AZTERKETA ARIKETAK – ZENBAKI KONPLEXUAK
2014-2015 IKASTURTEA

1. ARIKETA

Lor itzazu erronbo erregular baten z_1, z_2, z_3 eta z_4 afixuak hurrengo datuak ezaguturik:

i) z_1 zenbaki irudikari puru negatiboa da eta $|z_1| = 3$.
z_2 bigarren koadrantean kokatua dago.
z_1 eta z_2 erronboaren aurkako erpinak dira.

ii) $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{5}$; $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = -1$

iii) $|z_3 - z_1| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}|z_2 - z_1|$

Soluzioa:

$z_1 = -3i$, $z_2 = -6 + 3i$, $z_3 = 3 + 6i$ eta $z_4 = -9 - 6i$

2. ARIKETA

A) Eman ezazu era binomikoan hurrengo adierazpenaren balioa:

$$A = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{\pi}{12}\right)^8$$

B) Izan bedi $z_1 = \left(\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$ zenbakia $C = \sqrt{3} + 2i$ zirkunferentziaren barnean inskribaturiko triangelu aldekide baten erpina. Lor ezazu triangelu horren zati irudikaririk handieneko erpina.

Soluzioa:

A) $A = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$ B) $z_2 = 3 + 3i$

3. ARIKETA

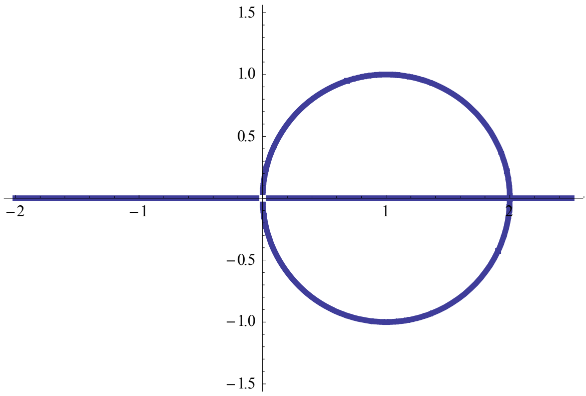
i) Lortu eta grafikoki adierazi, $\alpha = \dfrac{z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$ baldintza betetzen duten $z = x + i \cdot y$ zenbaki konplexuen leku geometrikoa.

ii) Aurreko leku geometrikoa osatzen duten infinitu puntu guztietatik, eman itzazu α_1 eta α_2 bi puntu, $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$ zenbaki irudikari purua izan dadin.

iii) Izan bitez $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=(z_1)^{21}$ eta z_3, $z^3-1=0$ ekuazioaren 2. koadranteko erroa. Idatz itzazu z_2 eta z_3 era binomikoan.

Soluzioa:

i) $$\alpha=\begin{cases} y=0 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases},\ salvo\ \ z=0$$



ii) $\beta=z_1-z_2$ kenketa zenbaki irudikari purua izan dadin, bere zati errealak nulua izan behar du, hau da, z_1 eta z_2 zenbakiak zati erreal bera eduki behar dute. Bertikal beran dauden $(x-1)^2+y^2=1$ zirkunferentziaren edozein puntu parek baldintza hori beteko du, adibidez: $z_1=1+i$ eta $z_2=1-i$.

iii) $$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\cdot\pi/6} \to z_2=(z_1)^{21}=e^{i\cdot 21\pi/6}=e^{-i\cdot\pi/2}=-i$$

$$z^3-1=0 \to z_3=\sqrt[3]{1}=\begin{cases} e^{i\cdot 0} \\ e^{i\cdot 2\pi/3}=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{i\cdot 4\pi/3} \end{cases}$$

4. ARIKETA

i) Eman ezazu $w=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^4$ zenbaki konplexua era binomikoan.

ii) Izan bedi $C=2\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)$ zentroa duen zirkunferentzian zirkunskribaturiko triangelu aldekidea. Triangelua eta zirkunferentzia z= 3+2i puntuan ukitzaileak direla jakinik, lor ezazu triangeluaren zati irudikaririk txikieneko A erpina.

Soluzioa:

i) $$w=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^4=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

ii) $$A=\left(2\sqrt{3}-3\right)+i\left(2-\sqrt{3}\right)$$

5. ARIKETA

Izan bedi $z^2+(-6+2i)z+(11-2i)=0$ ekuazioa.

i) Aurki itzazu z_1 eta z_2 aurreko ekuazioaren erroak, z_2 lehenengo koadrantean dagoen erroa dela jakinik.

ii) Izan bitez z_1 eta z_2 hexagono erregular baten alde baten bi erpinen afixuak. Aurki ezazu beste erpin baten afixua, z_3 (osagai irudikaririk handiena duena), z_2-ren ondoan dagoela jakinik.

Soluzioa: $z_1=4-3i \quad z_2=2+i \quad z_3=(1+2\sqrt{3})+i(3+\sqrt{3})$

6. ARIKETA

i) Lor ezazu $z^2-(3-4i)=0$ ekuazioaren z_1 eta z_2 erroak, z_1 laugarren koadrantean dagoela jakinik.

ii) α y β zenbaki konplexuak aurki itzazu, ondorengo baldintzak betetzen direla jakinik:

$$\begin{cases}|\alpha|=1\\ \arg(\alpha)=2\pi\end{cases} \quad \text{eta} \quad \begin{cases}\mathrm{Re}(\beta)=3\\ \mathrm{Im}(\beta)>0\end{cases}$$

eta

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{13}(3-2i)$$

iii) Izan bitez $z_3=z_1+\alpha$ eta $z_4=z_2+\beta$ erronbo erregular baten diagonal txikiaren bi erpinen afixuak. Aurki itzazu beste bi erpinen afixuak, diagonal handiaren luzera txikiaren luzeraren bikoitza dela jakinik.

Soluzioa:

i) $z_1=2-i \quad z_2=-2+i$ ii) $\alpha=1 \quad \beta=3+2i$

iii) $z_3=3-i \quad z_4=1+3i \quad z_5=-2-i \quad z_6=6+3i$

7. ARIKETA

i) $z^3-(4+4i)z^2-(2-11i)z+(z-i)=0$ ekuazioak 3 erro konplexu ditu, z_0, z_1 eta z_2. Horietatik bat z_0 irudikari purua da eta gainera, $z^3+i=0$ ekuazioaren erroa da. Lor itzazu z_1 eta z_2 beste bi erroak.

ii) Izan bitez $z_1 = 3 + i$ eta $z_2 = 1 + 2i$ bi zenbakiko konplexuak. Lor ezazu z_3 beste zenbaki konplexu bat hurrengo baldintzak bete ditzan:

$$|z_3 - z_2| = |z_3 - z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}|z_2 - z_1|$$

$$\mathrm{Im}[z_3] > \mathrm{Im}[z_2]$$

Soluzioa:

i) $z_1 = 3 + i \quad z_2 = 1 + 2i$ ii) $z_3 = 3 + i\frac{7}{2}$

8. ARIKETA

$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ dela jakinik,

1) Adierazi era binomikoan:

i) $z_1 = z^5$

ii) $z_2 = z^9$

2) z_1 eta z_2 zenbaki konplexuen afixuak triangelu angeluzuzen isoszele baten hipotenusaren erpinak direla jakinik, lor ezazu z_3 (zati irudikaririk handiena duena) triangeluaren hirugarren erpina.

Soluzioa:

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \qquad z_2 = i \qquad z_3 = \frac{1}{4}(3+\sqrt{3}) + \frac{i}{4}(1+\sqrt{3})$

9. ARIKETA

i) Lortu $(1+i)\cdot z^3 - 8\sqrt{2}\ i = 0$ ekuazioaren z_1, z_2 *eta* z_3 erroak, z_1 lehenengo koadrantean kokatutako erroa izanik .

ii) Marraztu zirkunferentzia baten zirkunskribatuta dagoen, z_1, z_2 *eta* z_3 puntuetatik igarotzen den eta z_1 puntuan zirkunferentzia horren ukitzailea den karratua.

iii) Lortu era binomikoan aurreko karratuaren erpinaren afixua, zati irudikaririk handiena duena.

Soluzioa:

i) $z_1 = 2_{\frac{\pi}{12}}$ $z_2 = 2_{\frac{3\pi}{4}}$ $z_3 = 2_{\frac{17\pi}{12}}$ iii) $\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

10. ARIKETA

Bedi $z = x + i \cdot y$ nulua ez den zenbaki konplexu bat, eta bedi $\alpha = \frac{\bar{z}}{z}$. Ondokoak eskatzen dira:

i) Adierazi α-ren modulu eta argumentua z-ren argumentuaren arabera, baita x eta y-ren arabera.

ii) Zehaztu grafikoki α-ren afixuak deskribatzen duen leku geometrikoa, z-ren afixua lehenengo koadrantean kokatuta zirkunferentzia baten arkutik doanean, non zirkunferentziaren erradioa R=1 den eta bere zentroa koordenatuen jatorrian dagoen.

iii) Baldin aurreko ataleko zirkunferentziaren erradioa R=3 bada, adierazi arrazoituz zein izango litzatekeen erantzuna kasu honetan.

Soluzioa:

i) $|\alpha| = 1 \quad \arg(\alpha) = -2\arg(z) = -2arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ii) eta iii) Leku geometriko bera dute: beheko erdi-planoan kokatuta erdi-zirkunferentzia, R=1 erradioa eta bere zentroa jatorrian dituena.

11. ARIKETA

$z^2 - (3+4i) \cdot z + (-1+7i) = 0$ ekuazioaren z_1 eta z_2 erroen afixuak hexagono erregular baten zentroa eta $\overline{AB}$ alde baten erdi-puntua hurrenez hurren dira. A eta B erpinen afixuak aurki itzazu, $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ dela jakinik.

Soluzioa:

$z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 3i$, A Erpina: $\left(1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) + i\left(3 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B Erpina: $\left(1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) + i\left(3 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$