FUNTZIO ERREALAK. JARRAITUTASUNA

Funtzioaren definizioa:

Funtzio bat A eta B bi multzoen arteko erlazioa da non A multzoko elementu bakoitzari B multzoko elementu bat, eta soilik bat, dagokion:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Funtzio batzuen existentzi eremuak:

Biz $f : A \to B$ funtzioa. Funtzio hauen existentzi eremua (hau da, funtzioa definitua dagoen multzoa) hauek dira:

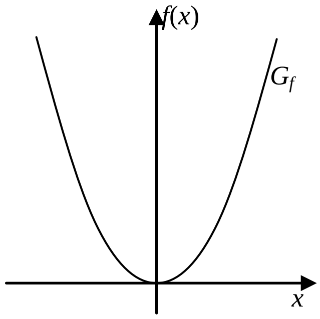
- f funtzioa polinomikoa bada, bere existentzi eremua A osoa izango da.
- $\dfrac{1}{f}$ funtzioaren existentzi eremua $E=\{x \in A \,/\, f(x) \neq 0\}$ izango da.
- $\sqrt{f}$ funtzioaren existentzi eremua $E=\{x \in A \,/\, f(x) \geq 0\}$ izango da.
- $\ln(f)$ funtzioaren existentzi eremua $E=\{x \in A \,/\, f(x) > 0\}$ izango da.

Aldagai errealeko funtzio erreala:

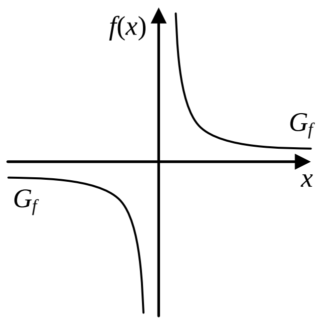
Aldagai errealeko funtzio erreala $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erako funtzioa da non E funtzioaren existentzi eremua den.

Adibideak:

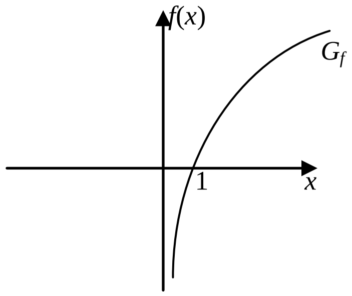
- $f(x) = x^2$. $E = \mathbb{R}$ da eta haren grafikoa hau da:



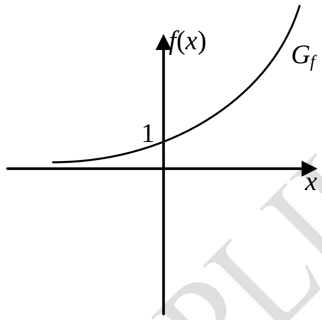
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ da eta beraren grafikoa hau da:



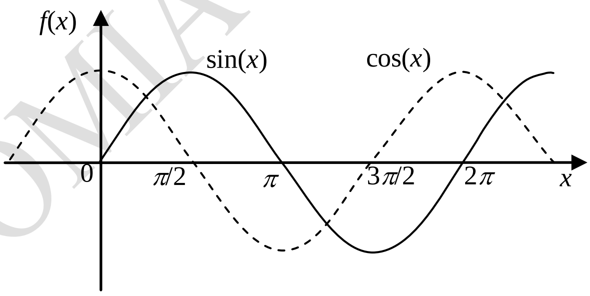
- $f(x) = \ln(x)$. $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0, +\infty)$ da eta grafikoa:



- $f(x) = e^x$. $E = \mathbb{R}$ da eta grafikoa hau da:



- $f(x) = \sin(x)$ eta $f(x) = \cos(x)$. $E = \mathbb{R}$ da eta haien grafikoak hauek dira:



Jarraitutasuna:

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai bateko funtzio erreala x_0 puntuan jarraitua da baldintza hauek betetzen badira:

i) $x_0 \in E$, hau da, $f(x_0)$ existitzen da.

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existitzen da.

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funtzio jarraituen propietateak:

Bira $f, g: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $x_0 \in E$ eta $\lambda \in \mathbb{R}$. f eta g jarraituak badira x_0 puntuan, orduan funtzio hauek ere jarraituak izango dira x_0 puntuan:

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad f/g \ (g(x_0) \neq 0 \text{ bada}).$$

Funtzio jarraitu garrantzitsuenak:

Funtzio hauek guztiak haien existentzi eremuetan jarraituak dira:

Funtzio lineala: $f(x) = ax + b$, $a,b \in \mathbb{R}$ izanik.

Funtzio polinomikoa: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, a_i guztiak zenbaki errealak izanik.

Funtzio arrazionala: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak izanik.

Balio absolutu funtzioa: $f(x) = |x|$.

Errokari funtzioa: $f(x) = \sqrt{x}$.

Funtzio esponentziala: $f(x) = e^x$.

Funtzio logaritmikoa: $f(x) = \ln(x)$.

Funtzio trigonometrikoak: $f(x) = \sin(x)$; $f(x) = \cos(x)$.

Funtzio jarraituen konposaketa:

$f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in E$ puntuan jarraitua eta $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x_0)$ puntuan jarraitua badira, orduan $g \circ f$ funtzioa $x_0 \in E$ puntuan jarraitua da.

Adibidea:

- $f(x) = x^2$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan jarraitua da eta $g(x) = \sin(x)$ $\mathbb{R}$-n jarraitua da. Orduan,

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x^2 \to g(f(x)) = \sin(x^2)$$

funtzioen konposaketa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Bolzanoren teorema:

Biz $y = f(x)$ funtzio erreala $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta $f(a)$ eta $f(b)$-k kontrako zeinua dute. Orduan, gutxienez, c $(a < c < b)$ puntu bat existitzen da non $f(c) = 0$ den.