② SERIES DE TERMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Una serie se considera de términos positivos y negativos cuando tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 - b_1 + a_4 - b_2 - b_3 + \dots + a_n - b_n + \dots$$

Estudiar la modulada : $|S|$

$|S| = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + a_4 + b_2$

$|S|$: CONV. —— S: ABS. CONV.

$|S|$: DIV. —— S: ?

$|S| > S$

Separar en dos (~~sucesiones~~) series, por un lado los términos positivos y por otro los negativos.

$$S = \sum a_n - \sum b_n$$

Tenemos una resta de dos series de términos positivos y estudiamos el carácter de cada una de ellas

- a_n y b_n : CONV. —— S: ABS. CONV.
- Una CONV. y otra DIV. —— S: NO CONV.
- a_n y b_n : DIV. —— S: ?

Riemann

SERIES ALTERNADAS

Son un caso particular de las series de términos positivos y negativos

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \dots$$

T. LEIBNIZ

Una serie alternada es converg. si :

- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$
- $a_{n+1} \leq a_n$ (serie decreciente)

Cumple Leibniz —— CONV

No cumple Leibniz —— NO CONV

Si una serie alternada es converg. para saber si es absoluta o condicionalmente converg.

$|S|$: CONV —— S: ABS. CONV.

$|S|$: DIV. —— S: COND. CONV.

Una serie es ABSOLUTAMENTE convergente cuando la suma no varía al cambiar el orden de los sumandos y es CONDICIONALMENTE convergente cuando la suma varía al reordenar sus términos

SERIE GEOMETRICA

$$S = a_1 + a_1 R + a_1 R^2 + \dots + a_1 R^{n-1}$$

Suma de n términos : $\boxed{S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-R^n}{1-R}}$

Suma de ∞ términos : $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, $\boxed{S = \dfrac{a_1}{1-R}}$ convergente si $|R| < 1$

- Condición necesaria de convergencia:

Si $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow$ $a_n \to 0$

Esta condición es necesaria pero no suficiente

- SERIES CUALQUIERA:

- Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes $\left\{ \begin{array}{l} \sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n + \sum b_n \\ \sum (a_n \pm b_n) \text{ es convergente} \end{array} \right.$

$\downarrow$

ejemplo: $\sum \left[L\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} \right] \left\langle \begin{array}{l} \sum L\left(1+\frac{1}{n}\right) \to D \\ \sum \frac{1}{n(n+1)} \to C \end{array} \right\rangle D$

- Serie geométrica:

$\sum a r^n$ converge $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } |r| < 1 \\ \text{si } |r| \geq 1 \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \text{ la serie no converge} \end{array} \right.$

Su suma $\to$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}}$ = Suma

$S = a_n +$

- SERIES DE TERMINOS POSITIVOS:

1) Son convergentes o divergentes, nunca oscilantes
2) Son asociativas y conmutativas.

- Criterios de comparación:

$\boxed{1^a \text{especie}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \sum a_n \text{ mayorante de } \sum b_n \text{ y } C \Longrightarrow \sum b_n \; C \\ \text{Si } \sum a_n \text{ minorante de } \sum b_n \text{ y } D \Longrightarrow \sum b_n \; D \end{array} \right.$

$\boxed{2^a \text{especie}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sean } \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ de terminos positivos:} \\ \text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \begin{array}{l} \nearrow \neq 0 \\ \searrow \neq \infty \end{array} \text{ (es decir si } a_n \text{ y } b_n \text{ salvo es una constante)} \\ \Longrightarrow \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo caracter.} \end{array} \right.$

- Serie armónica:

$\sum \frac{1}{n^a} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a > 1 \text{ converge} \\ \text{si } a \leq 1 \text{ diverge} \end{array} \right.$

- Criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k \rightarrow \begin{cases} k<1 & \text{converge} \\ k>1 & \text{diverge} \\ k=1 & ? \end{cases}$$

- Criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \rightarrow \begin{cases} k<1 & \text{converge} \\ k>1 & \text{diverge} \\ k=1 & ? \end{cases}$$

- Criterio de Raabe - Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = k \rightarrow \begin{cases} k>1 & \text{converge} \\ k<1 & \text{diverge} \\ k=1 & ? \end{cases}$$

- SERIES DE TERMINOS CUALES QUIERA

Si $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ es absolutamente convergente

Teorema de Riemann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (términos cualesquiera)} \begin{cases} \sum_{n=1} U_n & \text{suma de los (+)} \\ \sum_{n=1} V_n & \text{suma de los (−)} \end{cases}$$

a) Si $\sum U_n$ y $\sum V_n$ (C) $\Rightarrow$ $\sum a_n = \sum U_n + \sum V_n \Rightarrow$ (A.C)

b) Si ~~$\sum$~~ una de los dos son (D) $\Rightarrow$ $\sum a_n$ (D)

c) Si los dos (D) $\Rightarrow$? $\sum a_n$ divergente o convergente o oscilante

Si una serie (C) pero no (A.C) entonces (C.C)

- (+)
  - C
  - D
- (−)(+)
  - C
    - A.C
    - C.C
  - D
  - O

- Series alternadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$$

Teorema de Leibniz:

- Si $\sum a_n$ es alternada

a) $|a_n| \to 0$

b) $|a_n|$ decreciente

$a_{n+1} \leq a_n$

$\Big\} \Rightarrow \sum a_n$ es convergente

- En una serie alternada el error cometido es menor que el primer término despreciado en valor absoluto.

$$\boxed{|\varepsilon_n| = |S - S_n| < |a_{n+1}|}$$

Enunciado el teorema de Leibniz (importante)

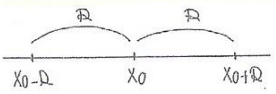
SERIES POTENCIALES

Una serie funcional es de la forma : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$

El campo de convergencia es el conjunto formado por todos los valores de "x" para los cuales la serie es convergente.

Para estudiar la convergencia, se pueden utilizar todos los criterios vistos en series numéricas: D'Alambert, comparación, ... pero con $|a_n|$.

Una serie funcional de la forma : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$, se llama serie potencial y su campo de convergencia está centrado en x_0.



Para calcular el radio de convergencia (R):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad , \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Hay que mirar, si los extremos del intervalo: $x = x_0 - R$ y $x = x_0 + R$ pertenecen al campo de convergencia, para ello se sustituyen en el término general y se estudia el carácter de la serie numérica resultante.

SUMA DE UNA SERIE POTENCIAL

Puede ser:

1.- La serie potencial es geométrica, entonces, la suma es $\frac{a_1}{1-R}$

2.- La serie potencial no es geométrica, pero su derivada $S'(x)$ sí que lo es, calculamos la suma de $S'(x)$ y luego integramos.
Hay que calcular la cte. de integración y mirar extremos del campo de convergencia.

3.- La serie potencial no es geométrica, pero su integral $\int S(x)\,dx$ sí que lo es, se suma y se deriva. El campo de convergencia es abierto.

- Series potenciales:

$(\text{sen } x, \text{sen } x^2, \text{sen } x^3, \dots \text{sen } x^n)$ $\{\text{sen } x^n\}$

$\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2^2}, \frac{x^3}{2^3}, \frac{x^4}{2^4}, \dots \frac{x^n}{2^n}$ $\left\{\frac{x^n}{2^n}\right\}$

$x=1 \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1^2}{2^2}, \frac{1^3}{2^3}, \frac{1^4}{2^4}, \dots \rightarrow \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

$x=2 \rightarrow \frac{2}{2}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{2^3}{2^3}, \dots \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1$

$x=-1 \rightarrow -1/2, \frac{(-1)^2}{2^2} - 1/2^3 + 1/2^4 - 1/2^5 \dots$

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \dots f_n(x)$ $\{f_n(x)\}$ sucesión funcional

- Se dice que la S.F $\{f_n(x)\}$ converge en $x = x_0$ si la sucesión $f_n(x_0)$ es convergente, es decir, si $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = l$ ó $f_n(x_0) = l$

- Se dice que la sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converge en un intervalo $D \subseteq \mathbb{R}$, si converge $\forall\ x \in D$.

- Se llama campo de convergencia de la S.F, al conjunto de todos los puntos donde la sucesión converge.

$\{\text{sen } x^2\} \rightarrow$ serie funcional $\quad \text{sen } x + \text{sen } x^2, \text{sen } x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } x^n$

$\left\{\frac{x^n}{2^n}\right\} \quad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

$\left\{\frac{x^n}{n}\right\} \quad \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

para $x = 0$ C
para $x = 1$ es C ? no. D

Consideramos ahora la serie funcional

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \dots \sum_{x=1}^{\infty} f_n(x)$$

- Se dice que la serie funcional converge en $x=0$ serie $\sum f_n(x_0)$ es C, es decir si tiene suma
- Se dice que la serie funcional converge en un $D \subseteq \mathbb{R}$, si C $\forall x \in D$ se llama C.C.
- Se llama campo de convergencia de una serie f al conjunto de ptos de una serie donde converge.

Ejemplo: 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n \rightarrow \text{serie potencial} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$K = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot x^{n+1}}{\frac{n!}{e^n} \cdot x^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\overset{n!\,(n+1)}{(n+1)!}\, \overset{x^n \cdot x}{x^{n+1}} \cdot \cancel{e^n}}{\underset{e^n \cdot e}{e^{n+1}} \cdot \cancel{n!}\; \cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cdot x}{e} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{e} |x| = \infty \Rightarrow K > 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ solo converge cuando $x = 0$

Ejemplo 2

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2} \cdot x^n \Rightarrow$ serie potencial $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Por el criterio de la raiz

$$k = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{x^n}{2^n \cdot n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \sqrt[n]{n^2} \right| =$$

$$= \frac{|x|}{2}$$

- Si $k = \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n x^n$ es convergente $\Rightarrow$

$|x| < 2 \Rightarrow$ Converg $\forall x \in (-2, 2)$

a) $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2^n \cdot n^2} \cdot 2^n = \frac{1}{n^2}$ por comparación con la armonica converge.

b) $x = -2$ $\quad \frac{1}{2^n \cdot n^2} (-2)^n = \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$ estudiando la en valor absoluto, la anterior que era convergente por lo tanto esta A.C.

$(-2)^n \downarrow (-1)^n \cdot 2^n$

radio de convergencia $R = 2$