

3. Izan bedi E espazio bektorial bat, eta $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ E-ren bektore linealki independente bi. Arrazoitu datorren baieztapena egiazko ala gezurrezkoa den:

- $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0}$ ekuazioak α=β=λ=0 soluzioa baino ez dauka. **puntu 1**

Ekuazio horrek soluzio bakarra badauka eta horrez gain soluzio hori nulua bada, horrek adierazten du bektore guztiak linealki independenteak direla, eta argi dago hirugarrena $(\vec{u} + \vec{v})$ besteen menpe dagoela. Beraz, gezurrezkoa da.

Beste modu batean:

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = (\alpha + \lambda)\vec{u} + (\beta + \lambda)\vec{v} = \vec{0}$ eta $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ linealki independenteak izateagatik:

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \lambda = 0 \\ \beta + \lambda = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = -\lambda \\ \beta = -\lambda \end{array}\right\}$ Orduan infinitu soluzio dago, adibidez $\lambda = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = -1$. Beraz, gezurrezkoa da.

4. Izan bedi M_{2x2} 2 ordenatako matrize karratuen espazio bektoriala.

a) Kalkulatu *U* azpiespazioaren dimentsioa eta oinarri bat, non

$$U = \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Big/ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

b) Aztertu $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bektorea *U*-ren barne dagoen.

c) Aztertu $\left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ bektoreak linealki independenteak direnentz. Baldin ez badira, aurkitu menpekotasun erlazio edo erlazioak.

4 puntu

a) Bi ekuazioak linealki independenteak direnez eta espazioaren dimentsioa berdin 4 izanez, *U*-ren dimentsioa berdin 2 da.

$$\dim U = \dim M_{2x2} - ek.l.ind.kop.$$

Oinarria kalkulatzeko, parametro askeak aukeratuko ditugu (bi izango dira, dimentsioa berdin) eta balioak emango dizkiegu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases} \rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_3 - x_1 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Begiratuko dugu ea $\vec{u}_1$ U-ren baldintzak betetzen dituen:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} 1+1-2=0 \\ 1-1=0 \end{cases}$$ Betetzen dira, beraz, barne dago.

c) Bektoreen matrizea sortuko dugu eta mailakatuko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_3 - E_1 \\ E_4 - E_1}]{E_2 - E_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 - \frac{E_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beraz, $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ linealki independenteak dira eta $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_1$

5. Izan bitez $\mathrm{B}_1 = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$ eta $\mathrm{B}_2 = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$ espazio bektorial baten oinarri bi, non

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = \qquad \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = \qquad\qquad \vec{v}_3 \end{cases}$$

Izan bedi B_2 oinarriarekiko hurrengo koordenatuak dauzkan $\vec{x}$ bektorea, $\vec{x}_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Kalkulatu $\vec{x}$-ren B_1 oinarriarekiko koordenatuak.

2 puntu

B_2 oinarritik B_1 oinarrira pasatzeko, P iragaite matrizea hurrengoa da:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ eta ekuazio hori ebatziz: $\vec{x}_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$