

1. Aztertu hurrengo funtzioen definizio-eremuak (barne-puntuak, muga-puntuak, irekiak ala itxiak diren, bornatuak ala ez bornatuak diren):

$$f_1(x,y) = \ln(x+y)$$

$$f_2(x,y) = \ln|x+y|$$

$$f_3(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}$$

2. Nolakoak izango ziren hurrengo funtzioen grafikoak eta maila-lerroak?

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_2(x,y) = x^2+y^2-4x-6y$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}$$

$$f_4(x,y) = 9-x^2-y^2$$

3. Kalkulatu $z(x,y) = x^2+y^2-1$ funtzioaren gehikuntza patziala x-rekikoa.

4. Kalkulatu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sin x + \sin y}$

5. Kalkulatu hurrengo funtzioen lehen ordenako deribatu partzialak:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$z(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z(x,y) = \ln x^y$$

6. Bedi $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$. Frogatu $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$

7. Bedi x-ren eta y-ren bi aldagaiko w funtzioa, $w(x,y)$, non $x = u+v$ eta $y = u-v$ diren. Frogatu:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

8. Bedi $\sin(xy) + 2\sqrt{y} - 5 = 0$. Kalkulatu $\frac{dy}{dx}$.

9. Bedi x -ren eta y -ren bi aldagaiko z funtzioa, $z(x,y)$, non $x = e^u \cos v$ eta $y = e^u \sin v$ diren. Frogatu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) - y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$$

10. Bedi $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ hiru aldagaiko funtzioa, hurrengo bektorearen luzera ematen duena: $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Frogatu funtzioaren gradientearen honela idatz daitekeela: $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$

11. Kalkulatu $\vec{\nabla}(\cos r(x,y,z))$, non $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ berriro den.

12. Bedi $f(x,y) = xy$ funtzioa. Kalkulatu bere gradientearen eta egiaztatu ortogonalak dela funtzioaren maila-lerroekiko.

13. Bedi $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ funtzioa. Kalkulatu funtzio honen deribatua $(1,1)$ puntuan $(1,2)$ norabidearekiko.

14. Funtzio baten deribatua puntu batetan da $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(1,1)$ norabidean eta $\frac{1}{5}$ $(3,4)$ norabidean. Zein da funtzioaren gradientearen puntu horretan? Zein norabidean izango genuen deribatuarik altuena? Zein izango zen deribatu maximo horren balioa?

15. Mendi baten altuera (x,y) puntu batetan hurrengo funtzioak ematen du metrotan: $h(x,y) = 400 - \frac{(x^2 + 4y^2)}{10000}$. Mendizale bat dago jatorritik 1600 m mendebalderuntz eta 400 m hegoalderuntz. Zein da bere posiziotik tontorreraino doan norabidearekiko malda? Zein norabidean da maldarik aldapatsuena?

16. Aztertu funtzioaren maximo ala minimoak:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y$$

$$f_2(x,y) = 2x - x^2 + 6y - y^2 + 5$$

17. Kalkulatu S azalera duen paralelepido angeluzuzenen artean bolumen maximo duena.

18. $x^2 + y^2 = 1$, ekuazioak zilindro zuzen bat osatzen du hiru dimentsiotan. Zilindroa mozten dugu $z=3x+4y$ plano baten bidez. Zeintzu dira ebakiduraren balio maximo eta minimoak?

19. Esfera unitarioaren puntuen artean zein da haren koordenatuen arteko baturarik handiena duena? eta baliorik txikiena duena? Zeintzu dira balio horiek?