Distribución exponencial

La distribución exponencial se utiliza mucho para analizar la fiabilidad de los sistemas electrónicos. Esta distribución se usa para predecir la vida (tiempo sin fallo de los componentes electrónicos). La propiedad de "sin memoria" se adapta a la circunstancia de que este tipo de componentes no presenta apenas desgaste con el tiempo como lo presentan, por ej. los mecánicos por corrosión.

Relación entre la distribución de Poisson y la distribución exponencial

Consideremos un proceso de aparición de sucesos que sea un proceso de Poisson de tasa λ.

$X \text{ — } P(\lambda)$ $\quad$ X: nº de llamadas/sg que se registran en una central telefónica

La variable definida como el "valor del intervalo entre dos sucesos consecutivos" sigue distribución exponencial de parámetro λ.

$Y \text{ — } \exp(a = \lambda)$ $\quad$ Y: Tiempo (sg) entre dos llamadas consecutivas

· Si el nº de grietas que se encuentran en una carretera sigue distribución de Poisson de tasa λ grietas por Km, entonces: la distancia, en Km, entre dos grietas consecutivas sigue distribución exponencial de parámetro λ.

· Si el nº de goles que mete un equipo de fútbol sigue distribución de Poisson de tasa λ goles/partido, entonces: El nº de partidos que tiene que jugar el equipo para meter dos goles consecutivos sigue distribución exponencial de parámetro λ.

· Si el nº de aterrizajes a la hora en un aeropuerto sigue distribución de Poisson de tasa λ, entonces el intervalo de tiempo (en horas) que transcurre entre dos aterrizajes consecutivos en ese aeropuerto sigue distribución exponencial de parámetro λ.

Distribución Ji - Cuadrado

$$\boxed{X \text{ — } \chi^2(n)} \qquad X \text{ — } \gamma(a = 1/2,\ r = n/2)$$

$$X = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \dots + z_n^2$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \text{ — } N(0,1) \\ z_2 \text{ — } N(0,1) \\ z_3 \text{ — } N(0,1) \\ \text{- - - - - - - -} \\ z_n \text{ — } N(0,1) \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} z_i^2 \text{ — } \gamma(a = 1/2,\ r = 1/2) \\ X \text{ — } \gamma(a = 1/2,\ r = n/2) \end{array}$$

Independientes

· Teorema Central del Límite

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ ——— } (m_1, \sigma_1) \\ y_2 \text{ ——— } (m_2, \sigma_2) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n \text{ ——— } (m_n, \sigma_n) \end{array}\right\} \text{Independientes } n \geq 100$$

$$\boxed{X = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n \text{ ——— } N(m_X, \sigma_X)}$$

$$m_X = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$
$$\sigma_X^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Ej: El tiempo Y en horas requerido para hacer una reparación es una v.a con función de densidad:

$$f(y) = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Se deben llevar a cabo 100 reparaciones. Calcular la probabilidad de que el tiempo total invertido en las mismas esté comprendido entre 64 y 68 horas.

Y: tiempo de reparación

$f(y) = 2y$

$$m_Y = EY = \int_0^1 y(2y)\,dy = \left.\frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = 2/3$$

$$\sigma_Y^2 = EY^2 - m_Y^2 = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18$$

$$EY^2 = \int_0^1 y^2(2y)\,dy = \left.\frac{2y^4}{4}\right]_0^1 = 2/4 = 1/2$$

X: tiempo de 100 reparaciones $= y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{100}$

¿$P[64 < X < 68]$?

$$X \xrightarrow{TCL} N(m_X, \sigma_X)$$

$$m_X = m_1 + m_2 + \dots + m_{100} = 100 m_Y = 100 \cdot 2/3 = 200/3$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{100}^2 = 100\,\sigma_Y^2 = 100\,(1/18) = 50/9$$

$$X \text{ ——— } N(200/3\,;\ \sqrt{50/9})$$

$$P(64 \leq X \leq 68) = F(68) - F(64) = \phi\left(\frac{68 - \frac{200}{3}}{\sqrt{50/9}}\right) - \phi\left(\frac{64 - \frac{200}{3}}{\sqrt{50/9}}\right)$$

$$= \phi(0'57) - \phi(-1'13) = 0'7157 - 0'1292 = 0'5865$$

· Teorema Central del Límite: Demostración empírica

Tiramos un dado 100 veces (o 100 dados una vez) y realizamos la suma. Repetimos el experimento 400 veces.

$X = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{100}$

y_1: N° en la tirada de dado 1

y_2: N° en la tirada de dado 2

y_3: N° en la tirada de dado 3

- - - - - - - - - - - -

y_{100}: N° en la tirada de dado 100

$m_x = 100\, m_y = 100\,(3'5) = 350$

$\sigma_x^2 = 100\, \sigma_y^2 = 292$

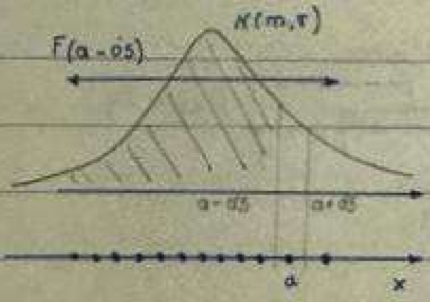
$\sigma_y^2 = E y^2 - (m_y)^2 = 2'92$

$X \xrightarrow{T.C.L.} N(350,\ 17'078)$

1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
1	2	3	4	5	6

· Convergencias (TCL)

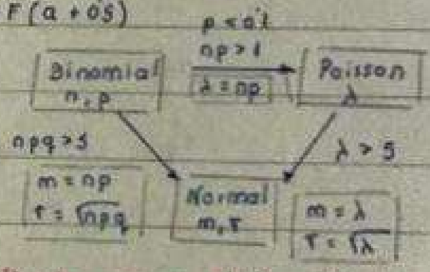
Corrección por continuidad:



$P(X = a) = F(a + 0'5) - F(a - 0'5)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a - 0'5)$

$P(X \leq a) = F(a + 0'5)$



· Convergencia binomial a Normal

Ej. La probabilidad de que una persona que entra en una tienda compre algún artículo es 0'65. Si un día entran 300 personas, calcula la probabilidad de que realicen compras 203 personas o más.

0'35	0'65
0	1

El valor $y = 0$ representa el suceso "no compra"

El valor $y = 1$ " " " "compra"

X: N° de personas que compran de 300 $\qquad X \sim b(n = 300,\ p = 0'65)$

$P(X \geq 203) = \sum_{x=203}^{300} \binom{300}{x} 0'65^x \cdot 0'35^{300-x} = 0'182 \longleftarrow$ Probabilidad exacta

$X \sim N(m_x = np = 300 \cdot 0'65 = 195,\ \sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0'65 \cdot 0'35} = 8'26)$

$P_r(X \geq 203) = 1 - P(X \leq 202) = 1 - F(202) = 1 - \phi\left(\frac{202 - 195}{8'26}\right) = 1 - \phi \sim 0'847 \cong 0'1977$

P exacta $= 0'182$

$P(X \geq 203) = 1 - P(X \leq 202) = 1 - F(202'5) = 1 - \phi\left(\frac{202'5 - 195}{8'26}\right) = 0'1814$

Probabilidad aproximada

- Convergencia Poisson a Normal

Ej. Se ha observado que el nº de llamadas a una central telefónica sigue distribución de Poisson de media 1 llamada/minuto. Calcular la probabilidad de que en una hora se produzcan como máximo 65 llamadas.

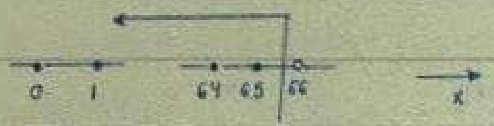
Convolución

X: nº de llamadas en una hora $= y_1 + y_2 + \dots + y_{60}$ ——— $P(\lambda = 60)$

y_i — $P(\lambda = 1)$

$P(X \le 65) = \sum_{x=0}^{65} \frac{e^{-60} \cdot 60^x}{x!} = 0'764$ Probabilidad exacta

$\lambda > 5$ $\quad X$ ——— $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$: $\quad X$ ——— $N(60; 7'75)$



$P(X \le 65) = \phi\left(\frac{65-60}{7'75}\right) = \phi(0'65) = 0'742$

Probabilidad aproximada

$P(X \le 65) = \phi\left(\frac{65'5-60}{7'75}\right) = \phi(0'71) = 0'761$

- Distribución Gamma

$$\boxed{X \text{ ——— } \Gamma(a, r)}$$

$f(x) = \frac{a^r x^{r-1} e^{-ax}}{\Gamma(r)}$

$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} a^r x^{r-1} e^{-ax} dx$

A través de esta variable se deducen otras vbles muy útiles como la exponencial y la Ji-Cuadrado.

$m = r/a$

$\sigma^2 = r/a^2$

$\varphi_X(u) = (1 - u/a)^{-r}$

- Propiedad de convolución:

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_K$

X_1 — $\gamma(a, r_1)$

X_2 — $\gamma(a, r_2)$

X_3 — $\gamma(a, r_3)$

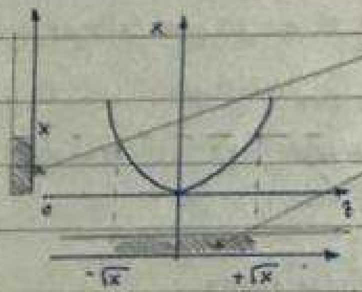
— — — — —

X_K — $\gamma(a, r_K)$

$\xrightarrow{\text{Independientes}}$ Y ——— $\gamma(a, r_1 + r_2 + \dots + r_K)$

· Relación con Z — $N(0,1)$ $\qquad X = Z^2$

$\boxed{Z^2 — \gamma(a = 1/2,\ r = 1/2)}$



$$F(x) = [(\phi(\sqrt{x}) - (\phi(-\sqrt{x})]_Z$$

$$F(z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} dz$$

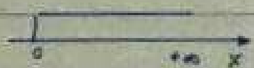
$$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} dz - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} dz}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{a^r x^{r-1} e^{-ax}}{\Gamma(r)} dx = \int_0^x \frac{e^{-1/2 x}}{\sqrt{x}\sqrt{2}} dx$$

· Distribución exponencial

$\boxed{X — exp(a)}$

$\hookrightarrow X — \gamma(a, r=1)$



$$f(x) = \frac{a^r x^{r-1} e^{-ax}}{\Gamma(r)} = ae^{-ax}$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = 1 - e^{-ax}$$

$m = r/a = 1/a$

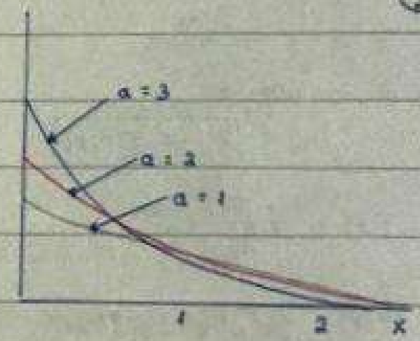
$\sigma^2 = r/a^2 = 1/a^2$

$\alpha_X(u) = (1 - u/a)^{-r} = (1 - u/a)^{-1}$

Propiedad de Convolución

$$\left.\begin{array}{l} X — \gamma(a,1) \\ Y — \gamma(a,1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} W = X + Y \\ W — \gamma(a, r=2) \end{array}$$

$\hookrightarrow$ X Y indep



Ej. El volumen de producción de una empresa es una variable aleatoria exponencial X de parámetro $a = 1$. Sabiendo que los costes totales de esa empresa vienen definidos por $C = 3X$. Calcular la:

a) Probabilidad de que el coste sea mayor que 18 $\quad P(C > 18)$

b) Probabilidad de que el volumen de producción se encuentre entre 5 y 10. $\quad P(5 < X < 10)$

c) " de que habiéndose alcanzado, por lo menos un volumen de producción de 10, se alcance al menos una producción de 20. $\quad P(X > 20 / X > 10)$

X = Volumen —— exp $(a=1)$

$f(x) = e^{-x} \quad x>0$ (0 en otro caso)

Coste = $C = 3x$

a) $P(C>18) = P(3x>18) = P(x>6) = \int_6^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_6^{+\infty} = e^{-6} = 0'0025$

b) $P(5 \le x \le 10) = \int_5^{10} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_5^{10} = -e^{-10} + e^{-5} = 0'00673$

c) $P(x>20/x>10) = \dfrac{P(x \ge 20 \cap x \ge 10)}{P(x \ge 10)} = \dfrac{\int_{20}^{+\infty} e^{-x} dx}{\int_{10}^{+\infty} e^{-x} dx} = \dfrac{e^{-20}}{e^{-10}} = e^{-10} = 0'0000454$

Ej. La duración de un cierto tipo de dispositivos sigue distribución exponencial de media 1 mes (suponer 1 mes = 30 días).

Calcular:

a) La probabilidad de que un dispositivo tomado al azar dure más de 50 horas.

b) La probabilidad de que un dispositivo tomado al azar que funcionaba a las 80 horas, dure más de 130 horas.

T = duración dispositivo (horas) —— $\exp[a = 1/m = 1/(30 \cdot 24)]$

T —— $\exp(a = 1/720)$; $F(t) = 1 - e^{-at} \quad t>0$

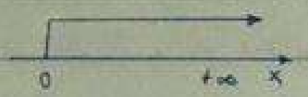
a) $P(T>t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + e^{-at} = e^{-at} \qquad P(T>50) = e^{-50/720}$

b) $P(T>130/T>80) = \dfrac{P(T>130)}{P(T>80)} = \dfrac{e^{-130/720}}{e^{-80/720}} = e^{-50/720} = 0'9329$

$Prob(T>t_2/T>t_1) = \dfrac{Prob(T>t_2)}{Prob(T>t_1)} = \dfrac{e^{-at_2}}{e^{-at_1}} = e^{-a(t_2-t_1)}$

Es decir, la probabilidad de que un elemento dure $(t_2 - t_1)$ unidades de tiempo adicionales es independiente del tiempo ya vivido por el elemento.

En este ej. un elemento que lleva funcionando 80 horas (y se comprueba que sigue en funcionamiento) tiene la misma probabilidad de funcionar otras 50 horas más (hasta las 130 horas) que un elemento "nuevo".



$$f(x) = \frac{a^r x^{r-1} e^{-ax}}{\Gamma(r)} = \frac{a^{n/2} x^{(n/2)-1} e^{-1/2\, x}}{\int_0^{+\infty} a^{n/2} x^{(n/2)-1} e^{-1/2\, x}\, dx}$$

$m = r/a = n$

$\sigma^2 = r/a^2 = 2n$

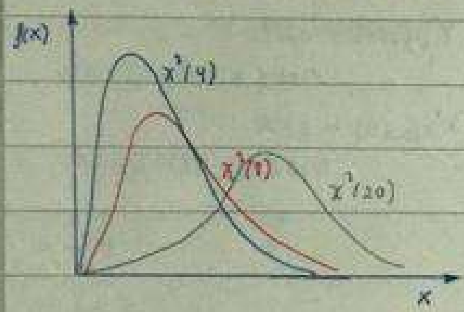
$\varphi_x(u) = (1 - u/0'5)^{-n/2}$

Características:

1. Anagrama: X — $\chi^2(n)$
   [coincide con una X — $\gamma(1/2;\ n/2)$]

2. Parámetro "n"
   Se le suele llamar grados de libertad

3. $E(X) = n$; $\sigma^2 = 2n$



4. Si "n" ↑↑ X — $\chi^2(n)$
   X — $N(n, \sqrt{2n})$

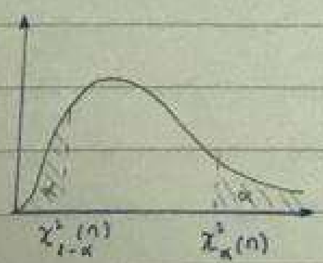
Propiedad de convolución:

$$\left.\begin{array}{l} X - \chi^2(n) \\ Y - \chi^2(m) \end{array}\right] \xrightarrow{W = X+Y} W - \chi^2(n+m)$$

Independientes

X — $\gamma(a = 1/2,\ r = n/2)$
Y — $\gamma(a = 1/2,\ r = m/2)$ $\longrightarrow$ W — $(a = 1/2,\ r = \frac{(m+n)}{2})$

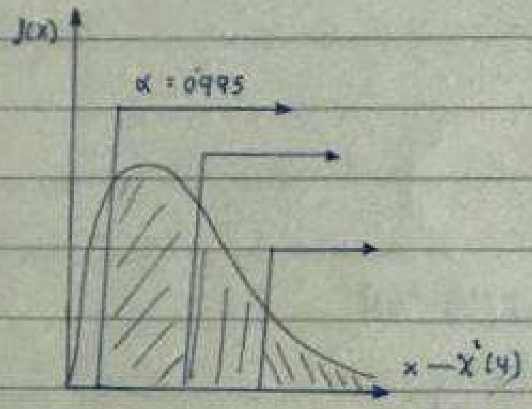
• Tablas



	α
n →	$\chi^2_\alpha(n)$

· Cálculo de probabilidades: Las funciones de densidad no se pueden integrar directamente, por lo que los valores de las probabilidades están tabuladas. En general, el valor de la variable que deja a su derecha una masa α se le representa por χ^2_α

$$Prob\left[X > \chi^2_\alpha(n)\right] = \alpha$$



Por ej. para una $\chi^2(4)$

Grados de libertad "n"	α		
	0'995	0'5	0'1
⋮			
n = 4	0'207 ...	3'357 ...	7'779
⋮			

$$\chi^2_{0'995}(4) = 0'207$$

$$Prob\,(X > 0'207) = 0'995$$

$$\chi^2_{0'50}(4) = 3'357$$

$$Prob\,(X > 3'357) = 0'5$$

$$\chi^2_{0'10}(4) = 7'779$$

$$Prob\,(X > 7'779) = 0'1$$