

Dinámica de Maquinaria

Tema 1: Introducción a la dinámica de maquinaria

- Reacciones en los pares cinemáticos. Diagramas de sólido libre.
- Clase de un par: N° de g.d.l. que permite.
- Cómo poner fuerzas y pares de reacción en los pares cinemáticos
 - Restricción de desplazamiento: Colocamos una fuerza
 - Restricción de un giro: Colocamos un par
- Ej: Par prismático: Aparecerán dos fuerzas y tres pares.

1.4. Principios de la dinámica

Mar, 23-XI-10

1.4.1. 2ª Ley de Newton

$$\sum_{i=1}^n \sum \frac{dP}{dt} = m \cdot a$$

1.4.2. T^m Momento cinético

$$N_o = \frac{dH_o}{dt} + V_o \wedge p ; \quad N_o = I \cdot \omega$$

1.4.3. T^m de la energía

Principio de D'Alembert

$$\vec{F} - m \cdot \vec{a}_g = 0$$

$$\rightarrow \vec{F} + \vec{F}_I = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

También para momentos →

$$\vec{M}_O - \frac{d\vec{H}_O}{dt} - \vec{V}_O \wedge \vec{P} = 0$$

$$\rightarrow \vec{M}_O - \underbrace{I_a \vec{\omega}}_{M_I} + \underbrace{OQ \wedge (-m\vec{a}_Q)}_{M_{II}} = \vec{0}$$

$$\Sigma M = 0$$

M_I Inercia de giro
 M_{II} Momento de la fuerza de inercia

→ Principio de las potencias virtuales:

Trabajos virtuales: En un sólido rígido en eq. estático, si le aplicamos un campo de desplazamientos, el trabajo realizado por estas fuerzas (que lo tienen en equilibrio) es nulo.

• Traduciendo esto a potencias:

$$Pot_{apl} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ap}^i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j=1}^n M_{ap}^j \cdot \vec{\omega}_j = 0$$

Incluimos las fuerzas de inercia!

• Ecuaciones de Lagrange

Fuerza generalizada asociada a la coordenada Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ap}^i \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}$$

1.5. Sistemas de masas equivalentes

Se trata de sustituir los sistemas complicados y elementos de los mecanismos por masas puntuales que se comporten de la misma manera, i.e., cuando se aplicados los principios de la dinámica a ambos sistemas se obtienen las mismas ecuaciones.

¿cuándo se cumple esta condición? Requisitos:

- Ambos sistemas deben tener la misma masa
 - Mismo centro de gravedad
 - Mismas características de inercia
- }

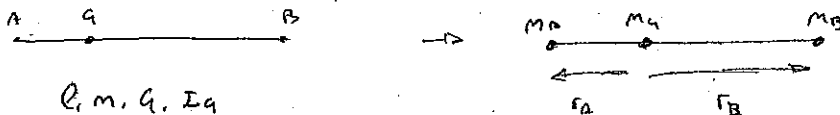
Estáticamente equivalentes

Dinámicamente eq.

Q1) Sistema lineal

Tenemos una barra de masa m , longitud l , centro de gravedad G y momento de inercia respecto a ese eje I_G

Se puede sustituir por tres masas puntuales m_A, m_B, m_G colocadas en los extremos y en G . Valores:



$$(1) \quad m = m_A + m_B + m_G$$

$$(2) \quad -m_A r_A + m_B r_B = 0 \quad \oplus \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$$(3) \quad I_G = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$$

Si tenemos un sólido plano (moviéndose en su plano), en nos salen dos ecuaciones; corresponden a los ejes x e y :

$$\begin{cases} \sum m_i x_i = 0 \\ \sum m_i y_i = 0 \end{cases}$$

En este caso, tendremos 4 incógnitas:

$$m_1, m_2, m_3, m_4$$

En el caso tridimensional, no hay una incógnita, sino
en Tensor de Inercia 3×3 simétrico: 6 incógnitas, más 3 espaciales,
más la suma de masas: 10 incógnitas en total, con sus
10 ecuaciones... en fin.

Mar. 23-XI-10

(sigue)

Temas 2: El Problema Dinámico Inverso

1- Definición, utilidad y planteamiento

• Se trata de calcular las reacciones en los pares de un mecanismo, así como los pares motores que se le deben aplicar para conseguir un movimiento deseado, venciendo las acciones resistentes "activas" (cargas) y "pasivas" que se oponen al mismo.

⊙ Datos: Movimiento, acciones resistentes, resistencias pasivas (dir. y sentido)

• Incógnitas: Acciones motoras, reacciones, resistencias pasivas (modelo)

→ Planteamiento

• Datos

- Propiedades másicas e inerciales de los elementos (m, g, J, \dots)
- Movimiento del mecanismo
- Acciones resistentes y resistencias pasivas (dirección y sentido)

• Principios y métodos de resolución

- Equilibrio dinámico de D'Alembert (elemento a elemento)
- Ppo potencias virtuales

2.- Aplicación del Principio de D'Alembert.

a) Previsión del nº de ecuaciones y el nº de incógnitas.

- Asegurarse de que se ajustan

- Premisas de partida (salvo que se indique lo contrario)

- No restricciones redundantes
- No posiciones singulares ("funcióna Gröbler")
- Mto. plano.
- Enlaces perfectos.

- N incógnitas: Mecanismo con q g.d.l., P_I pares clase I, P_{II} pares clase II, n elementos, incluido el fijo.

$$\bullet N \text{ incógnitas} = q + 2P_I + P_{II}$$

- N ecuaciones

$$3(N-1)$$

$$q = 3(N-1) - 2P_I - P_{II}$$

¡Gröbler!

b) Planteamiento de las ecuaciones de cada elemento

- Típicamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_p = 0 \end{array} \right. \quad \text{o bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_{P_1} = 0 \\ \sum M_{P_2} = 0 \\ \sum M_{P_3} = 0 \end{array} \right.$$

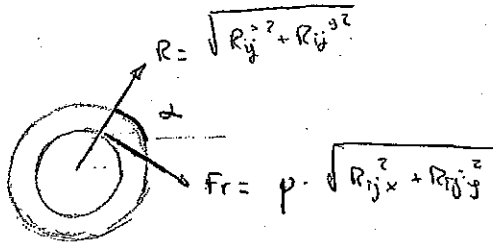
Siendo P_1, P_2 y P_3 puntos cualesquiera.

c) Resolución

d) Planteamiento para elementos tridimensionales

e) Efecto del rozamiento

Complica toda la operación. $\vec{F}_r = \mu \cdot \vec{R}$. Como



Otra forma de atacar esto es por métodos numéricos. La otra es el método iterativo que sigue:

Resolver el problema sin roz.

Obtener reacciones

cálculo de las F_r 's

Resolver el problema con las F_r 's calculadas

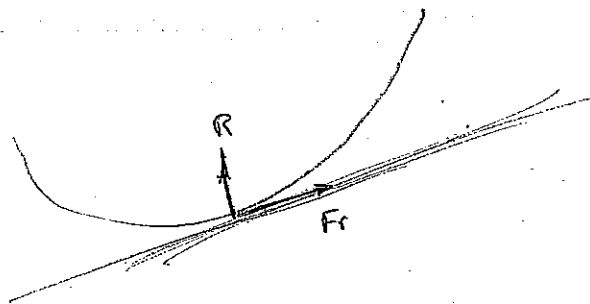
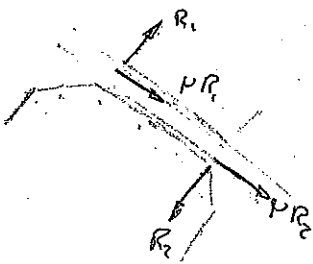
~~¿Error acept?~~

Obtener las nuevas reacciones

¿Error aceptable? → No

→ Si → Fin

Aparte sobre los pares prismáticos y de lera:



3.- Aplicación del ppo de las Potencias Virtuales

Interesante cuando las resistencias pasivas son despreciables o nulas, y sólo nos interesa calcular las acciones motoras, y no las reacciones en los pares. Suponemos enlaces perfectos \Rightarrow No disipan potencia

Como consideramos sueltas de inercia,

$$\delta W_{apl.} = 0 \rightarrow \text{Campo de despl. virtuales } \delta r_i, \delta \varphi$$

$$\frac{\delta W_{apl}}{dt} = 0 = Pot_{ap} \rightarrow \text{Campo veloc. virtuales } \tilde{v}, \tilde{\omega}$$

3.1.- Mecanismo de un g.d.l.

Conocemos: 1 g.d.l., N , (T_e) , ω_e (q.e. d.e.)

\hookrightarrow obtenemos: $\omega_i, d_i, v_k, a_k \rightarrow F_i^i, M_i^i$

\hookrightarrow Campo de veloc. virtuales

N : N^o elementos
 NP : N^o grtas no de inercia
 T_e : par motor

Otras sueltas aplicadas } $F_k \rightarrow NP$
 $M_{k_i} \rightarrow$

$$T_e \tilde{\omega}_e + \sum_{i=1}^{NP} \vec{F}_k \cdot \tilde{v}_k + \sum_{i=2}^N M_i \tilde{\omega}_i + \sum_{i=2}^N (F_i^i v_{a_i}^i + M_i^i \tilde{\omega}_i) = 0$$

\rightarrow Generalización para g grados de libertad

g : $T_{e1}, T_{e2}, \dots, T_{eg}$. Necesito g campos de veloc. virtuales

$$1 - T_{e1} \tilde{\omega}_{e1} + T_{e2} \tilde{\omega}_{e2} + \dots + T_{eg} \tilde{\omega}_{eg}$$

$$2 - T_{e1} \tilde{\omega}_{e1}^2 + T_{e2} \tilde{\omega}_{e2}^2 + \dots + T_{eg} \tilde{\omega}_{eg}^2$$

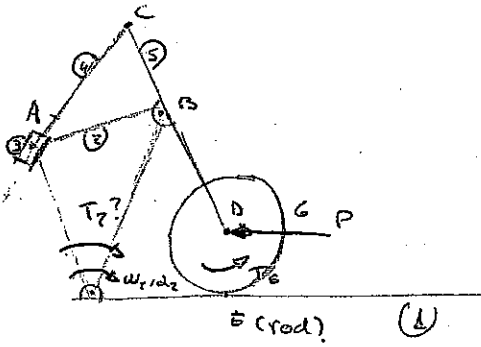
$g -$

Lo que se hace para simplificar es tomar $\omega_{en}^n = 1$, y el resto cero.

El ppo de las potencias virtuales permite también calcular reacciones, pero es difícil y no lo utilizamos.

→ En la p. 45 hay un ejemplo (todo el pb. 4).

Ejemplo:

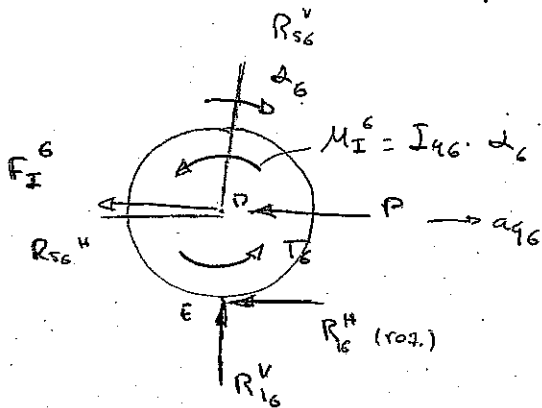


Conocemos a_2, d_2, P, T_6
 Debemos calcular T_2 para que pueda vencer P y T_6 para moverse con esas a_2 y d_2 .

Con la entrada (a_2, d_2) calculemos todo el moto: Obtenemos a_i, d_i (aceleraciones de los centros de gravedad), y con ellos sacamos las sueltas de inercia: F_i^i, M_i^i .

Podríamos aplicar potencias virtuales. Si nos piden también reacciones vamos a tener que aplicar D'Alembert y la estática. Vamos a hacer esto en plan didáctico.

No podemos empezar por el 2, claro, porque tenemos la incógnita. Empezamos por el 6, por ejemplo:



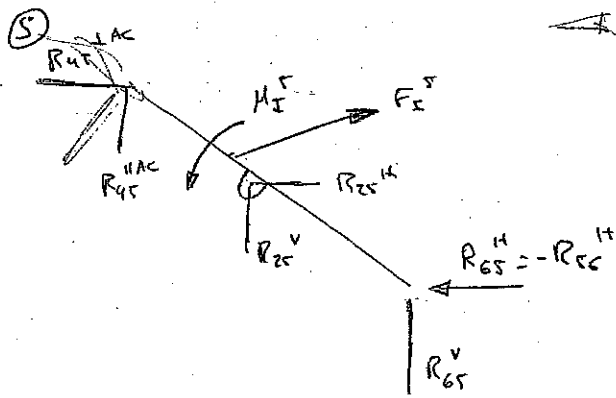
- Conocidas
- Desconocidas

$$\sum M_E = 0 \rightarrow R_{56}^H$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow R_{16}^H$$

Me queda una ec. para R_{56}^V y R_{16}^V .

No puedo seguir por aquí.



M_I^I, F_I^I genericas, hace donde quiere.

Muchas ~~ecuaciones~~ e incógnitas, dos reacciones en C, dos en B...

pasamos al siguiente.

con $R_{45}^{\perp IAC}$ y R_{45}^{IIAC}

$$\sum M_n = 0 \quad R_{56}^V$$

$$\sum F^V = 0 \quad R_{25}^V$$

$$\sum F^H = 0 \quad R_{25}^H$$

Tengo todo

Nada.

con M_{34} conoc. = $-M_{43}$:

$$\sum M_c = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum F^{IIAC} = 0$$

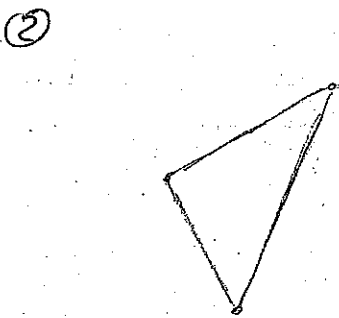
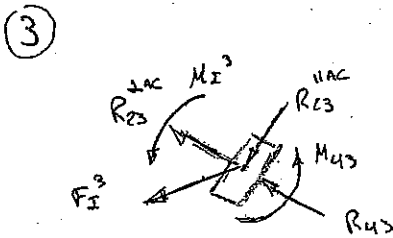
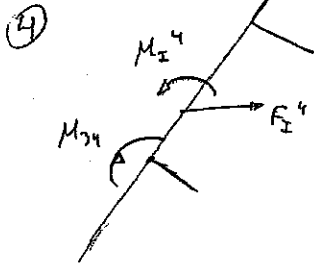
y tengo todo.

$$\sum M_n = 0 \rightarrow M_{43}$$

$$\sum F^{IIAC} = 0 \rightarrow R_{73}^{IIAC}$$

$$\sum F^{IAC} = 0 \rightarrow R_{23}^{IAC}$$

Tengo todo



Conozco todo salvo

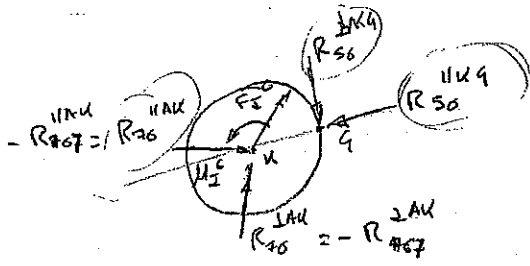
$$R_{12}^V$$

$$R_{12}^H$$

$$T_z$$

Los obtengo con todo lo que sé.

- Elemento 6:



$$\sum M_u = 0 \rightarrow R_{56} \perp K_9$$

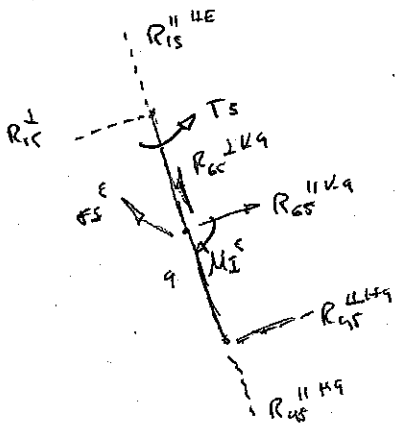
$$\sum M_q = 0 \rightarrow R_{70} \parallel AK$$

$$\sum F^{1K_9} = 0 \rightarrow R_{56} \parallel K_9$$

Elemento cerrado. Volviendo al elemento 7,

$$\sum F \parallel AK = 0 \rightarrow R_{24,7} \parallel AK$$

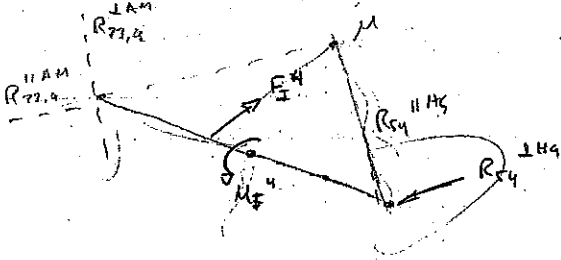
- Elemento 5



$$\sum M_u = 0 \quad R_{45} \parallel HG$$

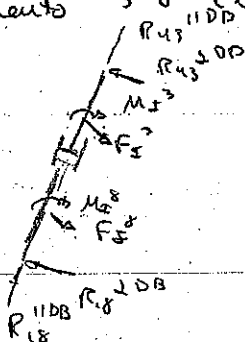
$$\sum M_E = 0 \quad R_{45} \perp HE$$

- Elemento 4



$$\sum M_u = 0 \rightarrow R_{24} \perp AM \quad R_{22,4}$$

- Elemento 3-8 (los tomo junto)



$$\sum M_D = 0 \quad R_{18} \perp DB$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_{43} \perp DB$$

Para seguir, ataco el par ternario:

$$\vec{R}_{47,2} + \vec{R}_{74,7} + \vec{R}_{27,4} = \vec{0}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 Conocida $R_{47,2}$ Conocida Conocida $R_{27,4}$
 Desconocida $R_{74,7}$ Desconocida $R_{71,1}$

Saco las desconocidas

Uso al elemento 4, y saco:

$$\begin{aligned} \sum M_H = 0 & \rightarrow R_{34}^{HDB} \\ \sum F_V = 0 & \rightarrow R_{54}^{HLE} \end{aligned}$$

Uso también el elemento 7:

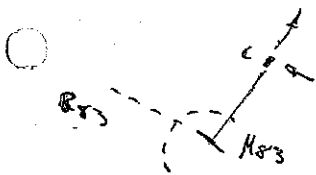
$$\sum F^H = 0 \rightarrow R_{12}^H$$

$$\text{En el 7: } \sum F^{HAX} = 0 \rightarrow R_{24,7}^{HAX}$$

$$\text{En el 5: } \sum F^{HHE} = 0 \rightarrow R_{15}^{HHE}$$

$$\text{y por último en 3-8 } \rightarrow \sum F^{HDB} = 0 \rightarrow R_{18}^{HDB}$$

Ahora, separo 3 y 8:



$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{83}$$

$$\sum F^{HDB} = 0 \rightarrow F = p \cdot \text{secc} \rightarrow \boxed{P}$$

$$\sum F^{\perp DB} = 0 \rightarrow R_{83}$$



Tema 3: El Problema Dinámico Directo

Lun, 29-XI-10

(sigue)

1.- Definición, utilidad y aplicaciones

Objetivo: Determinar el movimiento, las reacciones en los pares y las resistencias pasivas de un mecanismo, conocida la geometría del mismo, las acciones motoras y las resistentes.

Mar, 30-XI-10

2.- Coordenadas independientes Vs Coordenadas dependientes

Es importante elegir bien las coordenadas para definir el mecanismo.

Las ~~coordenadas~~ coordenadas independientes se llaman también "generalizadas". Constituyen el n mínimo necesario para definir el mecanismo, y coinciden con el n de gdl del mismo. Cuando se utilizan, el planteamiento suele ser más complicado, pero la resolución de las ecuaciones es más sencilla.

Las coordenadas independientes son, digamos, "secundarias" del mecanismo, y son más de las estrictamente necesarias. El planteamiento es sencillo, pero requiere del uso de Ecuaciones de Restricción: si tengo un gdl y k coordenadas independientes, necesito "ligarlas" entre ellas, claro: No pueden hacer lo que quieran. Ej: Distancias fijas entre puntos, etc. Como necesito incluir estas ecuaciones (cuando sencillas) en mi sistema, la cosa se complica.

3. Ecuaciones del mvto. Aplicación de los ppos de la dinámica.

Las ecuaciones de aplicación del movimiento se obtienen aplicando (bien a un elemento, bien a un conjunto) los ppos de la dinámica (del tema 1)

4. Dinámica de sistemas de un gdl sometidos a acciones dependientes de la posición.

Premisas:

Un gdl, fuerzas aplicadas dependientes de la coordenada generalizada, (q, s , etc), ausencia de rozamiento.

Clave: Teorema De la Energía.

Dos métodos: Método de Avium y Método de Zhukovski (relacionado con Lagrange, usa fuerzas generalizadas).

a) Método de Avium

→ Teorema de Avium: "En un mecanismo de 1 gdl, la contribución que supone la energía cinética del elemento j sobre la energía cinética total no depende de la velocidad del elemento de entrada del mecanismo".

$$\frac{T_j}{T} = E_j \rightarrow \text{"Coeficiente de contribución de energía del elemento } j \text{"}$$

$$T_j = \frac{1}{2} m_j v_{q_j}^2 + \frac{1}{2} I_{q_j} \omega_j^2 \quad \leftarrow \text{!}$$

Siendo el mecanismo de n gdl, la posición del "q" y la orientación de cada elemento se pueden expresar en función de la coordenada generalizada: de (q_e) , de (φ_e)

Utilizando coeficientes de influencia, para un elemento cualquiera

$$u_j = g_j(\varphi_e) \cdot w_e \quad ; \quad V_{aj} = g_{aj}(\varphi_e) \cdot w_e$$

Valle Energías:

$$T_j = \frac{1}{2} w_e^2 (m_j g_{aj}^2(\varphi_e) + I_{aj} g_j^2(\varphi_e))$$

$$T_j = \frac{1}{2} w_e^2 \sum_{j=2}^n (m_j g_{aj}^2(\varphi_e) + I_{aj} g_j^2(\varphi_e))$$

$$E_j(\varphi_e) = \frac{T_j}{T} = \frac{[m_j g_{aj}^2(\varphi_e) + I_{aj} g_j^2(\varphi_e)]}{\sum_{j=2}^n [m_j g_{aj}^2(\varphi_e) + I_{aj} g_j^2(\varphi_e)]} \neq \underline{f(\varphi_e)}$$

Planteamiento del teorema de la Energía:

"El trabajo realizado por las fuerzas exteriores entre dos posiciones del mecanismo es igual al incremento de energía cinética entre esas dos posiciones."

$$[W_{ext}]_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} = T(\varphi_e) - T(\varphi_e^0)$$

Operando y despejando cosas, se llega a

$$\frac{1}{2} I_e \underbrace{w_e^2}_{\text{Despejamos}} = E_e(\varphi_e) \left[(W_{ext}(\varphi_e))_{\varphi_e^0}^{\varphi_e} + T(\varphi_e^0) \right]$$

Despejada de α_e , se puede sacar la raíz para obtener ω_e , y derivando con respecto al tiempo, de: (ya "simplificada")

$$\alpha_e = \frac{1}{T_e} \left[\frac{dE_e(\varphi_e)}{d\varphi_e} ([W_{ext}]_{\varphi_e}^{pe} + T(\varphi_e)) + E_e(\varphi_e) \frac{d[W_{ext}]_{\varphi_e}^{pe}}{d\varphi_e} \right]$$

b) Método de Zhukovski

Teorema de Zhukovski: "Elegido un elemento de un mecanismo de un gdl y CIR fijo (manivela, deslizadera, ...) se puede tomar ese elemento aislado, y dotarlo de una fuerza (masa) y un momento (o fuerza) equivalentes y conseguir que se mueva de la misma forma aisladamente como perteneciente al mecanismo".

Este se llamará "elemento de reducción", y será "representativo", por así decirlo, del mecanismo.

El trabajo realizado por las fuerzas exteriores es el mismo en ambos casos. La igualdad se suele plantear en términos de potencia. De aquí se derivan los conceptos de Fuerza Reducida F^* y Momento Reducido M^* .

La energía cinética almacenada por ambos es también la misma. De aquí masa reducida m^* y momento de inercia reducido I^* .

Así:

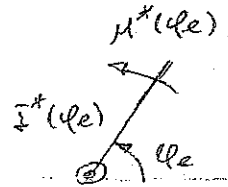
$$\rightarrow M^*(\varphi) \cdot \omega_e(\varphi) = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{V}_j + \sum \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} I^*(\varphi) \omega_e^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n m v_{ai}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n I_{ai} \cdot \omega_i^2$$

\downarrow \downarrow
 $(g_{ai} \cdot \omega_e)^2$ $(g_i \cdot \omega_e)^2$

Vale, pues vamos a utilizar estas magnitudes reducidas para aplicar el teorema de la energía:

$$\int_{\varphi^0}^{\varphi_e} M^*(\varphi_e) d\varphi = \frac{1}{2} I^*(\varphi_e) \omega_e^2 - \frac{1}{2} I^*(\varphi_e^0) \omega_{e0}^2$$



Sacamos $|\omega_e|$

Para las aceleraciones, es más cómodo trabajar en potencias. Para ello, derivamos la ecuación anterior:

$$M^*(\varphi_e) \omega_e = \frac{d}{d\varphi_e} \left[\frac{1}{2} I^*(\varphi_e) \omega_e^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e} \cdot \omega_e \cdot \omega_e^2 + \frac{1}{2} I^*(\varphi_e) \cdot 2\omega_e \omega_e$$

$$M(\varphi_e) = \frac{1}{2} \frac{dI^*(\varphi_e)}{d\varphi_e} \cdot \omega_e^2 + I^*(\varphi_e) \omega_e$$

Sacamos de

Llegados a este punto, tenemos $w_e = w_e(t)$ y $d_e = d_e(t)$.
Si queremos $q_e(t)$, simplemente integramos $w_e(t)$:

$$w_e = \frac{dq_e}{dt} ; \int_a^b dt = \int_{q_e^0}^{q_e} \frac{dq_e}{w_e(q_e)} \quad t = t(q_e) \quad q_e = q_e(t)$$

Esto lo ilustra el ejemplo de aplicación 2, en la página 74. Sígase de allí.

Plata
García

Como es bien sabido, un volante de inercia es un elemento pasivo (no activo) cuyo objetivo no es otro que el de introducir inercia en el sistema.

1. Características de las máquinas funcionando en régimen

Tenemos

Entendemos por "funcionar en régimen" funcionar en régimen permanente, es decir, su movimiento (posición, velocidad, aceleración) tiene carácter periódico.

$$w(\varphi) = w(\varphi + \lambda) \quad \text{Periodo}$$

Por cierto, seguimos tratando de máquinas de t.g.d.l.

Normalmente, una máquina tiene dos transitorios (de arranque y de parada) y en medio el permanente. Si el periodo del permanente es muy grande, el cálculo del volante se puede considerar hacer sólo para el permanente, digamos. Es en el que nos centraremos.

Si tenemos una máquina reducida, ¿cómo sabemos si estamos en régimen permanente? Lo será si se cumple:

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} M^*(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} M^*(\varphi) d\varphi = I^*(\varphi) + \mathcal{I}$$

es decir, el trabajo que recibe y que cede la máquina en un ciclo es el mismo.

Esto no significa $w = cte$, por cierto, aunque en general fluctuará poco. Se define la velocidad media w_a como:

$$w_a = \frac{w_{max} + w_{min}}{2} \quad \text{lea en ciclos}$$

La fluctuación, por su parte, será:

$$\xi = \frac{w_{max} - w_{min}}{w_a}$$

2. Efecto del volante de inercia

La introducción de volantes de inercia busca disminuir esta fluctuación.

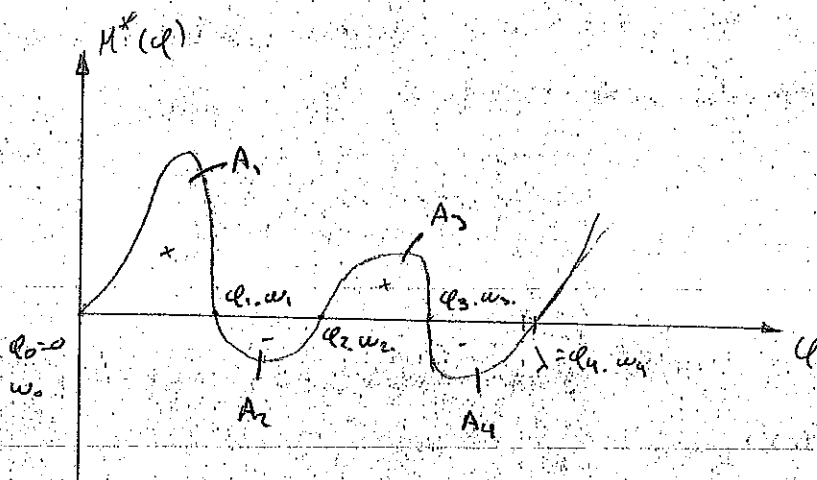
Lun, 13-XII-10

4. Cálculo aprox del volante de inercia

Conocemos la velocidad media de la máquina w_a , la fluctuación máxima ξ y las fuerzas aplicadas M_m y M_R (par motor y resistente)

Se entiende que funcionamos en rég. permanente.

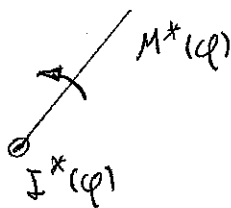
Conocidos los pares, tenemos el diagrama de momentos reducidos:



$$\int_0^{\alpha} M^*(\alpha) d\alpha = 0$$

Tenemos que calcular I , el volante.

○ Simplificando la máquina:



$I \gg I^*(\varphi)$, lógicamente.

Teorema de la Energía:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M^*(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (\cancel{I^*(\varphi)} + I) \omega^2 - \frac{1}{2} (\cancel{I^*(\varphi)} + I) \omega_0^2$$

Descomponiendo:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^* d\varphi = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2) \rightarrow \omega_1 \text{ máximo relativo}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^* d\varphi = A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \rightarrow \omega_2 \text{ mínimo relativo}$$

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_3} M^* d\varphi = A_3 = \frac{1}{2} I (\omega_3^2 - \omega_2^2) \rightarrow \omega_3 \text{ máximo relativo}$$

$$\int_{\varphi_3}^{\varphi_4} M^* d\varphi = A_4 = \frac{1}{2} I (\omega_4^2 - \omega_3^2) \rightarrow \omega_4 \text{ mínimo relativo}$$

Tenemos, pues, ω_{max} y ω_{min}

Si vamos sumando áreas:

$$S_1 = A_1 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

$$S_2 = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_0^2)$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} I (\omega_3^2 - \omega_0^2)$$

$$S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

Si $\rightarrow S_{\max}$ y S_{\min}

$$S_{\max} = \frac{1}{2} I (\omega_H^2 - \omega_0^2)$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2} I (\omega_m^2 - \omega_0^2)$$

$$S_H - S_m = \frac{1}{2} I (\omega_H^2 - \omega_m^2)$$

$$\omega_H - \omega_m =$$



Como $\omega_a = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2}$; $\xi = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_a}$

Podemos expresar esto último como:

$$S_{\max} - S_{\min} = \frac{1}{2} I \cdot 2 \omega_a \cdot \xi \omega_a$$

$$I = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{\xi \omega_a^2}$$

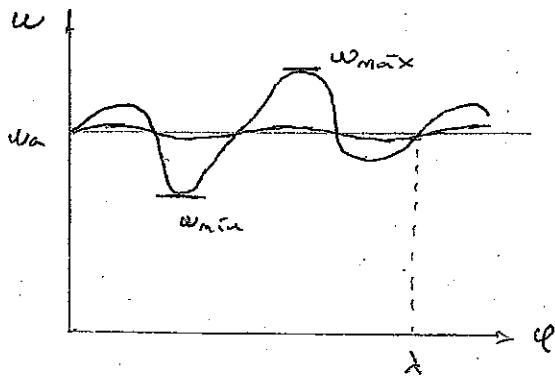
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I^*(\omega) d\varphi$$

Inercia de la propia máquina.

5. Funciones de los volantes de inercia

→ Primera y fundamental:

Reducir las fluctuaciones de la velocidad de la máquina en régimen permanente.



▣ Con volante

▣ Sin volante

$$\Delta E = \frac{1}{2} J (\omega^2 - \omega_0^2)$$

→ Segunda: Se aplica a las máquinas de a las que suministramos energía durante la mayor parte del ciclo para que la entreguen en un espacio de tiempo (o angular) pequeño: Véase prensa (para punzonar, embotir olatas, ...), UERS, etc.

Lo que hace el volante es almacenar energía a lo largo del ciclo para luego ceder un porcentaje (20 o 25%, pero puede ser una cantidad grande) durante un periodo relativamente corto del ciclo. Esto permite utilizar un motor relativamente pequeño.

→ Tercera: Ayuda a la regulación.

Hay una serie de perturbaciones dinámicas (una súbita pérdida de carga por cualquier cosa, por ejemplo, que puede embalarlos la máquina y romperla, por ejemplo) que pueden cargar el régimen permanente.

Es necesario, pues, un regulador: Un elemento que detecte la perturbación y sea capaz de actuar en su contra: Bajar la fuente de potencia, etc.

También puede darse el caso contrario: Un súbito aumento de la carga que nos para la máquina progresivamente si no hacemos algo.

El caso es que, claro, ¿cómo detectar cuándo ha habido una perturbación? Lo sabremos cuando sobrepasemos una ω máxima o mínima, las "propias" del regulador que estemos usando. Si las fluctuaciones en el régimen permanente normal de la máquina son muy grandes, el regulador no sabe cuándo nos hemos pasado, porque detecta fluctuaciones. Así, el introducir un volante estabiliza la ω de la máquina y permite trabajar al regulador.

6. Dimensionamiento del volante

Una vez que tenemos la inercia I , si (como todo el mundo) usamos un volante en forma de aro con toda la m concentrada en la periferia (con 3 o 4 radios, lógicamente), tendremos que dimensionar la masa y el radio (sobre todo el radio) del volante.

Nuestras restricciones son básicamente el espacio disponible y la capacidad resistente del material que utilizemos.

Recordemos el momento del aro:

$$I = MR^2 \quad \text{Cuando } R, \text{ sacamos } M.$$

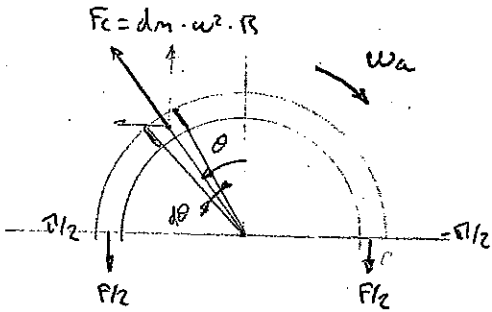
$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{para el disco.}$$

• Notas: A10!

○ - $PD^2 = 4gI$ (se usa a veces) $\rightarrow P = \text{peso}$; $D = \text{diámetro}$

- De las dos limitaciones de R_c usaremos la más restrictiva

¿cómo hacer lo de la resistencia del material?



$$2 \cdot F/2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dF_c \cos \theta$$

$$dF_c = dm \omega^2 R$$

$$dm = \rho \cdot dVol = \rho \cdot R d\theta (R_{ext} - R_{int}) \cdot s$$

anchura
↑
s

$$\sigma = \frac{F/2}{(R_{ext} - R_{int})s} = \rho \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

$$\sigma = \rho \cdot v^2$$

Siendo v la velocidad periférica del volante, y ρ la densidad.

7. Aplicaciones típicas

Motor de combustión interna \rightarrow Reducir la fluctuación

Presas mecánicas \rightarrow Almacenamiento de energía

P. 99 ej. 2

Mar. 14-XII-10

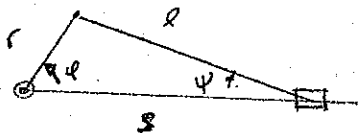
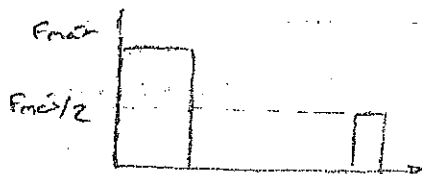
$I = ?$

$\lambda = 2\pi$

$r = 0.6 \text{ m}$

$l = 4 \text{ m}$

$M_r = 40.000 \text{ Nm} = \text{cte}$



$g) r \sin \varphi = l \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{r}{l} \sin \varphi \rightarrow \cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2}$

$x) r \cos \varphi - s - l \cos(180 - \varphi) = 0; \rightarrow s = r \cos \varphi + l \cos \varphi = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \varphi\right)^2} = f(\varphi)$

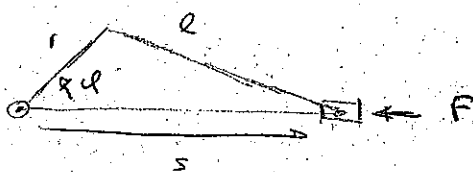
$\rightarrow \frac{ds}{d\varphi} = -r \sin \varphi + \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ Se verifica la pregunta 1.

\rightarrow Para $\varphi = \pi/4$

1^{er} término = -0.4243

2^o término = -0.04525

Error = 0.0963 < 12% Nos vale



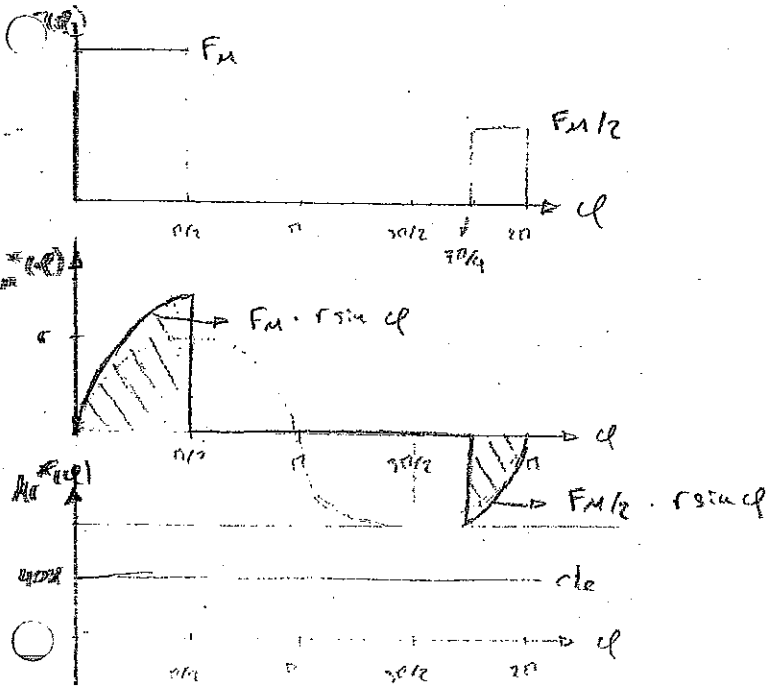
$P = F \cdot \frac{ds}{dt}$

$M_m^*(\varphi) = -F \frac{ds}{d\varphi}$

$P = M_m^*(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$

~~$M_m^*(\varphi)$~~

$$M_m^*(\varphi) = F(\varphi) \cdot r \sin \varphi$$



$$\int_0^{2\pi} M_m^*(\varphi) d\varphi = 0$$

En régimen

¡Dogma!

$$\int_0^{2\pi} M_m^*(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} M_r d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} F_m r \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} F_m/2 \cdot r \cdot \sin \varphi d\varphi ;$$

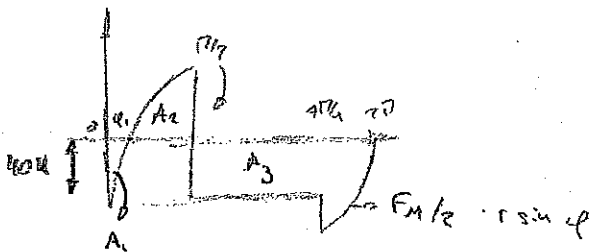
$$\int_0^{2\pi} M_r d\varphi = 40.000 \cdot 2\pi$$

Iguando la suma de las dos integrales deberá ser 0:

$$2\pi \cdot 40.000 =$$

$$F_{m\max} = 490746,67 \text{ N}$$

El diagrama del momento reducido es la resta del del de Par motor menos el de Par resistente:



$$\varphi_1 = 7,8^\circ$$

$$A_1 = - \left[40.000 \cdot \varphi_1 - \int_0^{\varphi_1} r F_u \sin \varphi \, d\varphi \right] = -2719,52 \text{ Nm}$$

$$A_2 = \int_{\varphi_1}^{\pi/2} r F_u \sin \varphi \, d\varphi - 40.000 (\pi/2 - \varphi_1) = 234336,74 \text{ Nm}$$

$$A_3 = -(A_1 + A_2) = 231617,22 \text{ Nm}$$

$$S_1 = A_1 = -2719,52$$

$$S_2 = A_1 + A_2 = 231617,22$$

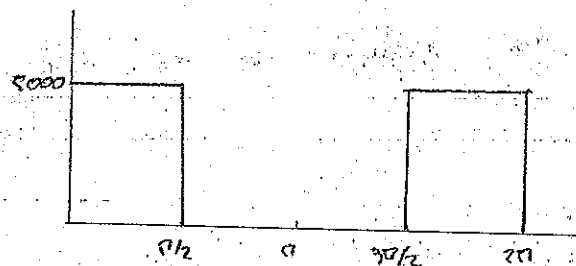
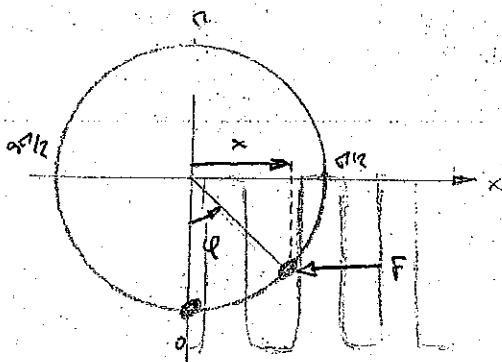
$$S_3 = 0$$

$$\bar{I} = \frac{S_{u1} - S_{m1}}{\xi \cdot \omega^2} = 13355,6 \text{ kg m}^2$$

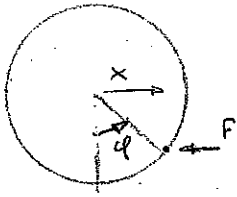
\downarrow \times
 0,004 200 rpm dato
 dato

P. 105 ejercicio 1

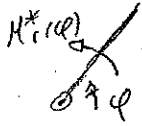
Modelización poco realista de F:



$r F \sin \varphi$
 $\frac{1}{\omega^2}$



$$P = -F \cdot \dot{x}$$



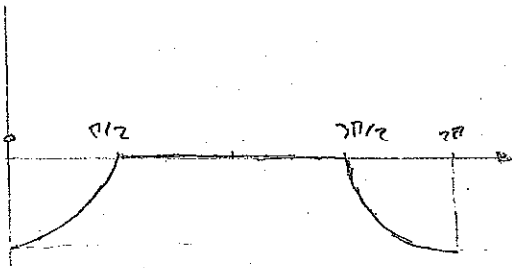
$$P = M_r^*(\varphi) \cdot \dot{\varphi}$$

}

⊖

$$M_r^*(\varphi) = -F \frac{\dot{x}}{\dot{\varphi}} = -F R \cos \varphi = F (-R \cos \varphi)$$

Multiplicando las dos funciones: (F y $-R \cos \varphi$):



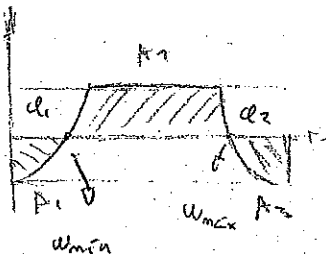
Potencia motor: $P_m = M_m \cdot \omega = M_m \cdot \frac{2\pi \cdot 500}{360}$

$\int_0^{2\pi} M^*(\varphi) d\varphi = 0$ | Dogma! ~~$M^*(\varphi) = M_m - M_r^*(\varphi)$~~ $M^*(\varphi) = M_m - M_r^*(\varphi)$

$$M_m \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} F (-R \cos \varphi) d\varphi$$

$$M_m = 3183 \text{ Nm}$$

$$M(\varphi) = M_m - M_r(\varphi)$$



$$A_1 = A_2$$

$$A_2 = -A_1 - A_3$$

$$\varphi_1 = 71.43^\circ$$

$$\varphi_2 = 288.75^\circ$$

$$S_1 = A_1 = -551 \mu_m = A_3$$

$$A_2 = -2(-551) = 1102 \mu_m$$

$$S_1 = A_1$$

$$S_2 = A_1 + A_2$$

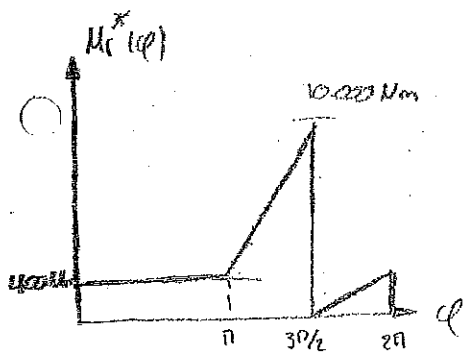
$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$\bar{I} = \frac{S_M - S_m}{\omega_2^2 E} = \frac{1102}{0,01 \left(\frac{77 \cdot 500}{360} \right)^2} = 40,2 \text{ kg m}^2$$

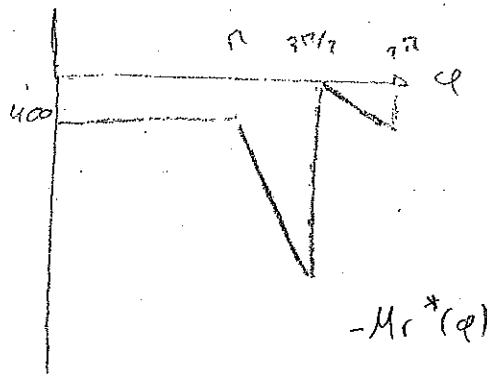
$$I_{\text{necesario}} = \bar{I} - I_{\text{polea}} = 40,2 - 1 = \underline{\underline{39,2 \text{ kg m}^2}}$$

Mié, 15-XII-05

Problema El esquema de la figura corresponde al diagrama cinemático de una prensa mecánica para deformar chapa. El volante cede un 25% de la energía máxima alcanzada durante el ciclo. Tiene una cadencia de 80 ciclos/minuto. El engranaje de reducción que conecta el eje rápido donde se monta el volante con la manivela (lenta) del mecanismo de actuación del punzón posee una relación de transmisión de 5:1. El diagrama de par resistente reducido al eje del volante es el siguiente (ver el texto). El volante es de fundición y no debe sobrepasar una velocidad periférica de 40 m/s para evitar el fallo. Se pide: 1) Velocidad máxima y mínima del eje del volante; 2) Grado de irregularidad del volante; 3) Potencia del motor eléctrico utilizado; 4) Inercia del volante; 5) Radio del volante y su masa, si se trata de un disco macizo.



=>



$$0,75 \cdot \frac{1}{2} J \omega_M^2 = \frac{1}{2} J \omega_m^2$$

$$\omega_{min} = \sqrt{0,75} \omega_M \quad (\text{eje de transmisión})$$

$$n_{min} = \sqrt{0,75} n_M$$

$$n_c = 80 \cdot 5 = 400 \text{ rpm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{max} = 428,72 \text{ rpm} \\ n_{min} = 371,27 \text{ rpm} \end{array} \right.$$

$$\xi = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c} = \frac{n_M - n_m}{n_c} = \boxed{0,1436}$$

$$Pot. = M_m^{ME} \cdot \omega_{ME} = (M_m) \cdot (\omega_c) \rightarrow \text{conocemos}$$

↳ Ignoramos. Utilizamos: condición de reg. permanente:

$$\int_0^{2\pi} M d\varphi = 0$$

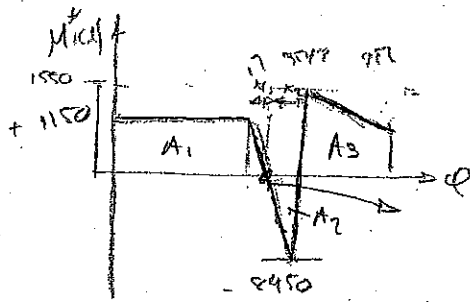
$$\int_0^{2\pi} M_m d\varphi = \int_0^{2\pi} M_r^*(\varphi) d\varphi$$

$$2\pi \cdot M_m = 400 \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi}{2} - \pi \right) (10000 - 400) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 400$$

$$M_m = 1550 \text{ Nm}$$

$$Pot. = 1550 \cdot \frac{2\pi \cdot 400}{60} = 64926 \text{ W}$$

$$M^*(\varphi) = M_m^* - M_r^*(\varphi) = 10.000 - M_r^*(\varphi) \quad 1550 - M_r^*(\varphi)$$



$$A_1 = \underline{\quad}$$

$$A_2 = \underline{\quad}$$

$$A_3 = \underline{\quad}$$

$$\underline{\underline{I = 23,17 \text{ kg m}^2}}$$

$$v_{\max} = 40 \text{ m/s} = \omega_{\max} \cdot R$$

$$R = \frac{40 \text{ m/s}}{\frac{427,72 \cdot 2\pi}{60}} = \underline{\underline{0,891 \text{ m}}}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \Rightarrow M = \frac{2I}{R^2} = \underline{\underline{58,37 \text{ kg}}}$$

P. 106 ej. 2.

$$1) \frac{1}{2} I_{q_2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{q_4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} I^*(\varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$I^*(\varphi) = I_{q_2} + I_{q_4} \left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2 + m_0 \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 \quad \leftarrow$$

2) M_m ?

$$\int_0^{2\pi} M_m^* d\varphi = \int_0^{2\pi} M_r^*(\varphi) d\varphi$$

$$2\pi M_m^* = \int_0^{2\pi} M_r^*(\varphi) d\varphi \quad \text{pero... } \int M_r^*?$$

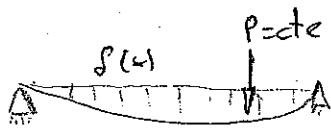
Igualar potencias: $-F(\varphi) \cdot x = -M_r^*(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \rightarrow M_r^*(\varphi) = F(\varphi) \frac{x}{\dot{\varphi}} \quad \leftarrow$

Lun, 20-XII-10

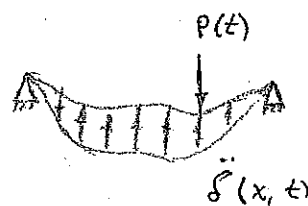
Teoría De Vibraciones

Tema 1: Introducción a la T^e de vibraciones

1. Problemas de vibraciones



Carga estática



Carga dinámica $P(t)$ y distribución de fuerzas de inercia

• Ejemplos de causas de vibraciones: ejes desequilibrados, etc. Las vibraciones causan ruidos, imprecisiones, roturas de piezas, fatiga, el famoso "chatter" de la máquina-herramienta (vibración de la herramienta que mecaniza, con la consiguiente pérdida de tolerancias, etc)...

2. Conceptos fundamentales en vibraciones

Una vibración es un movimiento periódico o cuasiperiódico en torno a una posición de referencia, intercambiando energía entre las diferentes posiciones que ocupa. A diferencia de una oscilación, en la que intervienen las energías cinética y potencial, en una vibración interviene la energía de deformación. En cada ciclo de vibración se disipa cierta cantidad de energía (sistema amortiguado).

Se llaman Grados De Libertad a las variables independientes que definen perfectamente la configuración deformada de un mecanismo.

3. Clasificación de los sistemas mecánicos

• Criterio #1: Sistemas discretos y continuos.

En la naturaleza, los sistemas son continuos. Para definir correctamente la configuración deformada de un sistema continuo, hay que conocer la posición de todos sus puntos. Los sistemas discretos son una aproximación y, a diferencia de los continuos, tienen un número finito de grados de libertad. Los definen ecuaciones diferenciales ordinarias, en lugar de EDP's (caso continuo). Se pueden "discretizar" los sistemas continuos.

• Criterio #2: Sistemas de parámetros concentrados y distribuidos.

Los parámetros de un sistema son la masa (fuerzas de inercia), la rigidez (fuerzas elásticas) y el amortiguamiento (fuerzas de disipación de energía). En la realidad, estos parámetros están distribuidos a lo largo de un continuo, pero se pueden crear modelos que concentran estos parámetros en un punto.

• elemento sencillo para facilitar el estudio. Ejemplo claro: NO ideal. No tiene masa ni disipa energía. Serán los que vamos a trabajar.

• Criterio #3: Sistemas lineales y no lineales

En muchos sistemas, la fuerza aplicada y el desplazamiento producido son proporcionales, es decir, hay una relación lineal entre ellos. Hay casos, sin embargo, en los que esto no se cumple. Un sistema lineal cumple el PPO de Superposición.

Así, se puede dar una definición más general apoyándonos en esto: Un sistema lineal cumple el PPO de superposición: ante la aplicación de una fuerza suma de otras dos, la respuesta también lo será. Por cierto: **TODOS** los sistemas reales son **NO** lineales, pero son muy aproximadamente lineales para los rangos habituales de variación (muchos de ellos, al menos).

→ Principales fuentes de no-linealidad debida a la geometría:

- Rigidización tensional: Cambio en la rigidez de un cuerpo al someterlo a tensión y/o deformación. Ejemplos: cables, casacas hinchables, camisas hinchables, etc, etc.

Paños: Fenómeno inverso. El cambio de geometría reduce la rigidez hasta el punto de llegar a colapsar.

Fuerzas seguidoras: Aquellas que mantienen siempre su posición relativa respecto a la forma geométrica de la pieza.

Grandes desplazamientos o rotaciones, pequeñas deformaciones:

Se considere un gran desplazamiento aquel que supere ~~de~~ la magnitud de alguna de las dimensiones nominales de la pieza (espesor de una chapa, canto de una viga...). Una gran rotación es una de más de 10° , típicamente.

→ Fuentes de no-linealidad no geométricas: Debidas al material

- Elasticidad no lineal: Caucho, etc. Relación tensión-deformación no lineal.
- Plasticidad: Deformaciones permanentes
- Viscoplasticidad, viscoelasticidad, fractura...

◦ Criterio #4: Sistemas Definidos y Semidefinidos.

Un sistema semidefinido es aquel que puede tener movimiento de sólido rígido: Desplazarse sin deformarse. Un sistema definido, si tiene desplazamiento no nulo, tiene deformación: ej: estructura

4. Clasificación de las vibraciones

- Libres: Se producen en ausencia de fuerzas exteriores, a causa de unas condiciones iniciales de posición y velocidad.
- Forzadas: Producidas por fuerzas exteriores activas, generalmente variables en el tiempo. Se subdividen en:
 - Deterministas: La variación temporal de las fuerzas aplicadas es conocida. Esto es poco habitual. Se puede aspirar a conocer algunos valores estadísticos de las fuerzas aplicadas, etc. A su vez se dividen en:
 - Periódicas
 - Armónicas
 - Impulsos o choques: Gran intensidad, poco tiempo
 - De forma cualquiera.
 - Aleatorias

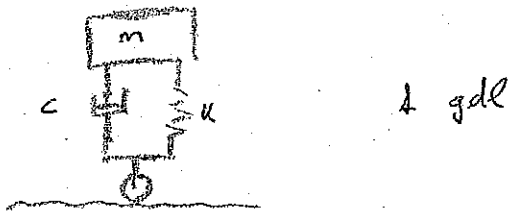
Tema 2: Modelización de sistemas mecánicos

1. ~~Proceso de diseño~~

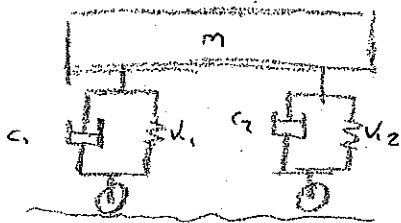
→ Aquí va el tradicional diagrama de bloques del ciclo de diseño, teniendo en cuenta dinámica y vibraciones.

2. ~~Modelización de sistemas~~

○ Primer ejemplo: Comportamiento de un vehículo al circular por carretera. A un nivel muy básico, se puede modelizar por un sistema de 1 gdl tal que así:

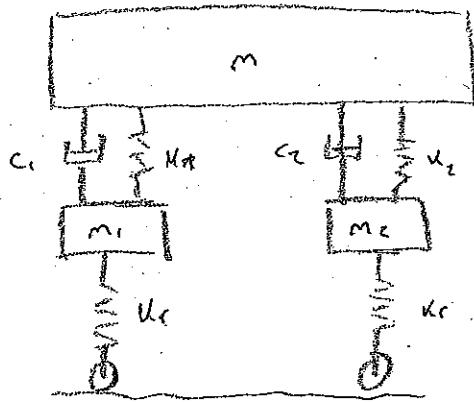


• Complicando un poco, podemos tener en cuenta el cabeceo, que nos da lugar a un sistema de 2 gdl:



• ¿Un poco más? Consideremos independiente la elasticidad de las ruedas y de los muelles:





• Si nos queremos liar más, se puede añadir otro módulo de estos encima de la masa de arriba, representando el típico sistema de amortiguación de los asientos de camión, el mullido de los asientos, etc... era sólo para ver un ej.

3. ~~Modelización de los parámetros de un sistema~~ Reducción de sistemas de masas, muelles y amortiguadores.

• Características

- Muelles: Sin masa. Almacenan energía
- Amortiguadores: Sin masa. Dissipan energía.

→ MUELLES / RESORTES

• Dos tipos

- Típico de tracción: $F = k \cdot x$

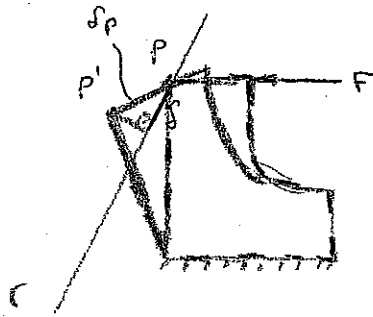
• k es la Rigidez del muelle

- Muelle de torsión: $M_t = k_T \cdot \theta$

• Ante un par responde con un ángulo

• k_T es la Rigidez a Torsión

- Si nos interesa, podemos definir la rigidez según una dirección que queramos, supongamos la recta r :

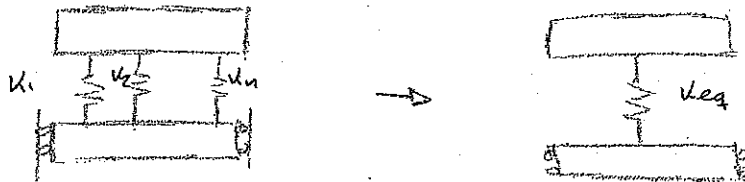


Rigidez según esta Acción-Deformación:

$$k = \frac{F}{\delta}$$

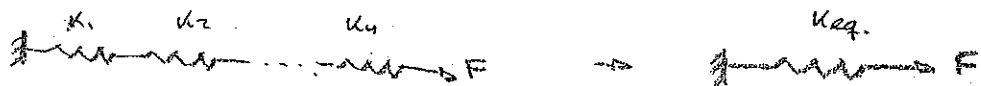
- Combinaciones de muelles

• En paralelo:



$$\rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

• En serie



$$\rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

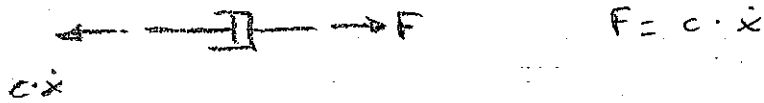
→ AMORTIGUADORES

• Disipan gradualmente la energía. Es el más complejo, y el más alejado de la idealidad, de todos (masa/muelle/amortig.)

• La disipación puede darse por distintos mecanismos:

- Amortiguador viscoso: El típico, un elemento introducido en un fluido viscoso, al vibrar, disipa energía por rozamiento con éste. La cantidad de energía disipada y el coeficiente de amortiguamiento "c" dependerán de la geometría, viscosidad, velocidad y frecuencia de la vibración, etc. Requiere v relativo entre los extremos.

La fuerza que hace el amortiguador seca, es definitiva, el coeficiente de amortiguamiento por la velocidad relativa entre extremos



The diagram shows a rectangular damper symbol with a horizontal line passing through its center. To the left of the damper, there is a left-pointing arrow labeled $c \cdot \dot{x}$. To the right of the damper, there is a right-pointing arrow labeled F . To the right of the diagram, the equation $F = c \cdot \dot{x}$ is written.

- Amortiguador de Coulomb o Fricción Seca.

• Rotamiento seco entre superficies, secas o casi secas, rugosas, no lubricadas, etc.

- Amortiguador histérico o estructural

• En materiales metálicos. Es el propio material el que disipa la energía de deformación, por fricción entre planos internos.

→ La asociación de amortiguadores funciona IGUAL que la de muelles.

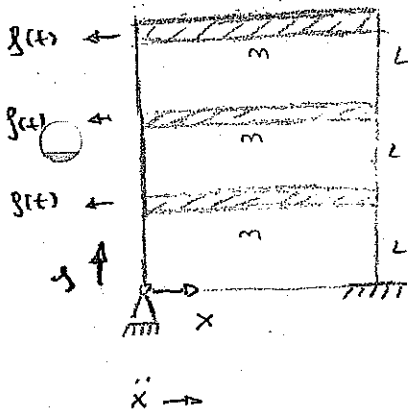
MASAS

• Para asociarlas, aplicar los conceptos de masa equivalente, etcétera.

Ej. propuesto, pág. 28.

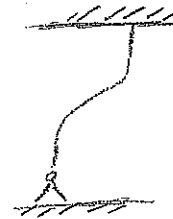
Plantas indeformables, 4 pilares, con I (inercia a flexión) y E (módulo elástico).

Última cosa a saber: Rigidez de un pilar a flexión:



$$k_1 = \frac{12EI}{L^3}$$

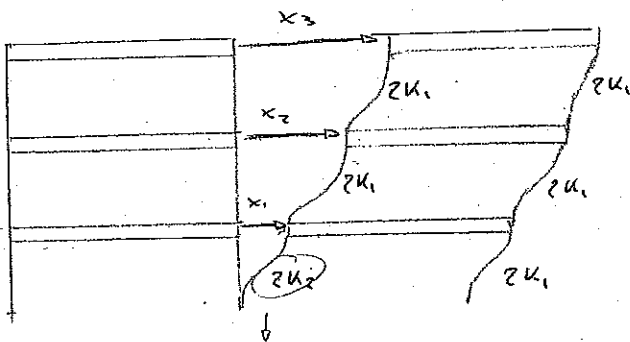
Emp - Emp



$$k_2 = \frac{3EI}{L^3}$$

Emp - Artic.

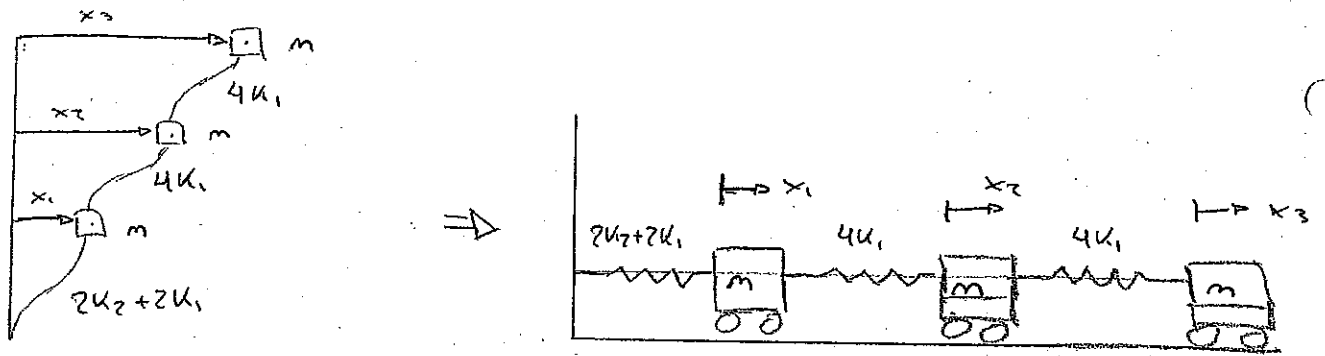
Dato: Fuerzas horizontales.



Único no empotrado

Pilares "de cada lado" en paralelo: Asociamos sumando.

Um passo mais, voltamos a associar em paralelo:



Mar, 1-II-11

○ Tema 3

(sigue)

Sistemas con un gdl I: Vibraciones libres.

1. Interés de los sistemas de un gdl

- Aunque es el más simple, tiene casi todas las características de los sistemas de n gdl, siendo además más fácil de estudiar.
- Muchos sistemas reales se pueden aproximar razonablemente a sistemas de un gdl.
- Existe una técnica para análisis de sistemas de n gdl que en muchas ocasiones consigue reducirlos a n ecuaciones de un gdl (las desacopla), evitando así resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales acopladas.

○ 2. Vibraciones libres no amortiguadas. Frecuencia natural.

- La ecuación de un sistema discreto básico de un gdl

$$\text{es: } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

siendo $f(t)$ la fuerza aplicada.

- Si el sistema se mueve por haber sido sacado de su posición de equilibrio, y no por acción de una fuerza, y el amortiguamiento es además despreciable, queda:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Para resolver esta ecuación, como sabemos que la solución es de la forma Ce^{st} , lo que haremos será derivarla dos veces, sustituirla en la ecuación, y:

$$C \cdot \underbrace{(ms^2 + k)}_0 = 0 \rightarrow s = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

Llamamos a $\frac{k}{m} = \omega^2 > 0$

Si nos vamos a la solución,

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

Las constantes C_1 y C_2 son complejas conjugadas. Aplicando a nuestro amigo Euler:

$$\rightarrow x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad A, B \text{ reales.}$$

Se puede expresar también, en función de dos constantes, como un coseno desfasado:

$$\rightarrow x(t) = X \cos(\omega t + \theta)$$

En cualquiera de los dos casos, necesitaremos dos condiciones iniciales, una en x y otra en \dot{x} , para sacar las dos constantes. Esto hay que hacerlo en la forma $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Para unas condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad \begin{cases} \rightarrow A = x_0 \\ \rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} ; \quad X = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta = \arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}$$

• Concepto: Amortiguamiento Relativo

$$\zeta = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2m\omega}$$

- Nuestra ecuación se puede escribir, pues, como

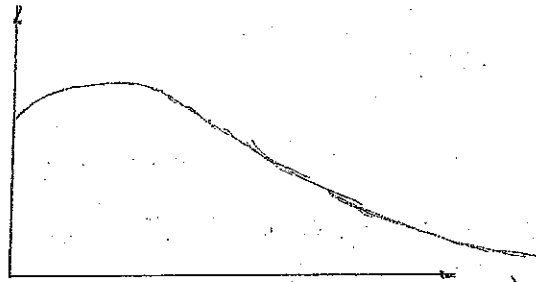
$$s = -\zeta\omega \pm \sqrt{(\zeta\omega)^2 - \omega^2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

→ Caso 1: Amortiguamiento Supercrítico ($\zeta > 1$)

$$s_1 = \omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0$$

$$s_2 = \omega(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \omega(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0 \\ s_2 = \omega(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0 \end{array} \right. \rightarrow x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

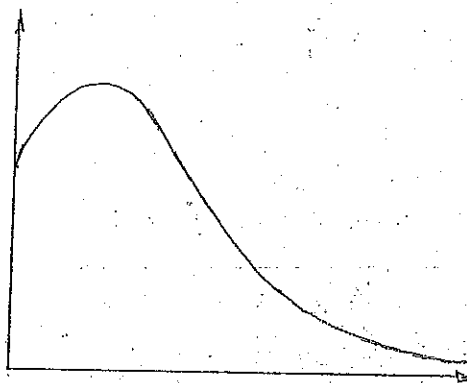


Supercrítico

→ Caso 2: Amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$)

$$s = -\zeta\omega = -\omega \text{ (Doble)} = s_1 = s_2$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{st} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t}$$



Crítico

Véase que sube más deprisa y, sobre todo, CAE ANTES que la supercrítica, aunque sin llegar a tocar el cero.

3. - Vibraciones libres amortiguadas.

• En nuestra ecuación, c es distinto de 0

$$- m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \cancel{f(t)}^0$$

• Como la solución es de la forma $x(t) = Ce^{st}$, derivando,

$$- (ms^2 + cs + k)e^{st} = 0 \rightarrow ms^2 + cs + k = 0$$

$$\hookrightarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}$$

• Como vemos, las soluciones a esta ecuación (S), pueden ser dos reales, una real doble o dos complejas conj.

• concepto: Amortiguamiento Crítico

- Es el valor de c que nos provoca una raíz real doble en la ecuación. Se representa \bar{c} , y vale

$$\rightarrow \bar{c} = 2m\omega = 2\sqrt{km}$$

- Sobre las raíces de la ecuación:

• 2 Reales si: $c > \bar{c}$ ($\xi > 1$)

- Amortiguamiento supercrítico

• Real doble si: $c = \bar{c}$ ($\xi = 1$)

- Amortiguamiento crítico

• Complejas conjugadas: $c < \bar{c}$ ($\xi < 1$)

- Amortiguamiento subcrítico

→ Caso 3: Amortiguamiento subcrítico ($\xi < 1$)

$$s = -\xi\omega \pm \omega \sqrt{-(1-\xi^2)} = -\xi\omega \pm \omega i \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

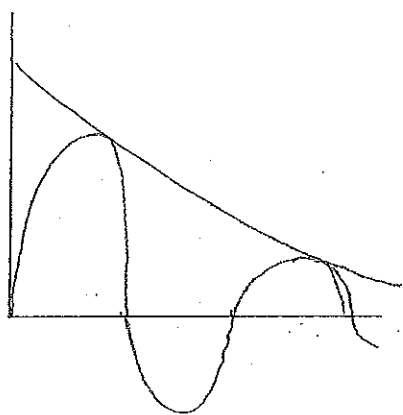
• $\omega \sqrt{1-\xi^2} = \omega_D \rightarrow$ Frec. vibración amortiguada

$$\begin{cases} s_1 = -\xi\omega + i\omega_D \\ s_2 = -\xi\omega - i\omega_D \end{cases} \rightarrow x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

• Desarrollando un poco, llegamos a

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}]$$

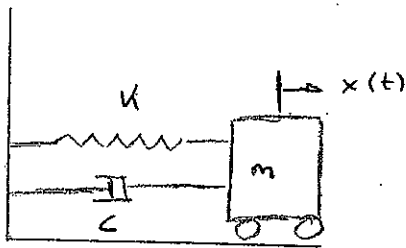
$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] = e^{-\xi\omega t} \cdot X \cdot \cos(\omega_D t + \theta)$$



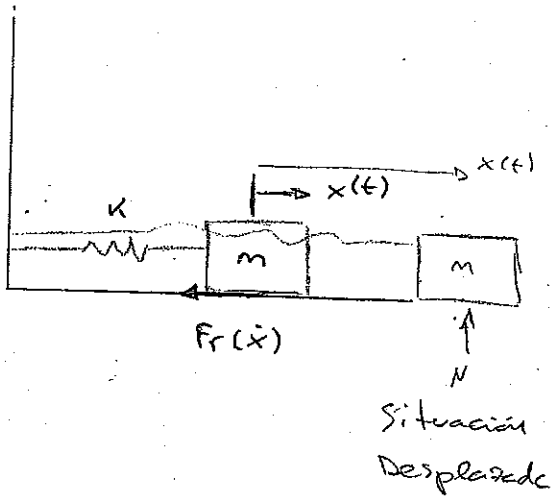
• $\omega_D = \omega \sqrt{1-\xi^2}$. Si $\xi \ll 1$, la exponencial cae más despacio, y $\omega_D \approx \omega$. Vibración amp extendida en el tiempo.

4. Amortiguamiento de Coulomb

- Disipa energía por rozamiento seco entre superficies.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

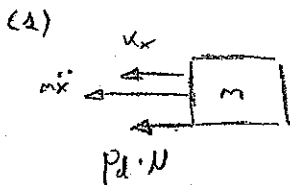


Para $x(t) > 0$, dos casos:

(1) $\dot{x}(t) > 0$; $F_r \leftarrow$

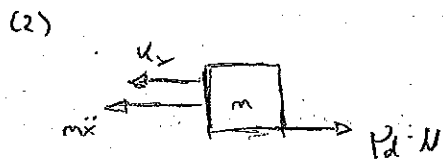
(2) $\dot{x}(t) < 0$; $F_r \rightarrow$

- Así, planteando equilibrio al bloque en los dos casos:



$$m\ddot{x} + p_d N + kx = 0$$

Uniendo:

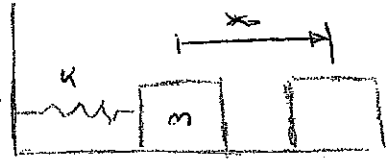


$$m\ddot{x} - p_d N + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + \text{sign}(\dot{x}) \cdot p_d N + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \cdot p_d N + kx = 0$$

→ Vale. ¿Cómo resolver esto?



• Comprobamos: ¿ $k \cdot x_0 > p_d \cdot U$?

Si no se cumple, el sistema no se mueve, el muelle no puede con él.

• Resolvemos por tramos.

- Tramo 1: $x > 0$, $\dot{x} < 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = p_d \cdot U$

$$\text{Cond. inic.} \left\{ \begin{array}{l} t=0 \rightarrow x(0) = x_0 \\ t=0 \rightarrow \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right.$$

$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{p_d U}{k}$ Sol. particular de la completa, sacada a ojo

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

Aplicando las condiciones iniciales,

$$B = 0; \quad A = x_0 - p_d U / k$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{p_d U}{k} \right) \cos \omega t + \frac{p_d U}{k}$$

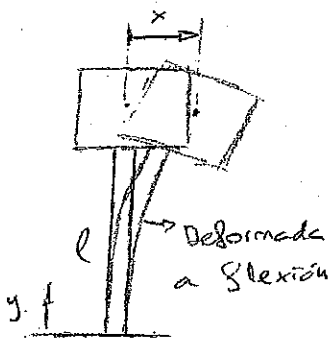
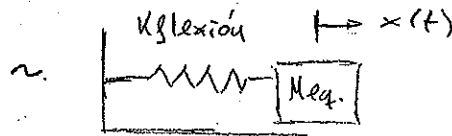
¿Cuándo acaba el tramo? $\dot{x}(t) = 0$

$$x(t) = 0 = \left(x_0 - \frac{p_d U}{k} \right) (-\omega) \sin \omega t = 0$$

$$\omega t_1 = \pi \rightarrow t_1 = \pi / \omega$$

$$x(t_1) = -x_0 + 2 \frac{p_d U}{k}$$

- Tramo 2: Mismo proceso, incluyendo comprobación para $x(t_1)$. Las condiciones iniciales de un tramo son las finales del anterior.

 $\omega?$ 

$$\omega = \sqrt{(k_{flexión}/m)}$$

Si no podemos despreciar la masa de la columna:

$$\frac{1}{2} M_{eq} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l dm \cdot v^2(y)$$

$$M_{eq} = M + \rho A l \cdot \frac{33}{100}$$

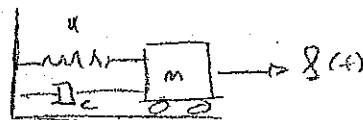
Tema 4: Sistemas de un gdl II: Vibraciones forzadas

Lun, 7 - II - 11
(sigue)

1. ~~Caracterización dinámica de los sistemas. Excitaciones tipo.~~

Esta vez, analizaremos el comportamiento de sistemas de 1 gdl a los que se aplican fuerzas, al contrario que en el tema anterior. La ecuación que los "gobierna" es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underline{f(t)}$$



Excitaciones tipo: Se utilizan para reproducir en papel o laboratorio de las condiciones de funcionamiento del sistema. Las tenemos de tres tipos fundamentales

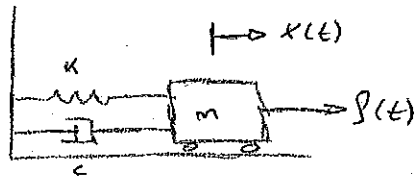
Excitación armónica: seno / coseno. Ej: Masc excéntrica en un eje, etc.

Excitación impulso (y derivadas). "Mantillazo".

Excitaciones aleatorias.

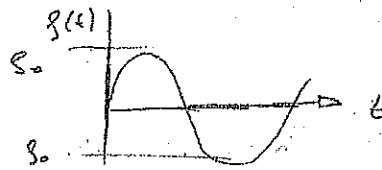
A partir de ellas se puede llegar al comportamiento general del sistema.

4.2. Excitación armónica



$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$f(t) = f_0 \cos(\bar{\omega}t) \quad / \quad f_0 \sin \bar{\omega}t$$



$\bar{\omega}$, para diferenciarlo de $\omega = \sqrt{k/m}$

Como la excitación puede ser un seno o un coseno, utilizaremos el artificio matemático de superarla compleja, tal que:

$$f(t) = f_0 (\cos \bar{\omega}t + i \sin \bar{\omega}t) = f_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

Como bien sabemos de ecuaciones,

$$x(t) = x_u + x_p$$

$$\hookrightarrow \sum e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_0 t + \theta) = e^{-\xi \omega t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

$$\hookrightarrow x_p(t) = A \cdot e^{i\bar{\omega}t} \text{ Deriva y sustituyo en la ec.}$$

$$\cdot (-m\bar{\omega}^2 + i\bar{\omega}c + k)A e^{i\bar{\omega}t} = f_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

• Calculamos A. Queda en función de $f_0, k,$

ξ y $\frac{\bar{\omega}}{\omega}$. A esto lo llamamos

$$\left[\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \beta \right]$$

$$x_p = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i2\beta\xi} e^{i\bar{\omega}t} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} e^{-\varphi i}$$

Σ_{est} Amplitud estática

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

D. Factor de amplificación dinámica.

$$x_p = X_{est} \cdot D \cdot [\cos(\bar{\omega}t - \varphi) + i \sin(\bar{\omega}t - \varphi)]$$

Nos quedamos con una parte, la real (p.e.)

Así:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega t} [A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t] + \frac{X}{est} \cdot D \cdot \cos(\bar{\omega}t - \varphi)$$

Transitorio

Estacionario

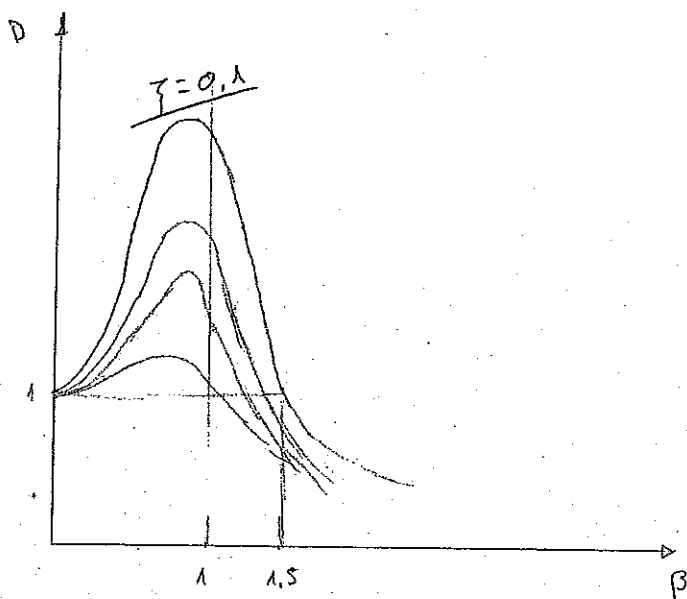
Con las c.c.i.i. que tenemos que tener, sacamos A y B.

$$X_{est} \cdot D = X_{0in} = \text{Amplificación dinámica}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = f(\zeta, \beta) = f(M, \mu, c, \bar{\omega})$$

Se puede representar D en función de β , para valores

constantes de ζ



• Como se ve, si queremos reducir D , lo primero que se nos ocurre es aumentar ζ , pero esto no siempre es fácil o factible.

• La otra opción es utilizar β 's mayores que uno, esto es, como $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, $\bar{\omega} > \omega$. Recordemos que ω a su vez es

$\omega(k, m) \rightarrow$ un número activo sobre U y m del sist para que $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} + 1$

• con $\zeta = \text{cte}$, para D_{\max} : $\frac{dD}{d\beta} = 0$

$$2(1-\beta^2)(-2\beta) + 2(2\zeta\beta)(2\zeta) = 0$$

$$\beta = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Resonancia

• Estado en el que $\bar{\omega} = \omega \rightarrow \beta = 1 \rightarrow D_{\text{res}} = 1/2\zeta$

- D_{\max} cuando $\zeta < 0.1 \rightarrow D_{\max} (\zeta < 0.1) \approx 1/2\zeta$

↳ caso parecido a res.

$$\beta \approx 1$$

• Como vemos, evitar la resonancia a toda costa.

• También es obvio que estas "igualdades" (\approx) se verifican exactamente si $\bar{\omega} = \omega$, es decir, $\beta = 1$.

Desfase angular φ

• Es otra magnitud importante en la respuesta de un sistema, representando la fase (desease) entre la excitación y la respuesta. Se calcula como:

$$\left[\varphi = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right]$$

• En resonancia, como $\beta = 1$, la fase $\varphi = 90^\circ$. Esto es así para cualquier ξ , lógicamente

○ Caso particular: Con $\xi = 0$, la función φ vale:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi = 0^\circ & 0 < \beta < 1 \\ \varphi = 90^\circ & \beta = 1 \\ \varphi = 180^\circ & \beta > 1 \end{array} \right.$$

→ Cambio de tercio: Representación compleja de la ecuación del mvto de las vibraciones forzadas.

$$\text{○ } m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

- Reordenando:

$$f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0$$

- Escribiendo en función de $\bar{\omega}$, X_{0iv} , φ , y con $f(t) = f_0 e^{i\bar{\omega}t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\ddot{x} = m\bar{\omega}^2 X_{0iv} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} = f_I e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} \\ -c\dot{x} = -i\bar{\omega}c X_{0iv} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} = f_C e^{i(\bar{\omega}t - \varphi - \pi/2)} \\ -kx = -k X_{0iv} e^{i(\bar{\omega}t - \varphi)} = f_K e^{i(\bar{\omega}t - \varphi - \pi)} \end{array} \right.$$

○ Así definimos el resto de términos de la ecuación.

• y representando en forma fasorial, teniendo en cuenta que los fasores giran con velocidad angular $\bar{\omega}$:

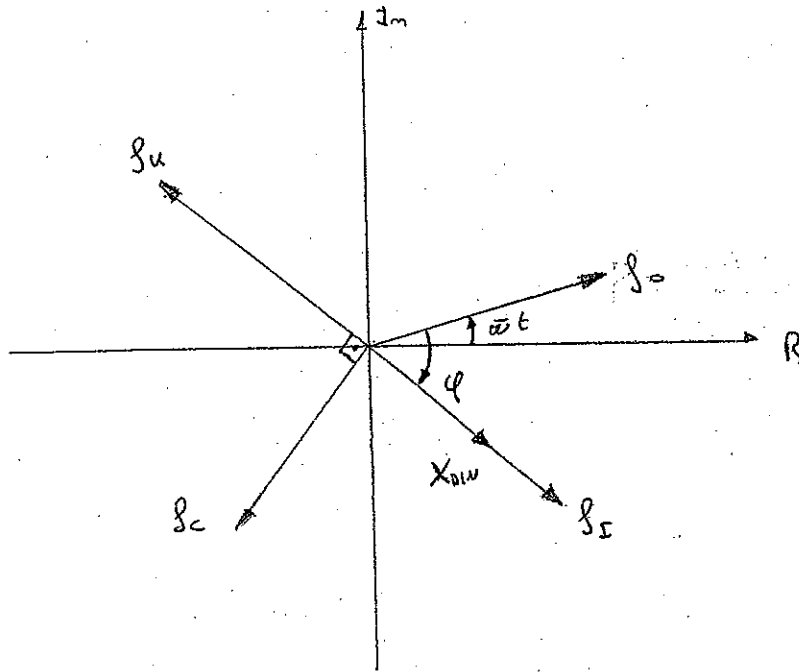


Diagrama de Argand.

• Observaciones:

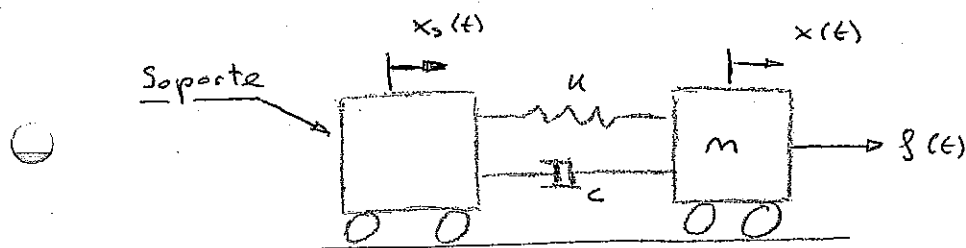
- Cuando $f(t) = f_0 \cos \bar{\omega}t$, la ecuación que gobierna las vibraciones forzadas ($f(t) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0$) representa el equilibrio de (los fasores) sobre las proyecciones sobre el eje Real de los fasores de Argand.

Si: $f(t) = f_0 \sin(\bar{\omega}t)$, equilibrio de las proyecciones de los fasores sobre el eje Imaginario.

- En resonancia, con $\phi = \pi/2$, la excitación se equilibra con la fuerza disipativa, y la fuerza de inercia con la elástica.

4. Respuesta ante un mvto. armónico del soporte.

En ocasiones, las vibraciones se producen en un sistema mecánico no a consecuencia de una carga exterior, sino por el movimiento del soporte en el que se apoya. Ej: terremotos, vehículo por carretera, levás, vibraciones de la cimentación que se transmiten, etc.



• Así, $x(t) = x_s(t) + x_r(t)$

↳ siendo $x_r(t)$ el desplazamiento relativo entre m y soporte.

• Aplicando nuestra ecuación a la masa m :

$$f(t) - c \dot{x}_r - k x_r = m \ddot{x}$$

○ y sustituyendo x_r y derivando:

$$f(t) = m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_s) + k(x - x_s)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) + c \dot{x}_s + k x_s \rightarrow \text{Inecesaria}$$

• Restando a ambos lados $m \ddot{x}_s$, llegamos a la ecuación del movimiento relativo masa-soporte:

$$m \ddot{x}_r + c \dot{x}_r + k x_r = f(t) - m \ddot{x}_s$$

En el libro ~~(P. 69)~~ (P. 69) resuelve para $f(t) = 0$ y $x_s(t) = X_s \sin \omega t$.

5.- Problema "resuelto".

Podría ser interesante echarle un vistazo.

Tema 5: Sistemas con un gdl III: Integral de convolución.

1. Respuesta ante las funciones impulso, escalón y rampa.

• Impulso: Gran fuerza F actuando durante un tiempo muy pequeño Δt , de forma que su producto es finito. Se de-

fine el impulso mecánico como

$$I = F \cdot \Delta t$$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F dt$$

• Aplicado a una masa, $I = \Delta P$, o lo que es lo mismo,

$$I = m (x_2 - x_1)$$

• Para tratar matemáticamente el impulso, se ~~suele~~ suele suponer que $F \rightarrow \infty$, y se aplica durante un intervalo de tiempo $\varepsilon \rightarrow 0$

• Impulso unitario: $\delta(t-a)$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1$$

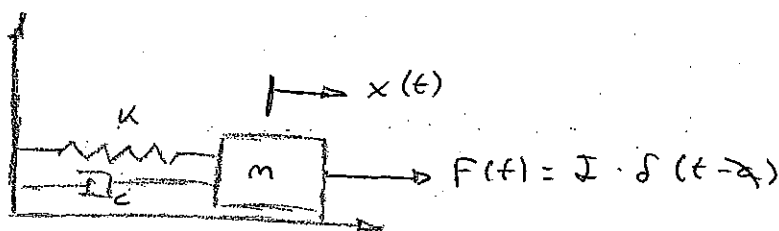
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

$$f(t-a) = I \cdot \delta(t-a)$$

Función impulso $f(t-a)$ que origina un impulso de magnitud I

a) Respuesta a la función impulso

Considerese un sistema de 1 gdl al que se aplica una función impulso $F(t) = I \cdot \delta(t - \tau)$



Así, la ecuación que gobierna el movimiento de la masa m es la ya conocida:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = I \cdot \delta(t - \tau)$$

El impulso tiene la peculiaridad de que, tras su aplicación el sistema queda sin fuerzas aplicadas, pero con unas condiciones iniciales distintas a las del reposo. Por lo tanto, si $\underline{\dot{x}(0^-) = 0}$, $\underline{\dot{x}(0^+) = I/m}$

Así, el problema se tratará de aplicar estas condiciones iniciales a un problema de vibraciones libres.

Si llevamos estas condiciones a la ecuación de v.l.l.,

$$\dot{x}(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[\dot{x}_0 \cos(\omega_D t) + \frac{x_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right]$$

Llegamos a la respuesta a un impulso:

$$\left[x(t) = \frac{I e^{-\zeta\omega_0 t}}{m\omega_0} \sin \omega_D t \right]$$

Impulso unitario:

$$I = 1$$

b) Relaciones entre impulso, escalón y rampa

• El escalón es la derivada respecto al tiempo de la rampa, y el impulso es la derivada respecto al tiempo del escalón.

• Si definimos el operador lineal diferencial:

$$- P(D) = m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k$$

• y lo aplicamos a nuestra ecuación ~~forzada~~ de gobierno:

$$P(D)[x(t)] = f(t)$$

$$\hookrightarrow P(D)[\dot{x}(t)] = \dot{f}(t)$$

$$\hookrightarrow P(D)\left[\int_0^t x(t) dt\right] = \int_0^t f(t) dt$$

c) Respuesta a función escalón

• La obtendremos integrando la respuesta a impulso

$$\int_0^t \frac{I e^{-\zeta \omega_0 t}}{m \omega_0} \sin \omega_0 t dt = \frac{I}{m \omega_0} \left[\frac{e^{-\zeta \omega_0 t} (-\zeta \omega_0 \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos(\omega_0 t))}{(\zeta \omega_0)^2 + \omega_0^2} \right]_0^t$$

• Simplificando, y aplicando $\omega_0 = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$

• ¡Respuesta a escalón!

$$\left[x(t) = \frac{I}{k} \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_0 t - \theta) \right] \right] \quad \theta = \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

• Esta solución es para el caso de condiciones iniciales nulas. Si tenemos condiciones distintas, habría que añadir el transitorio.

• También podríamos haber llegado a este resultado resolviendo directamente la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = I$$

• Con las c.c.i. correspondientes (en el caso más sencillo, como hemos hecho, el reposo).

• Nota: Por supuesto, I es la altura del escalón.

d) Respuesta a rampa

• Integrando la respuesta a escalón, resulta:

• Respuesta a entrada rampa:

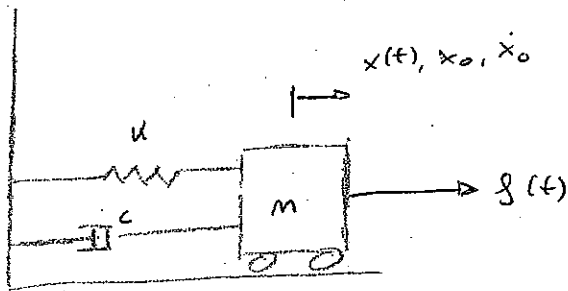
$$\left[x(t) = \frac{I}{k} t - \frac{I}{k\omega_0} \left[e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 t - \theta) + \sin \theta \right] \right]$$

• Dado θ sigue siendo

$$\theta = \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

También es resoluble atacando directamente la ecuación, claro.

Q. - Solución con condiciones iniciales no nulas



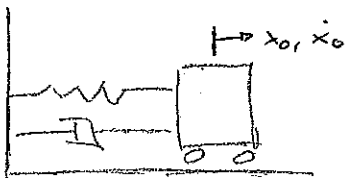
Método clásico:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

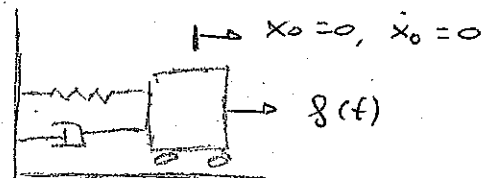
$$x_f(t) = [X_H + X_P]_{x_0, \dot{x}_0}$$

Método alternativo y más razonable: Ppo de Superposición.

Nuestro sistema con carga y c.c.i.i, equivale a:



+



$$x_a = [X_T]_{x_0, \dot{x}_0}$$

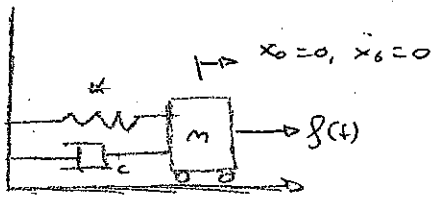
transitorio

+

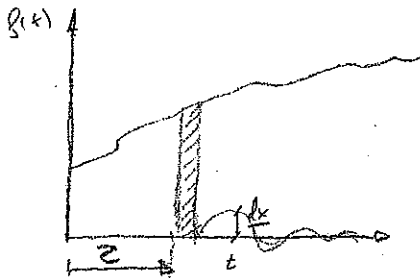
$$[X_H + X_P]_{x_0=0}$$

$\dot{x}_0=0$

3. Respuesta a una excitación general. Método de la integral de convolución.



Podemos descomponer la excitación $f(t)$ en una suma de infinitos impulsos de valor $f(z)$



∞ impulsos de valor $f(z)$

$$dI = f(z) dz$$

$$dx = dI \cdot h(t-z)$$

$$\int_0^t x(t) dt = \int_0^t f(z) \cdot h(t-z) dz = x(t)$$

Si las condiciones iniciales fueran no nulas, tendríamos que añadir el transitorio al resultado de este integral

4. - Métodos numéricos.

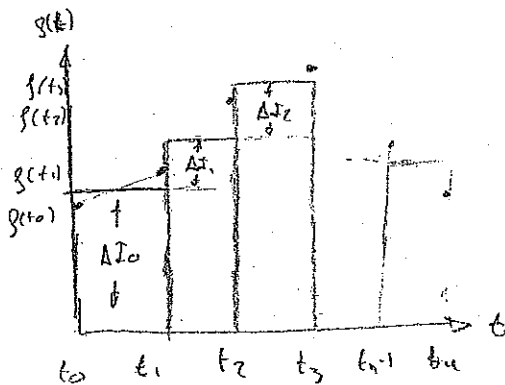
En ocasiones no tenemos de forma ~~clara~~ explícita la excitación (no la tenemos en forma de función), bien porque sea determinada de forma experimental o por cualquier motivo.

Se nos plantean 3 formas de resolución:

Ajustar los puntos a una función polinómica o similar, y aplicar los métodos clásicos

Resolver por métodos numéricos.

Discretizar el tiempo de aplicación de la fuerza, y suponer una variación sencilla en ~~ese~~ cada intervalo. Puede ser una variación constante (el ejemplo), en rampa, etc.



Descomponemos la respuesta en el sumatorio de una serie de respuestas a entrada escalón (o rampa, o...)

$$\bullet \Delta I_0 = \frac{g(t_0) + g(t_1)}{2}$$

$$\bullet \Delta I_1 = \frac{g(t_2) + g(t_1)}{2} - \frac{g(t_0) + g(t_1)}{2} = \frac{g(t_2) - g(t_0)}{2}$$

$$\bullet \Delta I_2 = \frac{g(t_3) - g(t_1)}{2}$$

$$\bullet \Delta I_i = \frac{g(t_{i+1}) - g(t_{i-1})}{2}$$

$$\Delta I_n = - \frac{g(t_{n-1}) + g(t_n)}{2}$$

Ley de recurrencia.

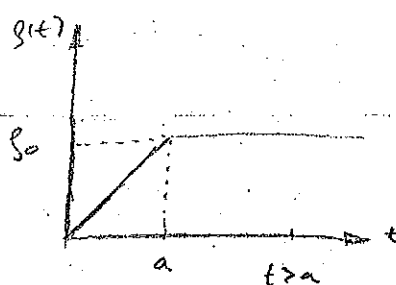
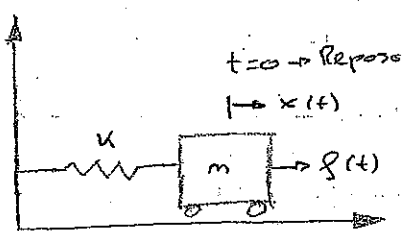
Para todos salvo $\Delta I_0, \Delta I_n$

$$S: E(t) = \frac{I}{k} \left[1 - \frac{e^{-\gamma \omega t}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cos(\omega_0 t - \theta) \right]$$

Nuestra:

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \Delta I_i \left[1 - \frac{e^{-\gamma \omega (t-t_i)}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cos[\omega_0 (t-t_i) - \theta] \right]$$

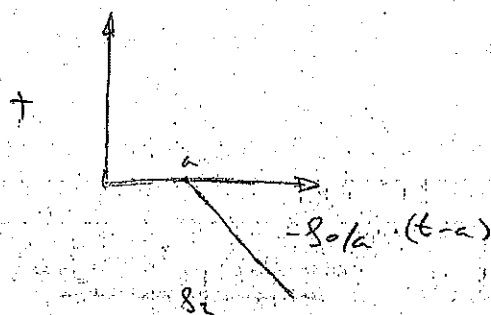
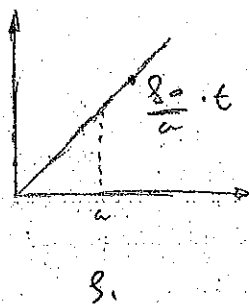
5. - Problema resuelto. Relativamente típico de examen.



a) Primera forma de abordarlo:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$\xi = 0 \rightarrow \theta = 0$$



$$x_1 = \frac{f_0}{ak} t - \frac{f_0}{ak\omega} \sin \omega t$$

resp. a ramp

$$\xi = 0$$

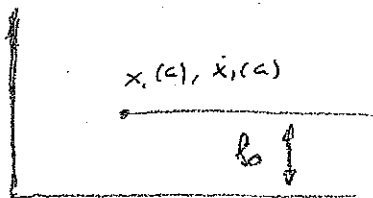
$$\theta = 0$$

$$x_2 = -\frac{f_0}{ak} (t-a) + \frac{f_0}{ak\omega} \sin(\omega(t-a))$$

resp. a ramp

$$x = x_1 + x_2$$

b) Segundo enfoque: Superponer las condiciones iniciales a las que llega el sistema en $t=a$ (cuando acaba la rampa) a una función escalón.



$$\underline{x_1(a)} = \frac{g_0}{k} - \frac{g_0}{a\omega} \sin \omega a$$

$$\underline{\dot{x}_1(a)} = \frac{g_0}{a\omega} - \frac{g_0}{a\omega} \cos \omega a$$

$$\underline{x_1(a)} = \frac{g_0}{a\omega} - \frac{g_0}{a\omega} \cos \omega a$$

$$\textcircled{C} x(t) \text{ (escalón)} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{g_0}{k}$$

Aplicando las c.c.i.i. $x_1(a)$, $\dot{x}_1(a)$, obtenemos A y B.

Resolviendo:

$$x(t) = -\frac{g_0}{k a \omega} \sin(\omega a) \cdot \cos(\omega t) + \frac{g_0}{k a \omega} (\cos(\omega a) - 1) \cdot \sin \omega t + \frac{g_0}{k}$$

Existe una variante de este método que consiste en aplicar el escalón desde $t=0$ en lugar de desde $t=a$, cambiando

las condiciones iniciales. Estas serán

$$x(0) = x_1(a)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_1(a)$$

Se llega a una solución, llamémosla $x'(t)$ (NO es la derivada)

$$x(t) = x'(t-a) \quad \text{Trasladamos en el tiempo hasta a}$$

Nos permite aplicar las condiciones iniciales en $t=0$, lo

que es bastante más fácil (desaparecen senos, etc.)

c) Tercera forma: Aplicación directa del apartado 2 del tema
 Dividimos el problema en dos: un transitorio (producto de las condiciones iniciales en $t=a$) y la respuesta ante escalón, (o condiciones iniciales nulas en $t=a$).

En el libro, para el transitorio, hace lo que hemos comentado de trasladarlo en el tiempo a $t=0$

Transitorio:

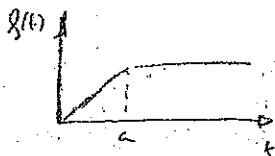
$$x_T = X_0 \cos \omega t + \frac{X_0}{\omega} \sin \omega t$$

Escalón con e.c.i.i. nulas

$$x_e(t) = \frac{f_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

$$x(t) = x_e(t) + x_T(t)$$

d) Cuarta forma: Convolution



$$x(t) = \int_0^t f(z) \cdot h(t-z) dz$$

$$x_1(t) = \int_0^a \frac{f_0}{2} z \cdot h(t-z) dz$$

$$x_2(t) = \int_a^b f_0 \cdot h(t-z) dz$$

+

Tema 6: Sistemas con 1 gdl: IV. Transformada de Fourier.

1.- Introducción

Poca aplicación práctica, al menos para nosotros

Para excitaciones periódicas, en un sentido amplio.

2.- Forma compleja de la serie de Fourier

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = f(t + nT)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega_0 t + b_j \sin j\omega_0 t = \boxed{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_j \cdot e^{ij\omega_0 t}}$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos j\omega_0 t dt$$

$$b_j = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin j\omega_0 t dt$$

$$F_j = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) e^{-ij\omega_0 t} dt$$

Handwritten scribbles and marks, possibly initials or a signature, located in the middle-right section of the page.

Tema 7: Sistemas de 1 gdl V: Aislamiento de vibraciones

7.1. - Métodos experimentales para medir el amortiguamiento

a) Método del decrecimiento logarítmico

b) Método de la amplificación a la frecuencia de resonancia

Consiste en medir el factor de amplificación dinámica

(D) en la frecuencia de resonancia (ω_R). $D_R = X_R / X_{estac}$.

Con esto, nos vamos a la ecuación

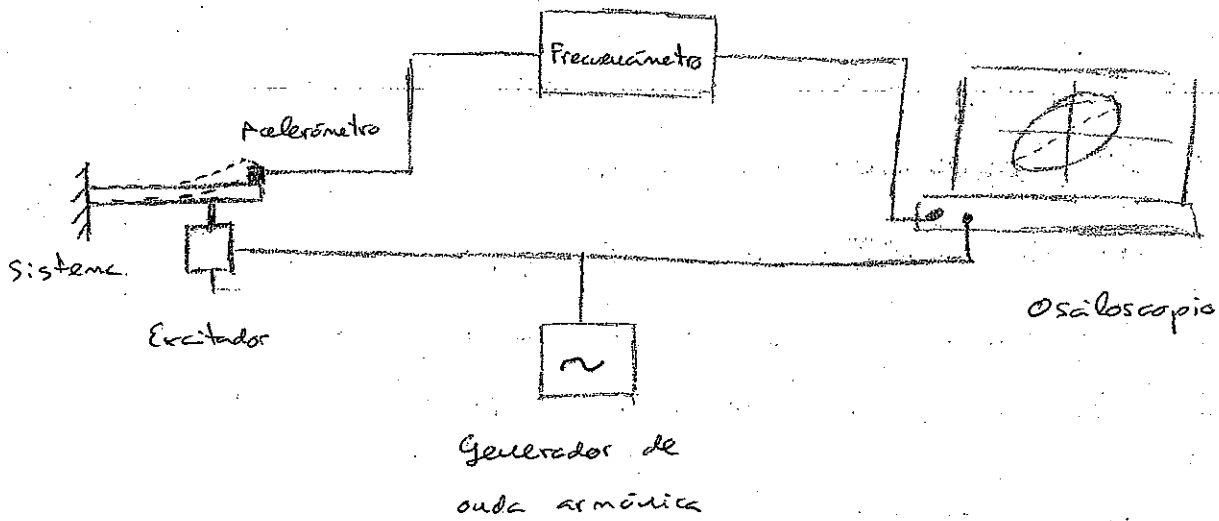
$$D_R = \frac{1}{2\xi} \quad \text{y sacamos } \xi$$

Requiere un equipo que genere una excitación armónica, de frecuencia variable.

Hay problemas para medir el desfase ϕ y el X_{est} (desplazamiento estático). Solo válido para ξ 's pequeños.

d) Método de la medida en resonancia.

Lo veremos en prácticas. Requiere un equipo como el que se muestra:

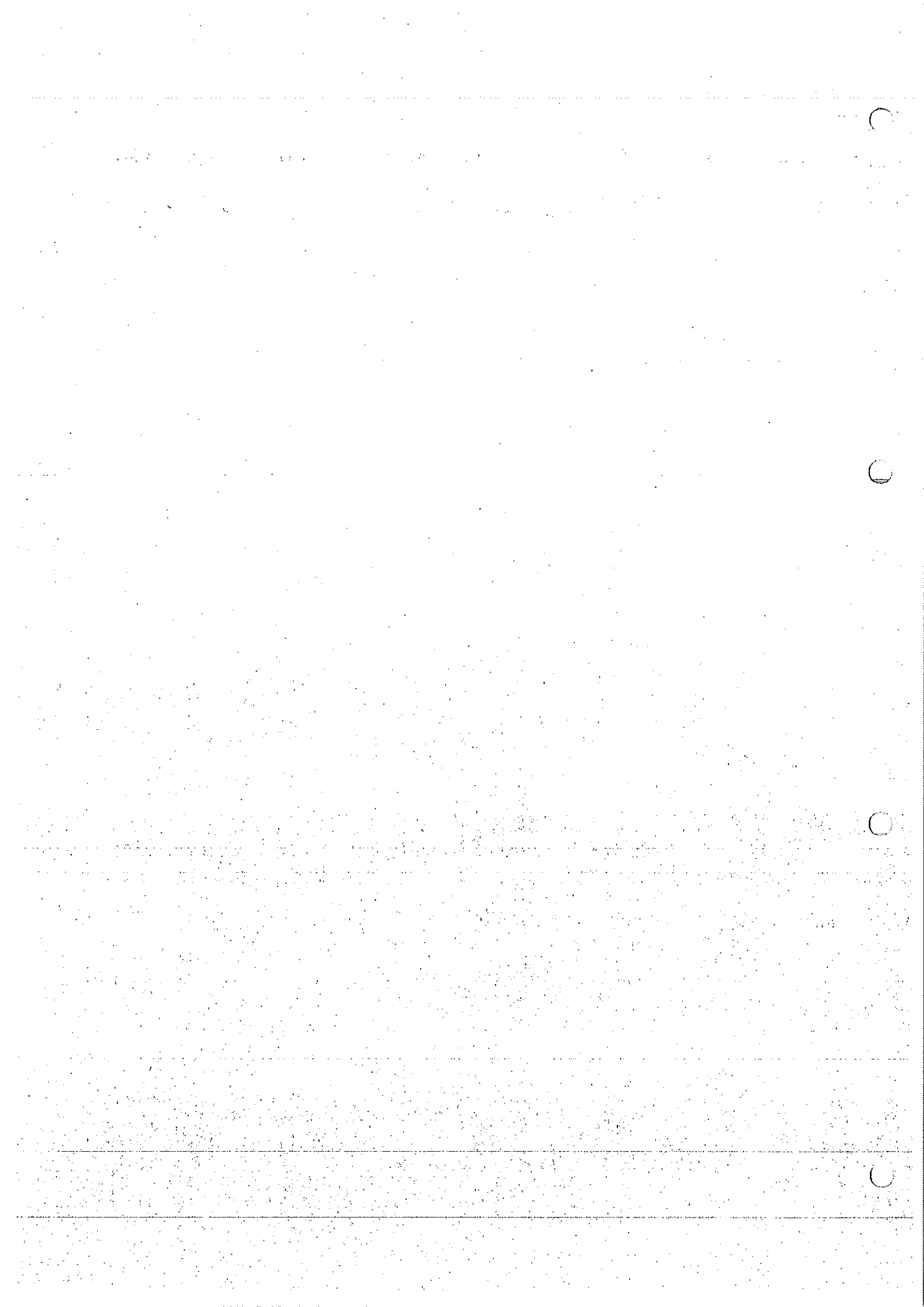


Vamos variando la frecuencia hasta que la elipse se nos centre en los ejes: entonces estamos en resonancia.

$$\frac{v}{2\pi f}$$

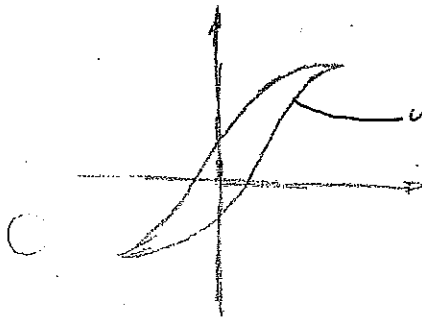
g) Amortiguamiento (viscoso) equivalente.

Cuando miramos el osciloscopio, lo que vemos no es exactamente una elipse. Vamos a aproximarla a una elipse, como si ~~toda~~ la disipación de energía se diera por rozamiento viscoso.

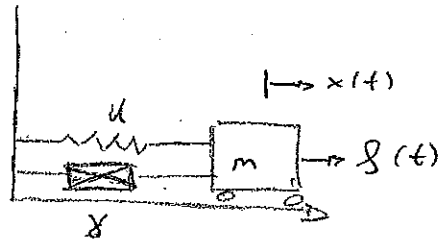


7.2. Amortiguamiento histérico o estructural

Energía disipada por rozamientos internos en el material al deformarse. Los metales cristalinos tienen un ciclo de Histéresis, como el de Electro, que nos indica la energía que disipan por ciclo.



$$w_D \propto k \cdot X^2$$



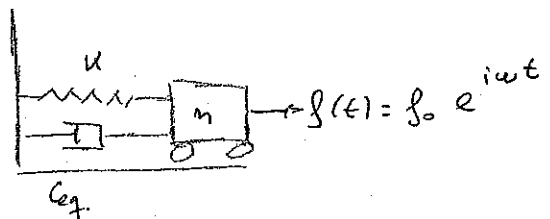
La disipación es proporcional a la rigidez del material y a la amplitud de la vibración al cuadrado. La proporcionalidad depende de cada material. Colocamos un "π" por convención: $w_D = (\pi \cdot \gamma) k \cdot X^2$

Lo podemos asimilar a un amortiguador viscoso equivalente:

$$c_{eq} = w_D = \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot X^2 = \gamma \cdot c_{eq} \cdot \bar{\omega} \cdot X^2$$

$$\left[c_{eq} = \frac{k \cdot \gamma}{\bar{\omega}} \right]$$

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = f_0 e^{i\omega t}$$



A partir de aquí, el casabido inferno de ecuaciones.

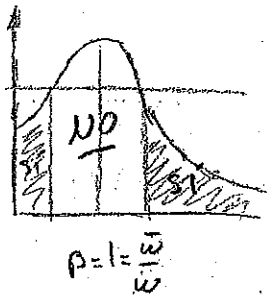
7.3. - Control y aislamiento de vibraciones

Trataremos de saber cómo/cuánto vibra una máquina y cómo evitar que sus vibraciones afecten a otras máquinas o viceversa.

7.3.1. - Métodos Pasivos para el control de vibraciones

a) Control de las frecuencias naturales

Si nos fijamos en el D de nuestra máquina (la suponemos de $1g$ dd); veremos que si queremos un nivel de vibraciones por debajo de una determinada cota, tendremos que utilizar β 's tes deci mayores que un determinado valor. Veamos:



Si queremos aumentar β , tendremos que aumentar ω_n , es decir, la frecuencia natural del sistema. Tocar ω (la frec. de excitación) suele ir en contra de los requisitos (velocidad

de funcionamiento. Como $\omega = \sqrt{k/m}$, y tocar la masa también suele dar problemas, habrá que aumentar la rigidez:

n° y situación de los apoyos de los ejes, etc.

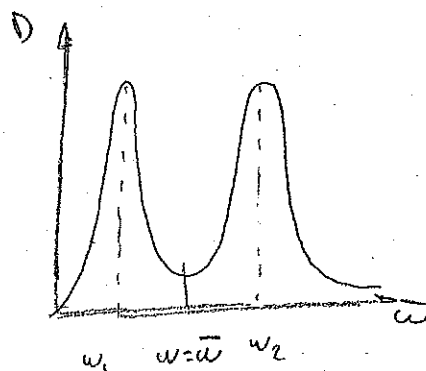
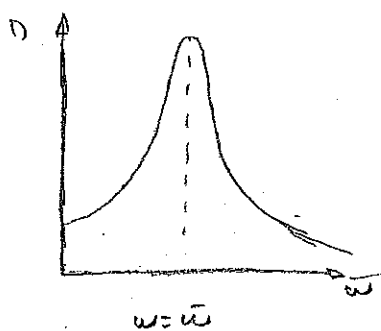
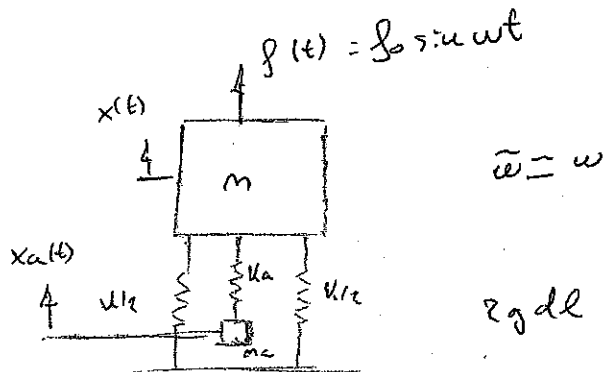
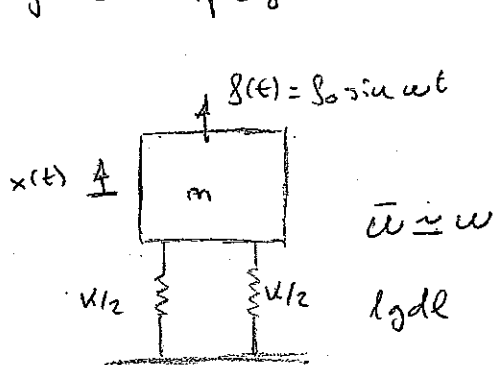
b) Consiste en incluir elementos que aumenten el amortiguamiento global de la máquina: Tornillos en vez de soldaduras, fundición, silentblocks, etc.

b) Introducción de amortiguamiento al sist. vibrante

c) Absorsores.

Un absorber es un conjunto masa + muelle que se acopla a un sistema para reducir vibraciones.

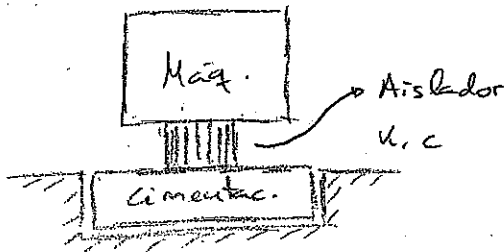
Se utilizan cuando no nos queda más remedio que trabajar con frecuencias cercanas a la de resonancia, en zonas de gran amplificación:



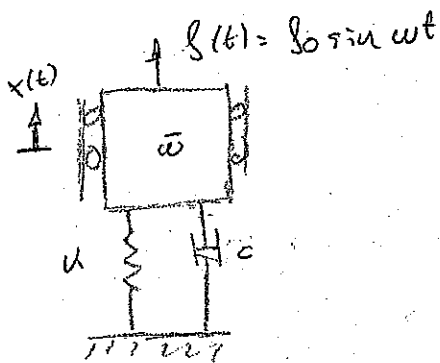
Si elegimos con cuidado k_a y m_2 , podemos hacer que las frecuencias naturales del sistema de 2gdl (ω_1 y ω_2) queden lejos de la $\bar{\omega}$ de excitación.

7.3.2. - Métodos pasivos para el aislamiento de vibraciones

Trataremos de aislar la máquina de las vibraciones de la cimentación y viceversa. Para este cometido suelen usarse elastómeros, muelles de fundición, corcho, fieltro, ...



→ Transmisibilidad: Es la "parte" de las vibraciones que se transmiten de la una a la otra, frente a las "totales" de la 1ª. Véase:



$$x(t) = \frac{F_0}{k} = D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \varphi) \rightarrow kx$$

$$\dot{x}(t) = \bar{\omega} \frac{F_0}{k} \cdot D \cos(\bar{\omega}t - \varphi) \rightarrow cx$$

$$F(t) = F_0 \sin \bar{\omega}t \rightarrow F_0$$

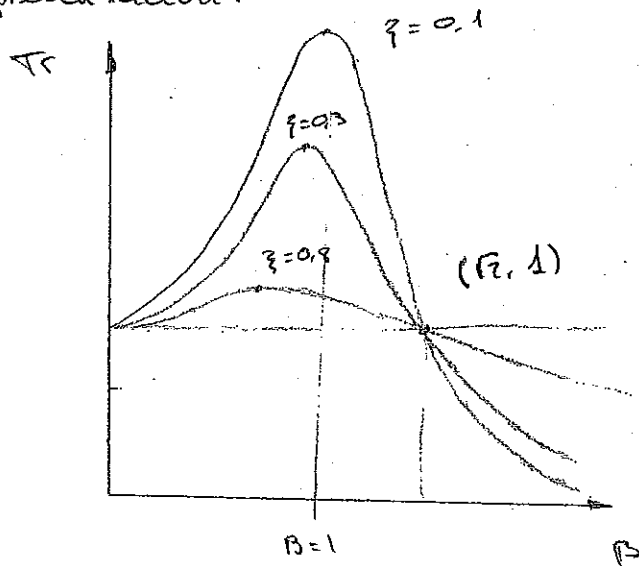
$$cx + kx \rightarrow F_0$$

$$\left[Tr = \frac{\delta}{\delta_0} \right]$$

(...)

$$\left[Tr = D \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2} \right]$$

Representación:



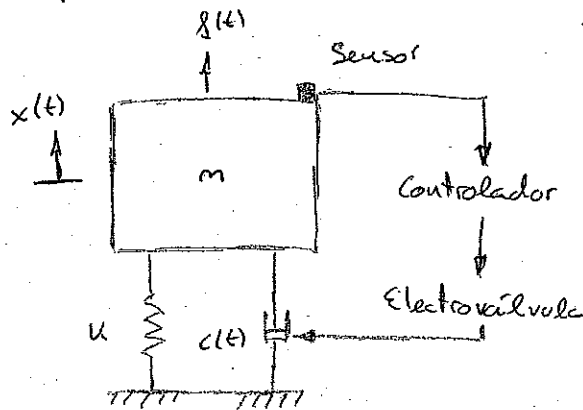
7.3.3.- Métodos Activos para el control y aislamiento de vibraciones.

Son métodos activos aquellos que incluyen un agente externo al sistema (fuerzas, etc) cambiantes dependiendo de la situación

a) Sistemas de aislamiento activos

Constan de un sensor, un controlador y finalmente un actuador que cambia las características mecánicas del mecanismo.

Esquema: ("tipo")

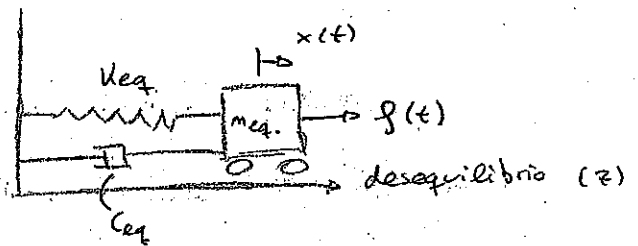
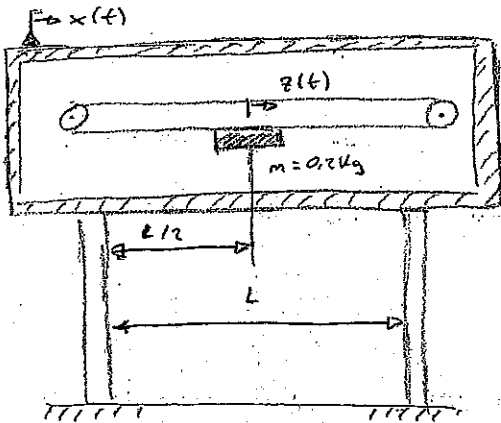


b) Control activo mediante fuerzas

Supongamos que tenemos una máquina a la que le pueden estar entrando vibraciones de la cimentación. Nuestro control activo constaría de sensor, controlador y, supongamos, un motor desequilibrado de frecuencia de giro variable, de forma que podamos acompañarla a la frecuencia de la vibración del suelo para compensarla.

Mié, 16-II-11

P.206. Problema



$$z(t) = \frac{L}{2} \cos \omega t$$

$$L = 1 \text{ m}$$

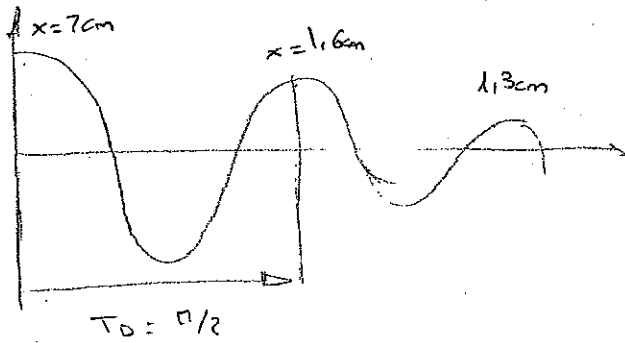
a) $F_{estática} = 25 \text{ N} \rightarrow \text{Despl.} = 2 \text{ cm}$

Fuerza desequilibradora: la inercia del cabezal.

$$F_i = -m\ddot{z} = m\bar{\omega}^2 \frac{L}{2} \cos \bar{\omega} t \quad \text{Tan sencillo como esto.}$$

b) $F_{est} = 25 \text{ N}$ $\Delta_{est} = 0,02 \text{ m}$

$k_{eq} = \frac{25}{0,02} = \boxed{1250 \text{ N/m}}$



$x_1 = 7 \text{ cm}$

$x_2 = 1,6 \text{ cm}$

$\delta = L \frac{x_1}{x_2} = 0,223$

$\zeta_{eq} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + (2\pi)^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} = \boxed{0,035 = \zeta_{eq}}$

$n = 1$

$T_D = T_0/2 \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta_{eq}^2}} \rightarrow \omega = 4,0025 \text{ rad/s}$

$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \rightarrow \boxed{m_{eq} = 78,03 \text{ kg}}$

d) $m_{eq} \ddot{x} + c_{eq} \dot{x} + k_{eq} x = -m \ddot{z} = m \bar{\omega}^2 \frac{L}{2} \cos \bar{\omega} t$

Resonancia $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{\omega} = \omega = 4,0025 \text{ rad/s} \\ \beta = 1, \quad \varphi = \pi/2 \end{array} \right\}$

$c_{eq} = \zeta_{eq} \bar{c}_{eq} = \zeta_{eq} \cdot 2 \cdot m_{eq} \omega = 21,86 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$

Εξίσωση: $78,03\ddot{x} + 21,86\dot{x} + 1250x = 1,602 \cos(4,0025t)$

$$X_E = \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot D \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-B)^2 + (2\zeta B)^2}} ; D_R = \frac{1}{2\zeta}$$

$$X_E = \frac{1,602}{1250} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,035} \cos(4,0025t - \pi/2)$$

$\hookrightarrow 1,83 \cdot 10^{-2}$

Mie, 16-11-11

(sigue)

Tema 8: Sistemas con varios gdl I: Vibraciones libres.

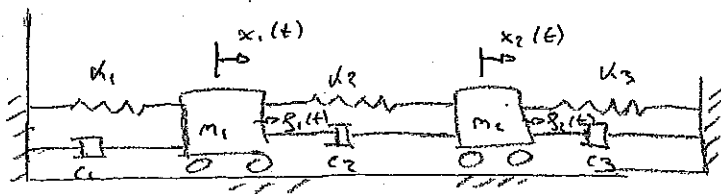
1.- Intro.

La generalización de 2 a n gdl es inmediata. Muchas soluciones y ejemplos se harán para 2 gdl por el valor didáctico de resolverlas a mano.

Curiosamente, un sistema de 2 (n) gdl no vibra siempre que se aparte de su posición de reposo como uno de 1 gdl, sino que sólo lo hará si se le dan unas condiciones iniciales determinadas.

Un sistema de 2 (n) gdl tiene 2 (n) frecuencias naturales.

2.- Ecuaciones del movimiento para un sistema de 2 gdl.



Suponemos ~~$x_2 > x_1$~~ $x_2 > x_1$, $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$, mismo sentido

Planteando equilibrio de fuerzas a las dos masas:

$$\left. \begin{aligned} &+k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - m_1 \ddot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1 = 0 \\ &-k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - m_2 \ddot{x}_2 - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 + f_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Reordenando:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = f_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = f(t)$$

3.- Vibraciones libres no amortiguadas. Frecuencias naturales. Modos de vibración.

Que un sistema de varios gdl vibre significa que todas sus masas se mueven con movimiento armónico, con la misma frecuencia y en fase (máximos, mínimos y pts de referencia al mismo tiempo).

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} \cos \omega t ; \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11} \omega^2 & k_{12} - m_{12} \omega^2 \\ k_{12} - m_{12} \omega^2 & k_{22} - m_{22} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = 0 \quad A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$$

$$\hookrightarrow \omega_1^2 \geq 0$$

$$\hookrightarrow \omega_2^2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{Frecuencias Naturales}$$

$$\rightarrow \omega_1^2 \rightarrow (k_{11} - m_{11} \omega_1^2) \bar{x}_1^1 + (k_{12} - m_{12} \omega_1^2) \bar{x}_2^1 = 0 \quad \rightarrow \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1$$

$$\omega_2^2 \rightarrow (k_{12} - m_{12} \omega_2^2) \bar{x}_1^2 + (\quad) = 0 \quad \rightarrow \bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2$$

$$\hookrightarrow x_1$$

$$\hookrightarrow x_2$$

\rightarrow Modos de vibración (autovectores)

Propiedades de los modos de vibración

Son ortogonales respecto de la matriz de masas:

$$\{x_1\}^T [M] \{x_2\} = 0$$

También respecto de la matriz de rigidez

$$\{x_1\}^T [K] \{x_2\} = 0$$

Lun, 21-11-11

→ Sol. gen. para vibraciones libres no amortiguadas

$$[M]\ddot{x} + [K]x = \{0\}$$

$$x_1 = \bar{x}_1 e^{st}$$

$$x_2 = \bar{x}_2 e^{st}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} + m_{11} s^2 & k_{12} + m_{12} s^2 \\ k_{12} + m_{12} s^2 & k_{22} + m_{22} s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = 0$$

$$s^2 = -\omega^2$$

$$\omega_1^2 \rightarrow s^2 = -\omega_1^2$$

$$s_1 = +i\omega_1 ; s_2 = -i\omega_1$$

$$\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1$$

$$\omega_2^2 \rightarrow$$

$$s_3 = +i\omega_2 ; s_4 = -i\omega_2$$

$$\bar{x}_2^1, \bar{x}_2^2$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + C_3 \omega_2 + C_4 \omega_2 =$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_A \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{Bmatrix} \left[\cos \omega_1 t + i(C_1 - C_2) \right] \begin{Bmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{Bmatrix} \sin \omega_1 t$$

4. Coordenadas modales

Simplifican la resolución de problemas.

Hay que formar la Matriz Modal, con los modos de vibración en columnas:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 & \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^1 & \bar{x}_2^2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz cumple:

$$\circ \quad [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} m_1^M & 0 \\ 0 & m_2^M \end{bmatrix} = [m_j^M] \rightarrow \text{Mtz. de masas modales}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1^M & 0 \\ 0 & k_2^M \end{bmatrix} = [k_j^M] \rightarrow \text{Mtz. de rigideces modales}$$

En fin. todo esto y más cosas, para llegar a nuestro cambio de coordenadas:

$$\circ \quad \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 & \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^1 & \bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{x\} = [\Phi] \{y\}$$

