ALJEBRA: Azterketa Ariketak

Aljebra Matriziala eta Ekuazio Linealetako Sistemak

1. ARIKETA

Izan bedi ondoko sistema lineala: $\begin{cases} x + y + b \cdot z = 1 \\ x + b \cdot y + z = 1 \\ b \cdot x + y + z = 1 \end{cases}$ non $b \in \mathbb{R}$. Aztertu sistemaren soluzioak b parametroaren balioaren arabera eta ebatzi sistema hori posiblea denean oinarrizko eragiketak aplikatuz.

Soluzioa:

1. kasua: b≠1 eta b≠2 → bideragarri zehaztua, $\left(\frac{1}{b+2}, \frac{1}{b+2}, \frac{1}{b+2}\right)$

2. kasua: b=1 → bideragarri zehaztugabea, x=1-y-z, $\forall y,\ z \in \mathbb{R}$

3. kasua: b=2 → bideraezina

2. ARIKETA

Izan bedi n ordenako A matrize erregular bat. Frogatu:

a) $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$

b) A simetrikoa bada, A^{-1} ere simetrikoa dela.

3. ARIKETA

Izan bedi $A = \begin{pmatrix} B & I \\ (0) & B \end{pmatrix}$ non B matrizea erregularra den:

a) Kalkulatu A^{-1} eta A^3.

b) Aurreko atalaren emaitza aplikatu, ondoko matrizearen alderantzizkoa lortzeko.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzioa:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -\left(B^{-1}\right)^2 \\ (0) & B^{-1} \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} B^3 & 3B^2 \\ (0) & B^3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -11/2 & 5/2 \\ 3/2 & -1/2 & 15/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

4. ARIKETA

$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ matrizea emanda:

a) Kalkulatu arrazoituz α-ren balioak A matrize ortogonala izan dadin.
b) Kalkulatu arrazoituz α-ren balioak A matrize antisimetrikoa izan dadin.
c) Izan bedi B matrizea non $b_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i\neq j \end{cases}$ eta izan bedi C matrize antisimetrikoa, kalkulatu arrazoituz α-ren balioak ondoko adierazpena betetzeko:

$$A^{-1}\cdot B+B=(B\cdot A+B+C)^{t}+C$$

Soluzioa:

a) A ortogonala da $\forall\alpha$
b) $\alpha=\pm\dfrac{2k-1}{2}\pi,\quad k=1, 2, 3...$
c) Adierazpena $\forall\alpha$ betetzen da

5. ARIKETA

Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ matrizea, non a, b, c eta d errealak diren.

a) Kalkulatu $A\cdot A^{t}$ biderkadura.
b) Lortu $A\cdot A^{t}$ adierazpenaren determinantea eta emaitza hori erabiliz, kalkulatu A matrizearen determinantea.

Soluzioa:

a) $A\cdot A^{t}=\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$

b) $\left|A\cdot A^{t}\right|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$, $|A|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$

6. ARIKETA

Kalkulatu M matrizearen alderantzizkoa α balioaren arabera eta bloke teoria erabiliz. Zein α-ren baliok egiten du M matrizea erregularra?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzioa:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ -\alpha & 1 & 4\alpha & -\alpha & -3\alpha \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \ \forall\alpha$$

7. ARIKETA

Aztertu ondoko ekuazio linealetako sistema k, a , b eta c $\in \mathbb{R}$ balioen arabera:

$$\begin{cases} x - y \qquad = a \\ \qquad y - z = b \\ k \cdot x \quad + z = c \end{cases}$$

Soluzioa:

1. kasua: k≠-1 → bideragarri zehaztua,

$$\left(a + b + \frac{c - k(a+b)}{1+k}, b + \frac{c - k(a+b)}{1+k}, \frac{c - k(a+b)}{1+k} \right), \text{ non} \begin{cases} \text{a=b=c=0} \to \text{soluzio nabaria} \\ \text{a, b edota c} \neq 0 \to \text{ez da izango soluzio nabaria} \end{cases}$$

2. kasua: k=-1:

a+b+c=0 bada → bideragarri zehaztugabea, $(a + b + z,\ b + z,\ z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$ eta $\forall a, b \in \mathbb{R}$
a+b+c≠0 bada → bideraezina

8. ARIKETA

Hurrengo n ordenako determinantea kalkulatu.

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ x_1 & x_2+1 & x_3 & ... & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+1 & ... & x_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1 & x_2 & 1 & ... & x_n+1 \end{vmatrix}$$

Soluzioa: $1+x_1+x_2+\ldots+x_n$

9. ARIKETA

Izan bitez $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$. Adierazi B eta C matrizeak A matrizearen eta oinarrizko matrize baten arteko biderkaduraren bidez.

Soluzioa: B=P·A non $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, C=A·Q non $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. ARIKETA

A matrizeari idenpotentea deritzo baldin $A^2 = A$ eta inbolutiboa deritzo baldin $A^2=I$, non I unitate matrizea den.

Izan bedi A matrizea idenpotentea eta ez nulua eta izan bedi B=a·A-I. Zehaztu a-ren balioak B inbolutiboa dadin.

Soluzioa: a=0 edo a=2

11. ARIKETA

Kalkulatu arrazoituz $\begin{vmatrix} 1 & a & e & b+c+d+f+g+h \\ 1 & b & f & a+c+d+e+g+h \\ 1 & c & g & a+b+d+e+f+h \\ 1 & d & h & a+b+c+e+f+g \end{vmatrix}$

Soluzioa: 0