SERIES NUMÉRICAS REALES

1.- Hallar el carácter y la suma, en los casos en que es convergente, de la serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (La)^n \text{ , siendo } a > 0.$$ Junio 2006

2.- Indicar **razonadamente** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ es absolutamente convergente

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) es convergente $\Leftrightarrow$ es absolutamente convergente

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow$ es absolutamente convergente

d) La sucesión $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

e) La sucesión $\{a_n\}$ es divergente $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow$ La sucesión $\{a_n\}$ es convergente

g) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente $\Rightarrow$ La sucesión $\{a_n\}$ es divergente

Septiembre 2006

3.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a \cdot n \cdot x^2}}{n^2}$, estudiar su convergencia según los distintos valores reales de a y x. Septiembre 2006

4.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}}{c^n \cdot n!}$ según los distintos valores reales de a, b y c, siendo c > 0 y $b \neq 1$. Junio 2007

5.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \cdot sen\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) + \frac{1}{a^n} \right]$ según los distintos valores reales de a > 0, siendo $\alpha > 0$. Septiembre 2007

6.- Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n \cdot a^n}$ $\forall a > 0, a \neq 1/e$. Febrero 2008

7.- Se considera la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\cos(n\pi)}{2L(n)} \right]$.

a) ¿Es convergente? Razona tu respuesta.

b) ¿Es absolutamente convergente? Razona tu respuesta. Junio 2008

8.- Carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\lambda^n\cdot n!}$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+,\lambda\neq e$.

Septiembre 2008

9.- Un estudiante comenta que la serie $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots$ es convergente porque sus términos son pequeños y se aproximan a cero rápidamente. ¿Tiene razón? Explicar el razonamiento. Febrero 2009

10.- Calcular $\lim_{n\to\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ $\forall a>0$. Febrero 2009

11.-Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]$.

a) Razona si es una serie alternada

b) Estudia el carácter de la serie. Junio 2009

12.- Sea $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot a_n & \forall n\geq 2\end{cases}$

a) Calcular $\lim_{n\to\infty}a_n$

b) Estudiar el carácter de $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ Septiembre 2009

13.- a) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^n$ $\forall a>0$.

b) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ donde $a>0$. Febrero 2010

14.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^2}\right)\right]$. Febrero 2010

15.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^{4n+1}}{(4n+1)!}$. Junio 2010

16.- Considérense los términos generales $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ y $b_n=\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}$.

a) Estudiar el carácter de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$.

b) Calcular la suma aproximada de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con un error $\varepsilon < \frac{1}{7}$. ç

Septiembre 2010

17.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{a^n} + \frac{n^{10}+15}{3^n+5} \right) \quad \forall a > 0$. Enero 2011

18.- a) Estudiar el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\text{L}n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n}$$

b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\text{L}2}+\ldots+\frac{1}{2+\text{L}n}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{4^{n-1}}{3^n}}$. Mayo 2011

19.-Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n \cdot n!} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{\pm e, 0\}$ Junio 2011

20.- a) Dados dos términos generales a_n y b_n , ¿cuándo se dice que son equivalentes?

b) Dados los siguientes términos generales:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad b_n = \tan\left(\frac{3}{n^2+1}\right) \quad c_n = \frac{n^2+1}{n^2} \quad d_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^3}\right) \quad e_n = 3^{\frac{1}{n+1}} ,$$

i. ¿Cuáles son equivalentes?

ii. ¿Cuáles de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ y $\{e_n\}$ son convergentes?

iii. ¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ tienen el mismo carácter? Noviembre 2011

21.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot(2n-1)}$. Noviembre 2011

22.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n}{3^{2n}} + n^3 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \right)$. Julio 2012

23.- Estudiar el carácter de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Enero 2013

24.- Analizar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)+\left(\frac{2}{a}\right)^n\right]$ en función de los valores del parámetro $a>0$ Enero 2013

25.- Estudiar, razonadamente, el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+2},\quad a\geq 0$ Julio 2013

26.- Estudiar el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arc\tan\frac{1}{n}\right)^4$ Enero 2014

27.- En la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$, ¿cuántos términos habría que tomar para obtener un valor aproximado de su suma con un error menor que 0.001?. Justificar los resultados.

Enero 2014

28.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{n(n+4)}\right)$ Julio 2014

29.- Se consideran los términos generales $a_n=n^{1/n}$ y $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

a) Estudiar el carácter de las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

b) Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$. Julio 2014

30.- Consideremos los términos generales $a_n=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ y $b_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$.

a) Calcular $\lim_{n\to\infty}a_n$ y $\lim_{n\to\infty}b_n$.

b) Estudiar si las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son convergentes o no. Enero 2015

31.- Analizar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{a^{2n}}\quad\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$. Enero 2015

32.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ donde $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$ entonces, ¿es posible $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$?

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$ entonces, ¿ $a_n \sim b_n$?

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$, ¿se puede decir algo sobre el carácter de esas dos series?

d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ¿se puede decir algo sobre el carácter de esas dos series? Junio 2015

SOLUCIONES PROBLEMAS DE SERIES NUMÉRICAS REALES

1.- Serie geométrica de razón r=La (a>0) converge $\Leftrightarrow \frac{1}{e} < a < e$.

2.- a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ es absolutamente convergente. FALSO

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) es convergente $\Leftrightarrow$ es absolutamente convergente. VERDADERO

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow$ es absolutamente convergente. FALSO

d) La sucesión $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. FALSO

e) La sucesión $\{a_n\}$ es divergente $\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. VERDADERO

f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow$ La sucesión $\{a_n\}$ es convergente. VERDADERO

g) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente $\Rightarrow$ La sucesión $\{a_n\}$ es divergente. FALSO

3.- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a\cdot n\cdot x^2}}{n^2} \quad \begin{cases} si \;\; a=0 \;\; ó \;\; x=0 \;\; convergente \\ si \;\; a>0 \;\; y \;\; x\neq 0 \;\; divergente \\ si \;\; a<0 \;\; y \;\; x\neq 0 \;\; convergente \end{cases},$$

4.- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^a}\cdot n^{b\cdot n}}{c^n\cdot n!} \quad \begin{matrix} b<1 \;\; serie\ convergente \\ b>1 \;\; serie\ divergente \end{matrix}.$$

5.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\cdot sen\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{a^n}\right]$ converge $\Leftrightarrow [\alpha>2 \;\wedge\; a>1]$ (diverge en el resto de casos).

6.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n\cdot a^n}$ converge $\Leftrightarrow [\;ae>1]$ (diverge en el resto de casos).

7.- a) La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)}{2L(n)}\right]$ es una serie alternada que cumple Leibniz, luego convergente.

b).No es absolutamente convergente.

8.- La serie es convergente sii $\lambda > e$.

9.- Es la parte final de la serie armónica, luego es una serie divergente.

10.- $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ 0<a<1 \\ 1 \ \ si \qquad a=1 \\ \infty \ \ si \qquad a>1 \end{cases}.$

11.- a) La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]=\frac{2}{1^2+1}+0+\frac{2}{3^2+1}+0+\frac{2}{5^2+1}+0+....=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n-1)^2+1}\right],$$
luego no es una serie alternada

b) Tiene igual carácter que la serie armónica., con $\alpha = 2(>1)$ luego convergente.

12.- a) $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

b) Es divergente.

13.- a) Sólo converge cuando a<1, en el resto de los casos es divergente.

b) $si \ a<1 \ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=0$

$si \ a\geq 1 \ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=\infty$

14.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^2}\right)\right]$ es convergente.

15.-Se trata de una serie divergente.

16.- a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serie alternada convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ serie alternada convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \approx -0.1\hat{3}$ con un error $\varepsilon < \frac{1}{7}$.

17.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{a^n}+\frac{n^{10}+15}{3^n+5}\right)$ es convergente $\Leftrightarrow a>1$, en el resto de lo casos es divergente.

18.- a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+\mathrm{L}n}$ es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{3^n}$ es una serie geométrica divergente.

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\mathrm{L}2}+\ldots+\frac{1}{2+\mathrm{L}n}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\ldots+\frac{4^{n-1}}{3^n}}=0$.

19.-La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{a^n\cdot n!}$ converge si $a\in(-\infty,-e)\bigcup(e,\infty)$.

20.-i. Son equivalentes $a_n\sim d_n$ y $c_n\sim e_n$

ii. Todas las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ y $\{e_n\}$ son convergentes:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \quad \lim_{n\to\infty}b_n=0 \quad \lim_{n\to\infty}c_n=1 \quad \lim_{n\to\infty}d_n=0 \quad \lim_{n\to\infty}e_n=1$$

iii Como $a_n\sim d_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ igual carácter (convergente) y como $c_n\sim e_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}e_n$ igual carácter divergente (no cumplen la condición necesaria de convergencia). $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ también tienen el mismo carácter (aplicando el criterio de comparación de segunda especie, ambas son de términos no negativos).

21.- La serie es divergente.

22.- La serie es divergente.

23.- a) La serie es convergente
b) La serie no convergente.

24.-La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)+\left(\frac{2}{a}\right)^n\right]$ es convergente si $a>2$ y divergente en el resto de los casos $0<a\leq 2$.

25.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+2}$, $a\geq 0$, es convergente si $a>1$ y divergente en el resto de los casos $0\leq a<1$.

26.- a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{n}$ serie divergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arc\tan\frac{1}{n}\right)^4$ serie convergente

27.- Al menos 332 términos habría que tomar para obtener un valor aproximado de su suma con un error menor que 0.001.

28.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{n(n+4)}\right)$ es convergente

29.- a) las dos series son divergentes.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{1}{e}$.

30.-a) $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie no convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente.

31.- $\begin{cases} si\ \ -1\le a\le 1 & serie\ divergente \\ si\ \ a<-1\ ó\ a>1 & serie\ convergente \end{cases}$

32.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ donde $a_n \ge 0$ y $b_n \ge 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

a) No es posible $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

b) $a_n \not\sim b_n$.

c) Las dos series son convergentes.

d) las dos series son divergentes.