Denbora: ordu 1

1. Izan bedi A matrize ortogonala. Kalkulatu X eta Y matrizeen balioak hurrengo ekuazio sisteman:

$$\left.\begin{array}{l} X^t = A \cdot Y^t \\ XA = A \cdot B \end{array}\right\}$$

2 puntu

2. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18$ jakinik, aurkitu hurrengo determinanteen balioak determinanteen propietateak erabiliz eta erantzuna arrazoituz:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

1.5 puntu

3. A eta B matrize simetrikoak emanik, aztertu eta frogatu egiazko kasuetan:

a) (A+B)(A-B) simetrikoa da.

b) $A^2 B^2$ simetrikoa da.

c) A B A simetrikoa da.

1.5 puntu

4. **Gauss metodoa erabiliz,** aztertu, *a* eta *b* parametroen arabera, hurrengo sistemaren soluzioa eta ebatzi bateragarri zehaztua den kasuetan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5 puntu

5. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu bere alderantzizkoa oinarrizko eragiketen bidez.

b) Idatzi *A* eta *I* erlazionatzen dituen adierazpen matriziala oinarrizko matrizeen bidez.

c) Lortu *a)* atalean egin dituzun oinarrizko eragiketei dagozkien oinarrizko matrizeak.

2.5 puntu

1)

$$\left.\begin{array}{l} X' = A\cdot Y' \\ XA = AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{irauli}} X = YA' \quad \boxed{X = ABA'}$$

$$\longrightarrow \quad Y\underbrace{A'\cdot A}_{\substack{\| \\ I \\ (A \text{ ortogonala})}} = AB \; ; \quad \boxed{Y = AB}$$

2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$|A| \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_1 \Leftrightarrow E_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |B| = \boxed{18}$$

18 $\quad \times(-1) \quad \quad \times(-1)$

$$|A| \xrightarrow{2\cdot Z_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |C| = \boxed{36}$$

18 $\quad \times 2$

$$|A| \xrightarrow{E_4 + E_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = |D| = \boxed{18}$$

18 $\quad \times 1$

3) a) $(A+B)(A-B) = [(A+B)(A-B)]'$?

$$[(A+B)(A-B)]' = (A-B)'(A+B)' = (A'-B')(A'+B') \overset{A,B \text{ sim.}}{=} (A-B)(A+B) \quad \text{EZ}$$

b) $A^2B^2 = (A^2B^2)'$?

$$(A^2B^2)' = (B^2)'(A^2)' = (B')^2(A')^2 \overset{A,B \text{ sim}}{=} B^2A^2 \quad \text{EZ}$$

c) $ABA = (ABA)'$?

$$(ABA)' = A'B'A' \underset{A,B \text{ sim}}{=} ABA \quad \text{BAI}$$

4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 5 \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_4-2E_1]{E_3-E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_4-E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & -a-4 & -6 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 5 \\ 0 & 0 & -a-4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right]$$

$\begin{array}{c} a \neq -4 \\ \longrightarrow \\ b \neq 1 \end{array}$ $\boxed{\text{sist. batez.}}$ $h(A) = 3 < 4 = h(A^z)$

$\begin{array}{c} a = -4 \\ \cancel{b \neq 1} \end{array}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_4 + \frac{b-1}{6} E_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\boxed{\text{sist. batez.}}$

$h(A) = 2 < 3 = h(A^z)$

$\begin{array}{c} a \neq -4 \\ b = 1 \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 5 \\ 0 & 0 & -a-4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\boxed{\text{sist. bateg. zh.}}$

$h(A) = 3 = h(A^z)$
$\phantom{h(A) = {}}\shortparallel$
 ez. kop.

$\left.\begin{array}{l} a \neq -4 \\ b = 1 \end{array}\right\}$: $z = \dfrac{-6}{-a-4} = \dfrac{6}{a+4} = z$

$y = 5 - az = 5 - \dfrac{6a}{a+4} = \dfrac{-a+20}{a+4} = y$

$x = 1 - 2z = 1 - \dfrac{12}{a+4} = \dfrac{a-8}{a+4} = x$

5

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{5E_2 \\ 5E_3}]{5E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}}$$

b) $$\boxed{I = P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5E_1} \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1}$$

$$I \xrightarrow{5E_2} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_2}$$

$$I \xrightarrow{5E_3} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = P_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_4}$$