Problemas de Sucesiones:

1.- Calcular los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{L\left(\dfrac{10}{n}\right)}{L(7n^2+8n)}$, b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{L\left((n+4)!\right)}{L(n!)}$ Junio 2006

2.- Calcular $\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$. Junio2007

3.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}-a\cdot n}$, donde $a \in (0,1]$. Septiembre 2007

4.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \left[\log_n (n+2)\right]^{3n\cdot \mathrm{L}n}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{2n}+\dfrac{2}{3n}+...+\dfrac{n}{(n+1)n}\right]$. Febrero 2008

5.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\frac{7}{3n^2+2}}$ Junio 2008

6.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(2n+\mathrm{L}n\right)\cdot\left(2^{1/n}-1\right)}{\left(n^2+4\right)\cdot \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2}{n}\right)}$ Septiembre 2008

7.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3}$. Febrero 2009

8.- Calcular:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n$, donde $a \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{1+2+3+......+n}$ Junio 2009

9.- Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{3}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\dfrac{7}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\dfrac{3}{n}\right)\right)}$. Junio 2010

10.- Calcular: a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}}{\mathrm{L}\left(n^2+n\right)}$ b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{2}{n}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{n}{n}}}{e^{\frac{n}{2}}}$ Septiembre 2010

11.- a) Calcular $a \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, para que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2+n\right)\cdot\left(\sqrt[n]{2e}-1\right)}{\tan^a\left(\dfrac{1}{n}\right)} = A$.

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+...+n^2}{a^n} \quad \forall a > 0$. Enero 2011

12.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+n)}{(n+1)^n}}$. Junio 2011

13.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{n^2}$ Noviembre 2011

14.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a^n+n\right)^{1/n} \quad \forall a > 0$ Julio 2012

15.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\left(n^{1/n}-1\right)}{\mathrm{L}n} \qquad \forall \alpha > 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)+\mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^4\right]+\ldots+\mathrm{L}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2}$ Enero 2013

16.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}}$ Julio 2013

17.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n^3-2n+3)\cdot L\left(\cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)\cdot arc\tan\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)\cdot arc\tan\left(\dfrac{n^2+1}{n+3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi n+1}{n-2}\right)}$ Enero 2014

18.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}$ Enero 2014

19.- Calcular el límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\cdot\mathrm{L}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

Julio 2014

20.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ para $p=-2$ y $p=2$ Enero 2015

21.- Calcular el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$.

Junio 2015

Soluciones de los Problemas de Sucesiones:

1.- a) $\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\frac{10}{n}\right)}{L(7n^2+8n)} = \frac{-1}{2}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{L\big((n+4)!\big)}{L(n!)} = 1$.

2.- $\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$.

3.- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\sqrt{n^2+n}-a\cdot n} = \begin{cases} 1 & si\ \ a=1 \\ e^{a(1-a)} & si\ \ a\neq 1 \end{cases}$, $a\in(0,1]$.

4.- a) $\lim_{n\to\infty}\left[\log_n(n+2)\right]^{3n\cdot \mathrm{L}n} = e^6$. b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+\frac{2}{3n}+...+\frac{n}{(n+1)n}\right]=1$.

5.- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\frac{7}{3n^2+2}} = 1$

6.- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2n+\mathrm{L}n\right)\cdot\left(2^{1/n}-1\right)}{\left(n^2+4\right)\cdot \mathrm{tg}^2\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{L2}{2} = L\sqrt{2}$

7.- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3} = 1$.

8.- a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \begin{cases} e^{-a} & si\ \ a\neq 0 \\ 1 & si\ \ a=0 \end{cases}$. b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{1+2+3+......+n} = 0$.

9.- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\cdot \mathrm{L}\left(1+\tan^2\left(\frac{3}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{7}{n}\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)} = \frac{6}{7}$.

10.- a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}}{\mathrm{L}\left(n^2+n\right)} = \frac{1}{2}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{2}{n}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{n}{n}}}{e^{\frac{n}{2}}} = e^{1/2}$.

11.- a) $a=-1$ y $A=L(2e)$.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+...+n^2}{a^n} = \begin{cases} 1 & si\ a<1 \\ \infty & si\ a=1 \\ 0 & si\ a>1 \end{cases}$.

12.- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+n)}{(n+1)^n}}=\dfrac{27}{4e}$.

13.- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)}{n^2}=\dfrac{3}{2}$.

14.- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+n\right)^{1/n}=\begin{cases}1 & si \quad 0<a\le 1\\ a & si \quad a>1\end{cases}$.

15.- a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha^n}{n}\right)\cdot\left(n^{1/n}-1\right)}{\mathrm{L}n}=\begin{cases}0 & si \quad \alpha\le 1\\ \nexists & si \quad \alpha>1\end{cases}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{1}\right)+\mathrm{L}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^4\right]+\ldots+\mathrm{L}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]}{n^2}=\dfrac{1}{2}$

16.- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}}=1$

17.- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n^3-2n+3)\cdot L\left(\cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)\cdot arc\ \tan\left(e^{1/n^2}-1\right)}{\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)\cdot arc\ \tan\left(\dfrac{n^2+1}{n+3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi n+1}{n-2}\right)}\quad\dfrac{1}{3\pi}$

18.- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}=\infty$

19.- $\lim\limits_{n\to\infty 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)\cdot\mathrm{L}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)}{\arctan\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

20.-a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{\left(2n^2\right)^n}}=\dfrac{2}{e^2}$.

b) p=-2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{-2}+2^{-2}+3^{-2}+...+n^{-2}}{n^3}=\infty$; $\quad$ p=2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$

21.- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=1$.