1. Transistore mota baten iraupena normal banaiatutako zorizko aldagaia da, 750 orduko batez bestekoarekin eta 8 orduko desbideratze tipikoarekin. Kalkulagailuak 5 transistore erabiltzen ditu, eta, haietako edozein matxuratu gero, Kalkulagailua ez dabil. Kalkulatu Kalkulagailuak matxurarik gabe 730 ordu baino gehiago lanean irauteko probabilitatea.

$X \longrightarrow N(750, 8)$

X: transistore baten iraupenak

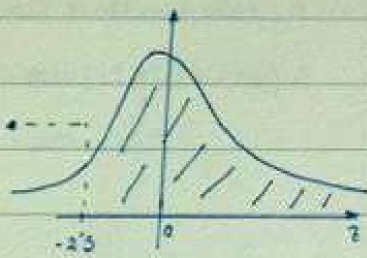
Kalkulagailuak 5 transistore, 1 matxuratu ezkero ez dabil.

P_r (Kalkulagailuak iraun > 730 ordu)

P_r (transistore bat > 730 ordu) $= P_r(X > 730)$

$X = m + \sigma z \xrightarrow[\text{Tipikatu}]{} z = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 750}{8}$

$P_r(750 + 8z > 730) = P_r\left(z > \frac{730 - 750}{8}\right) = P_r(z > -2'5)$



Taulan begiratuz $\rightarrow \phi(-2'5) = 0'0062$ Guri galdetzen diguten kontrakoa da $1 - \phi(z)$

$P_r(z > 2'5) = 1 - \phi(-2'5) = 1 - 0'0062 = \underline{\underline{0'9932}}$

$P_r(\mathrm{I} \cap \mathrm{II} \cap \mathrm{III} \cap \mathrm{IV} \cap \mathrm{V}) = (0'9938)^5 = \underline{\underline{0'9694}}$

2. Lanpara mota batek 1.500 ordu irauten du batez beste, 150 orduko desbideratze tipikoarekin. Kalea ari ~~g~~ batez argitzeko hiru lanpara jarri dira. Lanpara bat erre gero, ordura arte itzalita zegoen bigarrena pizten da, eta gauza bera gertatzen da bigarrena erretzean. Lanparen iraupen-banaketa normala dela kontuan izanda:

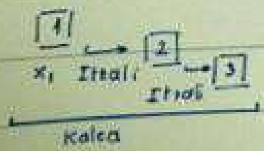
a) Zein da Kalea gutxienez 5.000 ordutan argiturik izateko probabilitatea?

b) " " " gehienez 4.200 ordutan " " " ?

Lanpara $m = 1500$ ordu
$\sigma = 150$

X —— $N(1500, 150)$

Lanpara bakoitzak bere banaketa normala dauka.



x_1 —— $N(1500, 150)$

x_2 —— $N(1500, 150)$

x_3 —— $N(1500, 150)$

$y = x_1 + x_2 + x_3$

a) P_r (Kalea argiarekin > 5000 ordu)

Kalea $= L_1 + L_2 + L_3$ $\longrightarrow$ aldagaia independienteak

$y \text{ ——— } N(m_1+m_2+m_3, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2})$

$y \text{ ——— } N(3\cdot 1500, \sqrt{150^2+150^2+150^2}) = N(4500, \sqrt{3\cdot 150^2})$

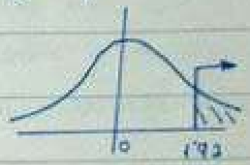
$\boxed{y \text{ ——— } N(4500, 150\sqrt{3})}$ Kalearen probabilitate banaketa

$P_r(y \geq 5000) = P_r(4500+150\sqrt{3}z \geq 5000) = P_r\left(z \geq \frac{5000-4500}{150\sqrt{3}}\right) = P_r(z \geq 1'92) =$

Tipifikatu $y = 4500 + 150\sqrt{3}z$

$= 1 - 0'9726 = \underline{0'0274}$

Kalea argiekin 5000 ordu baino gehiago egoteko probabilitatea.



Taulan $\phi(1'92) = 0'9726$

b) Pr(Kalea argiekin < 4200 ordu)

$P_r(y \leq 4200) = P_r(4500+150\sqrt{3}z \leq 4200) = P_r\left(z \leq \frac{4200-4500}{150\sqrt{3}}\right) = P_r(z \leq -1'15)$

Tipifi $y = 4500 + 150\sqrt{3}z$

3. X, Y eta Z luzerak dituzten elementuek sistema bat osatzen dute. Luzera horiek banaketa normalak dituzte:

$X \text{ ——— } N(a, 0'03)$

$Y \text{ ——— } N(b, 0'04)$

$Z \text{ ——— } N(c, 0'12)$

Hiru luzerak independienteak izanez gero, Kalkulatu hiru elementuak elkarri ~~lotutako~~ sortutako elementuaren luzera, $W = X+Y+Z$, $(a+b+c-0'15 < w < a+b+c+0'20)$ tartekoa izateko probabilitatea.

X, Y, Z elementuek osatzen dute sistema

$X \text{ ——— } N(a, 0'03)$

$Y \text{ ——— } N(b, 0'04)$

$Z \text{ ——— } N(c, 0'12)$

$w = x+y+z \longrightarrow$ ¿$a+b+c - 0'15 < w < a+b+c+0'20)$ probabilitatea?

Aldagai independienteen Konbinazio lineala: $w = ax + by + kz + c$

$m_w = am_y + bm_y + km_z + c$

$\sigma_w = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + k^2\sigma_z^2}$

Kasu honetan $a = b = k = 1$ eta $c = 0$

$m_w = m_x + m_y + m_z = a+b+c$

$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2} = \sqrt{0'03^2+0'04^2+0'12^2} = 0'13$

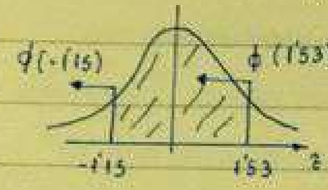
$w \text{ ——— } N(a+b+c, 0'13)$

$Pr(a+b+c-0'15 < w < a+b+c+0'20) =$

$z \rightarrow N(0,1) \qquad w = (a+b+c)+0'132$

$Pr(\cancel{a+b+c}-0'15 < \cancel{(a+b+c)}+0'132 < \cancel{a+b+c}+0'20) = Pr(-0'15 < 0'13z < 0'20) =$

$Pr(-1'15 < z < 1'53) = \phi(1'53) - \phi(-1'15) = 0'9370 - 0'1251 = \underline{\underline{0'8119}}$



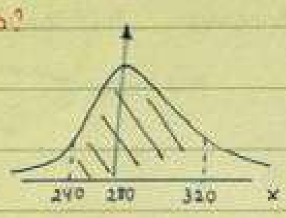
4. Marrasa mota baten iraupena normal barreiatutako 280 batezbestekoa duen aldagai normala da. Zein izan behar du desbideratze tipikoaren balioak marrasa baten iraupena 240 eta 320 ordu artekoa izateko probabilitatea gutxienez %80 izan dadin?

$X \longrightarrow N(280, \sigma)$

↓

marrasa mota baten iraupena

(a Rutilla?)

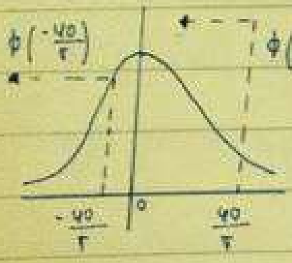


$Pr(240 \leq X \leq 320) \geq 0'80$

$X = 280 + \sigma z \rightarrow$ tipifikatu

$Pr(240 \leq 280 + \sigma z \leq 320) = Pr\left(-\frac{40}{\sigma} \leq z \leq \frac{40}{\sigma}\right) = 0'80$

$= \phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right) = 2\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1$



$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

↑

propietateak

$0'80 = 2\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \qquad 1'80 = 2\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \rightarrow \phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) = 0'9$

↓

Taulak

$0'9 \rightarrow z = 1'29$

$\frac{40}{\sigma} = 1'29 \rightarrow \boxed{\sigma = 31}$

5. Elektrizitate-lineak matxura izaten du tentsioak linearen ahalmena gainditzen duenean. Tentsioa $N(100, 20)$ aldagai normala da, eta linearen ahalmena $N(140, 10)$ aldagai normala. Tentsioa eta ahalmena aldagai independentetzat joz, Kalkulatu matxura gertatzeko probabilitatea.

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ tentsioa} — N(100, 20) \\ Y \text{ linearen Kapazitatea} — N(140, 10) \end{array}\right\} \text{aldagai independienteak}$$

Tentsioa linearen Kapazitatea gainditzean $\rightarrow$ lineak matxura.

Pr (matxura gertatzeko)

$X — N(100, 20)$

$Y — N(140, 10)$

$X > Y \rightarrow$ lineak matxura

$P_r(X > Y) \quad P_r(X - Y > 0)$

$$W = X - Y \begin{cases} m_W = m_X - m_Y = 100 - 140 = -40 \\ \sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 20^2 + 10^2 = 500 \end{cases}$$

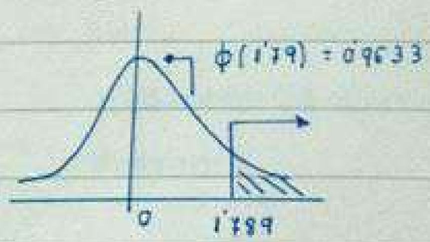
$\sigma_W = 22'36$

$W — N(-40, 22'36)$

$$P_r(W > 0) = P_r(m_W + \sigma_W \cdot z > 0) = P_r(-40 + 22'36z > 0) =$$

Tipijikatu

$$= P_r\left(z > \frac{40}{22'36}\right) = P_r(z > 1'789) = 1 - \phi(1'79) = 1 - 0'9633 = 0'0367$$



Probabilitatea matxura emateko % 3'67koa da.

6. Makina batek ebakitako hari zatien luzera (metrotan) N(0'123 - 0'001) aldagai normala da. Hari zatiek ez dute balio (akastunak) (0'121 - 0'129) tartetik kanpokoak badira. Ebaketa prozesua aldatuz gero, hari zatien luzerak honako banaketa normala betetzen du N(0'125 - 0'002). Hobetzen al da kalitatea prozesua aldatu eta gero?

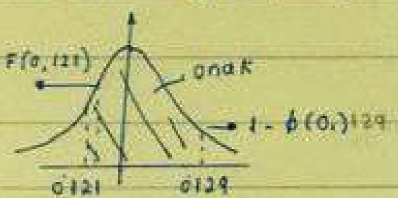
Hari zatien luzera —— $N(0'123, 0'001)$

Akastunak (0'121, 0'129) tartetik kanpoan daudenak.

Ebaketa prozesua aldatu → hari zatien luzera —— $N(0'125, 0'002)$

Kalitatea ↑ prozesua aldatuz gero?

X —— $N(0'123, 0'001)$



Faltan edukitzeagatik probabilitatea:

$F(0'121) = P_r(X < 0'121) =$ Tipifikatu

$= P_r(0'123 + 0'001z < 0'121) = P\left(z < \frac{0'121 - 0'123}{0'001}\right) =$

$= P_r(z < -2) = \phi(-2) = 0'0228 \rightarrow 2'3\%$

- Luzeegiak izateagatik → probabilitatea

$P_r(X > 0'129) = P_r\left(z > \frac{0'129 - 0'123}{0'001}\right) = P_r(z > 6) = 1 - \phi(6) = 0$

Lehenengo prozesuarekin akastunak %2'3a da

Y —— $N(0'125, 0'002)$

$P_r(X < 0'121) = P_r\left(z < \frac{0'121 - 0'125}{0'002}\right) = P_r(z < -2) = \phi(-2) = 0'023$

$P_r(X > 0'129) = P_r\left(z > \frac{0'129 - 0'125}{0'002}\right) = P_r(z > 2) = 1 - \underbrace{\phi(2)}_{0'97} = 0'023$

2. eb. proz: Akastunak: 4'6%

Hobeto da lehenengo ebakidura prozesua.

7. X zoriZko aldagaiak gamma banaketa betetzen du (parametroak "a" eta "r" dira). $Z = Kx$ bada, egiaztatu Z aldagaiak beste gamma banaketa betetzen duela (a/K) eta r parametroak direla).

$X \longrightarrow \gamma(a, r)$

$Z = Kx$ egiaztatu Z aldagaia γ banaketa?

$\gamma \rightarrow \Psi_x(u) = \left(1 - \frac{iu}{a}\right)^{-r}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot a^r x^{r-1} e^{-ax}$

Levi-ren Teorema

Funtzio Karakteristikoa $\longleftrightarrow$ Prob. banaketa bat

Berdina dute

$$\Psi_Z(u) = \Psi_{KX}(u) = \int_0^\infty e^{iuxK} \frac{a^r}{\Gamma(r)} \cdot x^{r-1} e^{-ax} dx =$$

$$= \frac{a^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{iuxK} x^{r-1} e^{-ax} dx = \frac{a^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{x(iuK - a)} dx$$

$$\Psi_X(Ku) = \left(1 - \frac{Kiu}{a}\right)^{-5} = \left(1 - \frac{iu}{a/K}\right)^{-5}$$

Leviren teorema $\rightarrow Z - \gamma\left(a/K, r\right)$

8. Hiru gailu independentek sistema bat osatzen dute eta seriean Konektatuak daude. Hiru gailuen iraupenek banaketa esponentzial hauek dituzte, hurrenez hurren:

1. gailuak: $a_1 = 0'001$

2. gailuak: $a_2 = 0'003$

3. gailuak: $a_3 = 0'006$

Kalkulatu sistemak 100 ordu eta gero huts egiteko probabilitatea.

3 gailu independiente

$\underbrace{x_1 - x_2 - x_3}_{Z \text{ sistema}}$ serien Konektaturik

$x_1 - \mathcal{E}(a_1 = 0'001)$

$x_2 - \mathcal{E}(a_2 = 0'003)$

$x_3 - \mathcal{E}(a_3 = 0'006)$

$-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}-$

$Pr(Z \geq 100)$

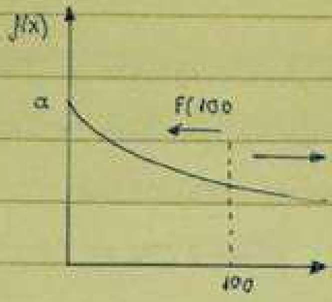
$$P_r(Z \geq 100) = P_r(x_1 \geq 100 \cap x_2 \geq 100 \cap x_3 \geq 100) =$$

$$= P_r(x_1 \geq 100) \cdot P_r(x_2 \geq 100) \cdot P_r(x_3 \geq 100) =$$

independienteak dira

b. gamma $|r=1|$ → b. exponentziala

$f(x) = a e^{-ax}$



$P_r(X_1 \geq 100) = 1 - F(100) = 1 - \int_0^{100} 0'001\, e^{-0'001x}\, dx =$

$1 - 0'001 \left[\frac{e^{-0'001x}}{-0'001} \right]_0^{100} = 1 + (e^{-0'1} - 1) = e^{-0'1}$

$P_r(X_2 \geq 100) = 1 - F(100) = 1 - \int_0^{100} 0'003\, e^{-0'003x}\, dx =$

$= 1 - 0'003 \left. \frac{e^{-0'003x}}{-0'003} \right]_0^{100} = e^{-0'3}$

$P_r(X_3 \geq 100) = 1 - F(100) = 1 - \int_0^{100} 0'006\, e^{-0'006x}\, dx = e^{-0'6}$

$P_r(z = 0) = e^{-0'1} \cdot e^{-0'3} \cdot e^{-0'6} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

9. X-K eta Y-K banaketa normal hauek betetzen dituzte eta independienteak dira.

$X \text{ — } N(3,2)$

$Y \text{ — } N(6,4)$

Kalkulatu Z aldagai bat, zeina X eta Y aldagaien konbinazioa izango den eta ji Karrat

banaketa beteko duen.

$\left.\begin{array}{l} X \text{ — } N(3,2) \\ Y \text{ — } N(6,4) \end{array}\right\}$ independienteak

$z \text{ — } \chi^2(n)$

$\chi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \text{ —— } \chi^2(n)$

$x_i \text{ — } N(0,1) \longrightarrow x_i^2 \text{ — } \gamma(1/2, 1/2)$

$X \text{ — } N(3,2) \xrightarrow{\text{tipifikatu}} \begin{array}{c} X = 3 + 2z \\ z = \frac{X-3}{2} \end{array} \text{ —— } N(0,1)$

$y \text{ — } N(6,4) \xrightarrow{\text{"}} \begin{array}{c} y = 6 + 4 \\ z = \frac{y-6}{4} \end{array} \text{ —— } N(0,1)$

$\left(\frac{X-3}{2}\right)^2 = \frac{(X-3)^2}{4} \text{ —— } [N[0,1]]^2 = \gamma(1/2, 1/2) = z_1$

$\left(\frac{y-6}{4}\right)^2 = \frac{(y-6)^2}{16} \text{ —— } [N(0,1)]^2 = \gamma(1/2, 1/2) = z_2$

γ gamma banaketaren propietatea

$z = x_1^2 + x_2^2 = x^2 + y^2 = \boxed{\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{16}} \sim \chi^2(2)$

$z = z_1 + z_2 \text{ —— } \gamma(a, r_1 + r_2) = \gamma(1/2, 2/2) \text{ —— } z$

Konbolusio propietatea

eta $\chi^2(n) = \gamma(1/2, n/2)$ denez $\boxed{z \text{ —— } \chi^2(2)}$

10. Hiri bateko eguneko ur-kontsumoak gamma banaketa betetzen du ($a = 1/3$ eta $r = 2$)

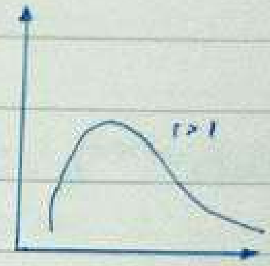
Urtegiaren ahalmena 9 milioikoa bada, kalkulatu edozein egunetan ur-hornidura jalta izateko probabilitatea.

$X \longrightarrow \Gamma(1/3, 2)$ X: eguneko ur kontsumoa.

Urtegiaren ahalmena 9 milioi.

$P_r(\text{ur hornidura jalta}) \longrightarrow P_r(X > 9) = 1 - P_r(X \leq 9)$

$a = 1/3 \quad r = 2$



$$f(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-ax}$$

$$P_r(X \leq 9) = \int_0^9 \frac{(1/3)^2}{\Gamma(2)} \cdot x^1 e^{-1/3 x} dx = 1/9 \int_0^9 x e^{-x/3} dx \qquad \Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

Bi parteetan integratu: $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$$u = x \longrightarrow du = dx$$

$$e^{-x/3} dx = dv \longrightarrow v = \frac{e^{-x/3}}{-1/3} = -3e^{-x/3}$$

$$\int x \cdot e^{-x/3} dx = -3 \cdot x e^{-x/3} - \int (-3) e^{-x/3} dx = -3xe^{-x/3} + 3 \frac{e^{-x/3}}{-1/3} = -3xe^{-x/3} - 9e^{-x/3}$$

$$P_r(X \leq 9) = 1/9 \int_0^9 x e^{-x/3} dx = -3/9 \left[xe^{-x/3} + 3e^{-x/3} \right]_0^9 = -1/3 \left[9 \cdot e^{-9/3} + 3e^{-9/3} - 0 - 3e^0 \right] =$$

$$= -1/3 (12e^{-3} - 3) = 1 - 4e^{-3}$$

$$P_r(X > 9) = 1 - P_r(X \leq 9) = 1 - (1 - 4e^{-3}) = \boxed{4e^{-3}}$$

11. Labe batean lau erregulatzaile termiko daude. Erregulatzaileak independenteak dira bata bestearekiko, eta labearen tenperatura adierazten dute. Erregulatzaile bakoitzaren tenperaturak banako banaketa normal hau betetzen du: $N(m=200,\ \sigma=10)$.

Labea geratu egiten da gutxienez hiru erregulatzailek 210 gradu gainditzen dituztenean.

Kalkulatu labea geratzeko probabilitatea.

$\boxed{E_1} - \boxed{E_2} - \boxed{E_3} - \boxed{E_4}$ independienteak

tenperatura $X_1 - N(200,10)$

$X_2 - N(200,10)$

$X_3 - N(200,10)$

$X_4 - N(200,10)$

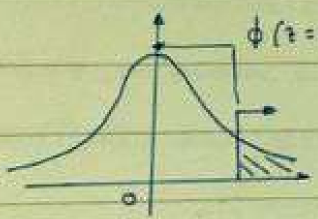
$3x_i > 210' \to$ labea geratu $\to P_r$(labea geratu)

$$P_r(X>210) = P_r(200+10z>210) = P_r\left(z>\frac{210-200}{10}\right) = P_r(z>1)$$

tipifikatu

$1-\phi(z=1) = 1-0'8413 = 0'1587$

Taulak



Erregulatzaile 1 $\to T>210 = 0'1587$

$\to T<210 = 0'8413$

4 Erregulatzaile $\to$ 3 $T>210$ (A), 1 $T<210$ (B)

$P_r[AAAB] = \binom{4}{3}\binom{1}{1} 0'1587^3 \cdot 0'8413$

$+$

$P_r[AAAA] = \binom{4}{4} 0'1587^4$

$0'014$

Beste modu bat $\to$ banaketa binomiala

y — $b(0'1587, 4)$ — erregulatzaileak $T>210$ Banaketa

$$P_r(y\geq 3) = P_r(3)+P_r(4) = \binom{4}{3} 0'1587^3 \cdot 0'8413 + \binom{4}{4} \cdot 0'1587^4 = 0'01401$$

$\frac{4!}{3!\,1!}$