4. GAIA

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA

4.0 - HELBURUAK

• Baloratu noiz den baztergarria tenperaturaren aldaketa espaziala eta noiz aldatzen den tenperatura ia era uniformean denborarekin, parametro **kontzentratuen sistemen** analisi sinplifikatuak aplikagarri eginez.

• Ebazpide analitikoak lortu **dimentsio bakarreko eroapen-problema iragankorretarako** geometria angeluzuzen, zilindriko eta esferikoetan, aldagai-bereizkuntzaren metodoa erabilita, eta ulertu zergatik den hurbiltze onargarria, gehienetan, gai bakarreko soluzioa.

• **Ingurune handietako eroapen iragankorreko** problemak ebatzi, antzekotasun-aldagaia erabilita, eta tenperaturaren aldaketa aurresan, denboraren eta gainazaletiko distantziaren arabera.

SARRERA

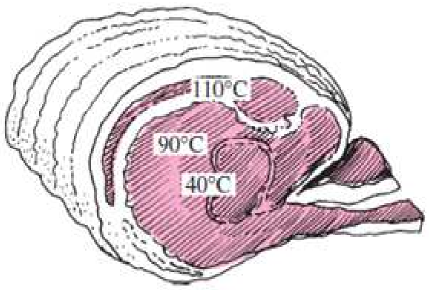
(a) Copper ball

Barne erresistentzia= 0

T = kte espazioan

T ≠ kte denbora

T(x,y,z,t) → T (t)



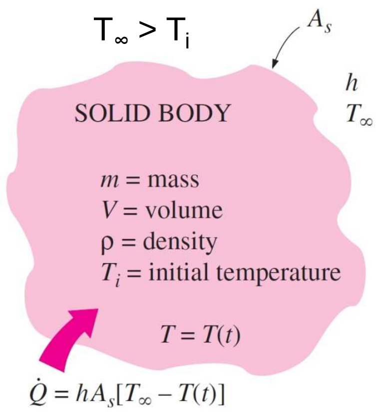
(b) Roast beef

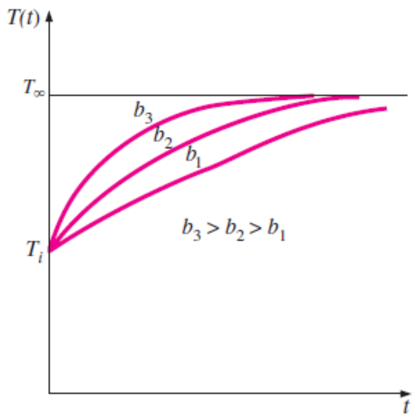
T ≠ kte espazioan

T ≠ kte denbora

T(x,y,z,t)

$T_\infty > T_i$





(Bero-transferentzia gorputzera, dt-n) = (Gorputzaren energia gehitzea dt-n)

$$hA_s(T_\infty - T(t))dt = mc_p d(T(t))$$

$$\frac{d(T(t)-T_\infty)}{T(t)-T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p}dt$$

t=0-tik integratuz non T=Ti

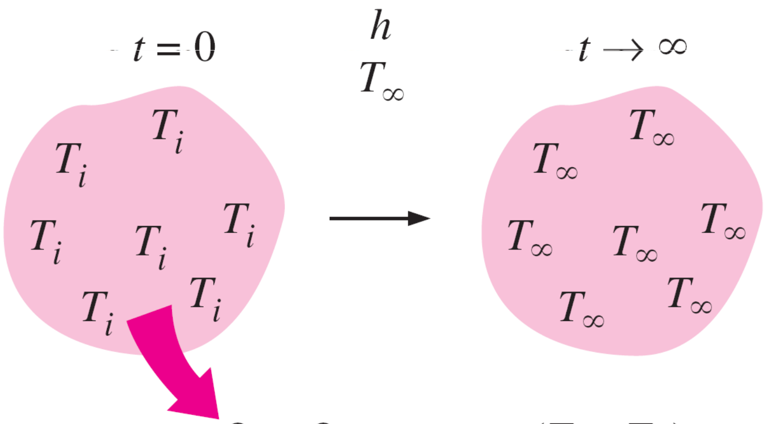
t berdin T=T(t)-rarte →

$$\ln\frac{T(t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p}t$$

$$\boxed{\frac{T(t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}}$$

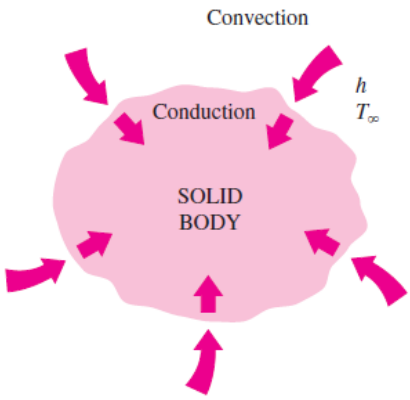
$$\boxed{b = \frac{hA_s}{\rho V c_p}}$$ **(1/s)**

Newtonen hozte-legea	$\dot{Q}(t)=hA_s\left[T(t)-T_\infty\right]$	(W)
Gorputzaren eta haren ingurunearen arteko bero-transferentzia kantitate totala	$Q=mc_p\left[T(t)-T_i\right]$	(J)
Gorputzaren eta haren ingurunearen arteko bero-transferentzia maximoa	$Q_{\max}=mc_p\left[T_\infty-T_i\right]$	(J)



$$Q = Q_{\max} = m\, c_p\, (T_i - T_\infty)$$

PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIRAKO IRIZPIDEAK



$$\mathrm{Bi} = \frac{\text{heat convection}}{\text{heat conduction}}$$

$$\boxed{L_c=\frac{V}{A_s}}$$

$$\boxed{Bi=\frac{hL_c}{k}}\qquad Bi=\frac{h}{k/L_c}\frac{\Delta T}{\Delta T}\qquad Bi=\frac{L_c/k}{1/h}$$

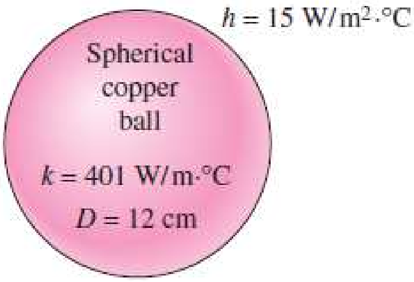
Zer adierazten du Biot zenbaki txikiak?

PARAMETRO KONTZENTRATUAK APLIKATZEKO IRIZPIDEAK **Bi = 0**

Bi $\leq 0{,}1$ → $T-T_\infty$ errorea $\pm$ 5 %

PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMEN ANALISIRAKO IRIZPIDEAK

1. ADIBIDEA:



$$L_c = \frac{V}{A_S} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6}D = 0{,}02\,m$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{15\times 0{,}02}{401} = 0{,}00075 < 0{,}1$$

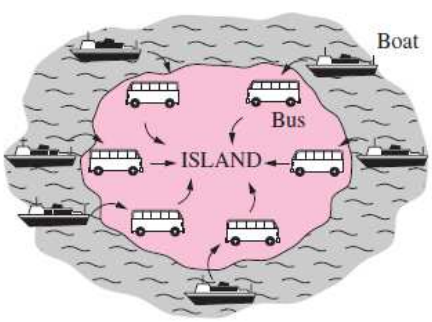
$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$$

$$b = \frac{hA_s}{\rho V C_p}$$

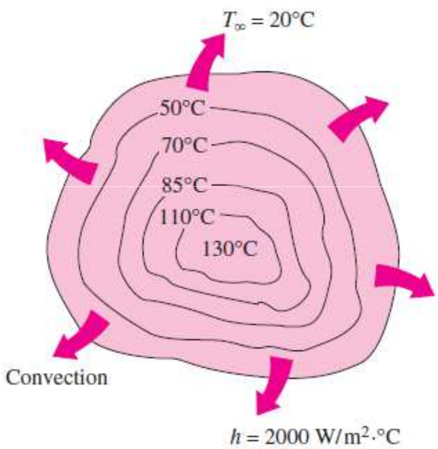
Eroankortasun termiko handiko eta konbekzio-koefiziente txikiko gorputz txikiak dira parametro kontzentratuen sistemen analisien irizpideak betetzeko aukera gehien dituztenak

OHAR BATZUK PARAMETRO KONTZENTRATUEN SISTEMETAKO BERO-TRANSFERENTZIAZ

Solido baterako bero-transferentzia

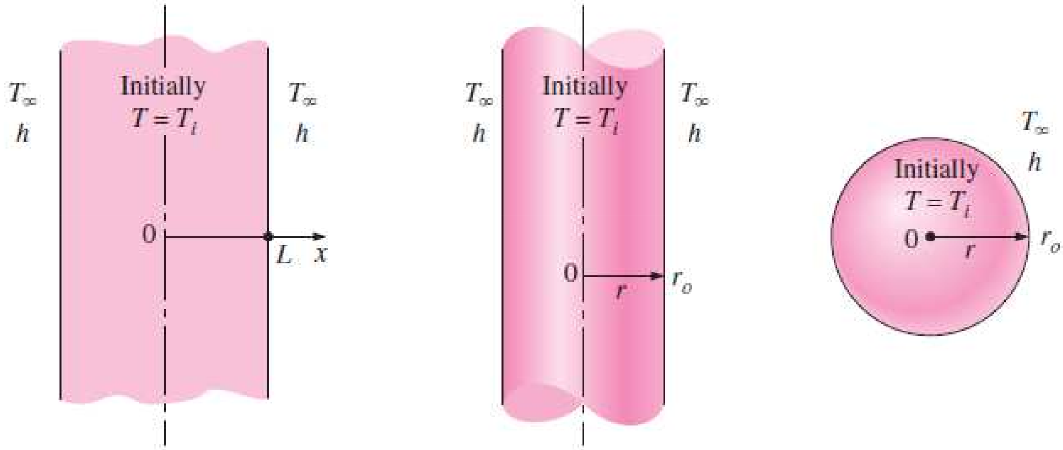


Gorputz baten hozte prozesua



4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

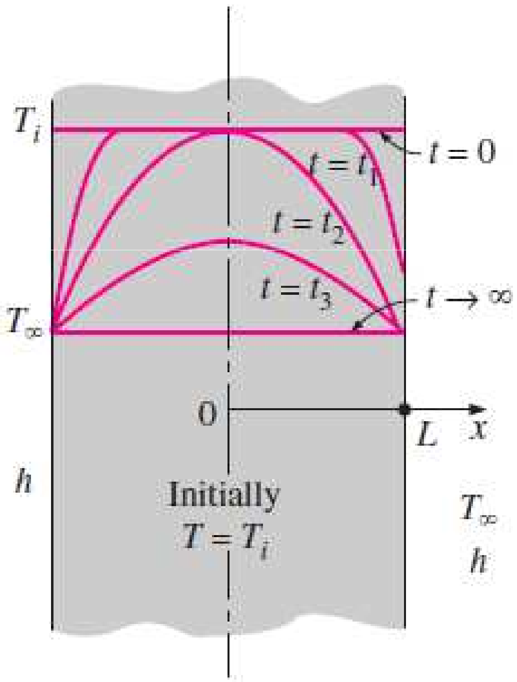
Bero-transferentzia dimentsio bakarrekoa duten geometria sinpleen eskema



(*a*) A large plane wall (*b*) A long cylinder (*c*) A sphere

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

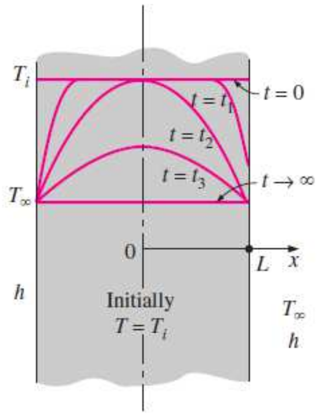
Tenperatura-profil iragankorra gainazaletiko konbekziopean dagoen horma lau batean, $T_i > T_\infty$-rako.



4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

JATORRIZKO BERO-EROAPENEKO PROBLEMA:

- Ekuazio diferentziala $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ $\alpha = k/\rho\, c_p$ difusibitate termikoa
- Mugalde-baldintzak $\dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$ $-k\dfrac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_\infty]$
- Hasierako baldintzak $T(x,0) = T_i$
- Emaitza $T = F(\underbrace{x, t}_{\text{aldagaia}}, \underbrace{L, k, \alpha, h, T_i}_{\text{parametroa}})$



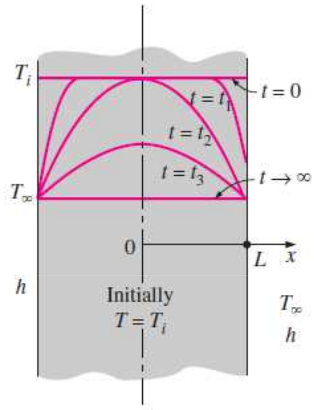
$0 \le x \le L$

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMA DIMENTSIOGABETUA

Aldagai dimentsiogabeak : $X = x/L$

$$\theta(x,t) = [T(x,t) - T_\infty]/[T_i - T_\infty]$$



- Ekuazio diferentziala $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \dfrac{\partial \theta}{\partial \tau}$
- Mugalde-baldintzak $\dfrac{\partial \theta(0,\tau)}{\partial X} = 0$ $\dfrac{\partial \theta(1,\tau)}{\partial X} = -Bi\,\theta(1,\tau)$
- Hasierako baldintzak $\theta(X,0) = 1$
- Emaitza $\theta = f(X, Bi, Fo)$

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMA DIMENTSIOGABETUA

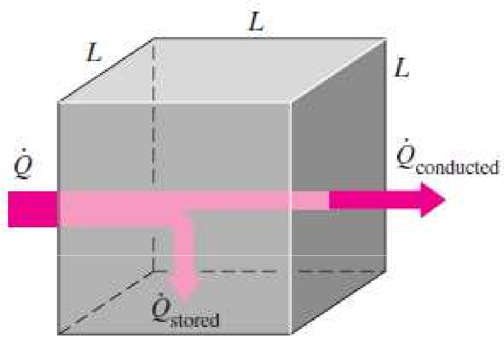
Tenperatura dimentsiogabea $\theta(X,\tau)=\dfrac{T(x,t)-T_i}{T_\infty-T_i}$

Distantzia dimentsiogabea, zentrotik $\boxed{X = x/L}$

Bero-transferentziaren koefiziente dimentsiogabea $\boxed{Bi=\dfrac{hL}{k}}$ Bioten zenbakia

Denbora dimentsiogabea $\boxed{\tau=\dfrac{\alpha\cdot t}{L^2}=Fo}$ Fourierren zenbakia

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ



Fourier number: $\tau=\dfrac{\alpha t}{L^2}=\dfrac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}}$

$$\text{Fourierren zenbakia}=\frac{\text{Eroandako Beroa}}{\text{Metatutako Beroa}}$$

$$\tau=\frac{\alpha t}{L^2}=\frac{kL^2(1/L)}{\rho C_p L^3/t}\frac{\Delta T}{\Delta T}$$

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMEN SOLUZIO ZEHATZA

Aldagai-bereizkuntzaren metodoa

$$\theta(X,\tau)=F(X)G(\tau) \xrightarrow{\text{Ek Diferentziala}} \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dX^2}=\frac{1}{G}\frac{dG}{d\tau} = \text{KTE} = (-\lambda^2)$$

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\lambda^2F=0 \qquad \frac{dG}{d\tau}+\lambda^2G=0$$

APLIKAGARRITASUNA

- Geometria sinplea eta finitua bada
- Ekuazio diferentziala eta mugalde-baldintzak nahiz hasierakoak, linealak badira
- Gai ez-homogeneo bakarra badute

Soluzioak
$$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n^2\tau}\cos(\lambda_n X)$$

Honako ingurune baldintzapean (Ekuazio karakteristikoa) $\lambda_n \tan\lambda_n = Bi$

Eta honako hasierako baldintza $A_n=\dfrac{4\sin\lambda_n}{2\lambda_n+\sin(2\lambda_n)}$

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

DIMENTSIO BAKARREKO EROAPEN IRAGANKORREKO PROBLEMEN SOLUZIO ZEHATZA

Geometria	Ebazpidea	λ_n-ak hauen erroak dira
Horma Laua	$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\,sen\,\lambda_n}{2\lambda_n+sen(2\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2\tau}\cos(\lambda_n x/L)$	$\lambda_n\tan\lambda_n=Bi$
Zilindroa	$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n}\frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n)+J_1^2(\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2\tau}J_0(\lambda_n r/r_0)$	$\lambda_n\frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)}=Bi$
Esfera	$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(sen\,\lambda_n-\lambda_n\cos\lambda_n\right)}{2\lambda_n-sen(2\lambda_n)}e^{-\lambda_n^2\tau}\frac{sen(\lambda_n r/L)}{\lambda_n r/L}$	$1-\lambda_n\cot\lambda_n=Bi$

Ebazpideak: Serie infinituak eta ekuazio inplizitua

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna $\tau > 0{,}2$

a.EBAZPIDE ANALITIKOA

Horma lauetan
$$\theta_{wall} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x / L), \qquad \tau > 0{,}2$$

Zilindroetan
$$\theta_{cyl} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r / r_o), \qquad \tau > 0{,}2$$

Esferetan
$$\theta_{sph} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r / r_o)}{\lambda_1 r / r_o}, \qquad \tau > 0{,}2$$

Non A_1 eta λ_1 konstanteak Bi zenbakiaren funtzioak diren (4-2 Taula)
Non J_0 Bessel-en funtzioa den (4-3 Taula)

4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna $\tau > 0{,}2$

a.EBAZPIDE ANALITIKOA

Horma lauetan
$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{wall} = 1 - \theta_{0,wall} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}$$

Zilindroetan
$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{cyl} = 1 - 2\theta_{0,cyl} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

Esferetan
$$\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{sph} = 1 - 3\theta_{0,sph} \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3}$$

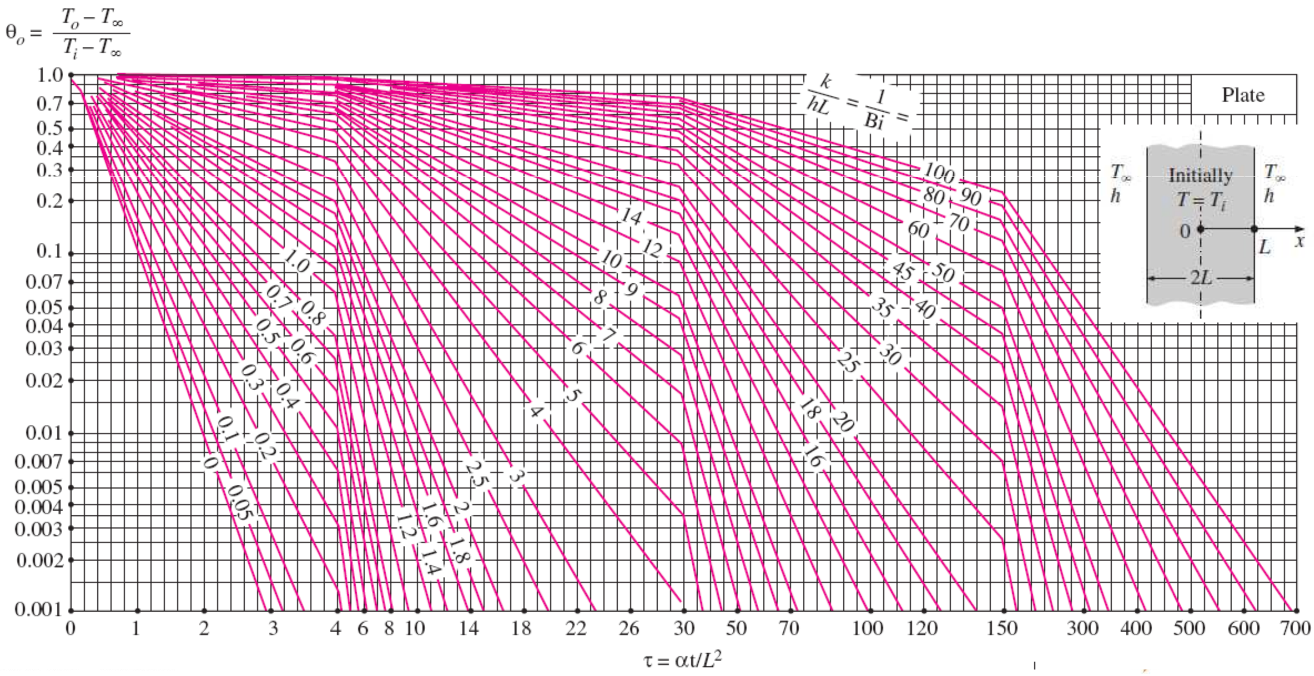
4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna $\tau > 0,2$

b.EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta.

b.1. Geometriaren zentroan eta t denbora jakin batean **T_0 tenperatura** kalkulatzeko balio du



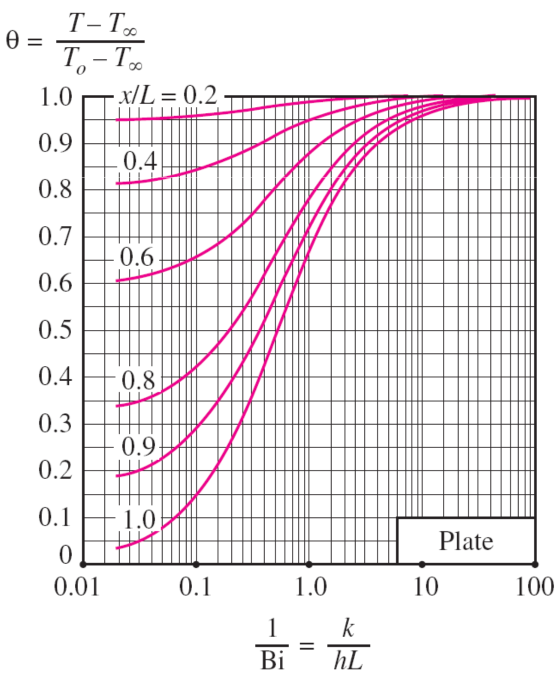
4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

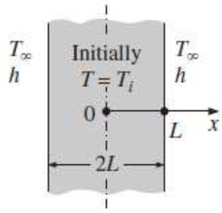
HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna $\tau > 0,2$

b.EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta

b.2. **Beste kokapenetako** eta aldiune bereko tenperatura T_0-ren arabera kalkulatzeko



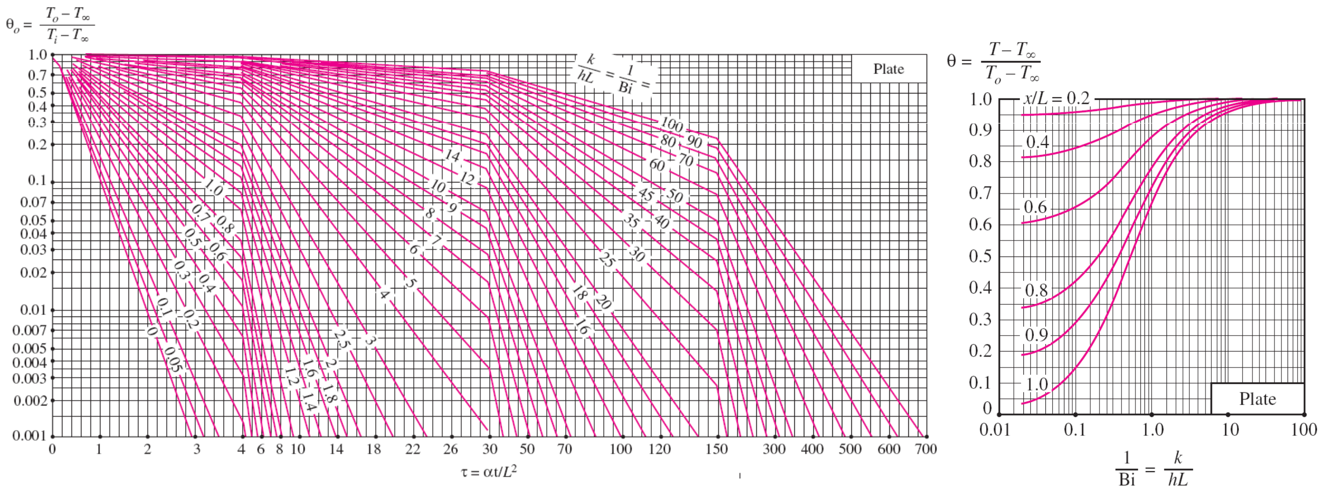


4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

Aplikagarritasuna $\tau > 0{,}2$

b.EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta



4.2 – BERO-EROAPEN IRAGANKORRA HORMA LAU HANDIETAN, ZILINDRO LUZEETAN ETA ESFERETAN, EFEKTU ESPAZIALAK KONTUAN HARTUZ

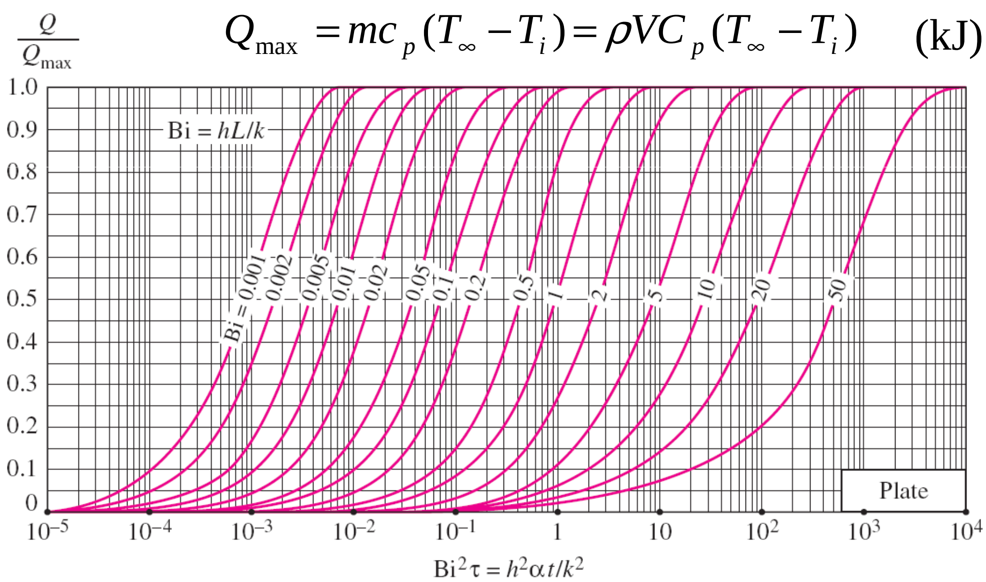
HURBILKETA BIDEZKO EBAZPIDE : ANALITIKO ETA GRAFIKOAK

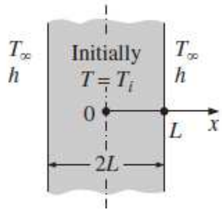
Aplikagarritasuna $\tau > 0{,}2$

b.EBAZPIDE GRAFIKOA. HEISLER-EN GRAFIKOAK (3) Geometria bakoitzarekin lotuta

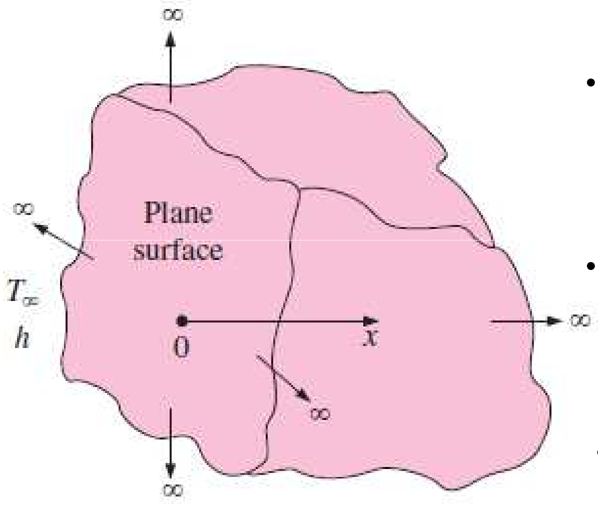
b.3. *t* aldiunera arteko **bero-transferentziaren** kantitate totala kalkulatzeko

$$Q_{max} = mc_p(T_\infty - T_i) = \rho V C_p (T_\infty - T_i) \quad \text{(kJ)}$$





GORPUTZ ERDIINFINITU BATEN ESKEMA



- Ekuazio diferentziala $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$
- Mugalde-baldintzak $T(0,t) = T_s$, $T(x \to \infty, t) = T_i$
- Hasierako baldintzak $T(x,0) = T_i$

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

Antzekotasun-Aldagai Metodoa
x eta t aldagai independenteak η aldagai bakarrean konbinatzen ditu

$$\boxed{\eta = \frac{x}{\sqrt{4\cdot\alpha\cdot t}}}$$

- $T = T(\eta)$ suposatuz eta y kate-erregela erabiliz:

$\alpha = k/\rho\, c_p$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad eta \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2t\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t}\frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

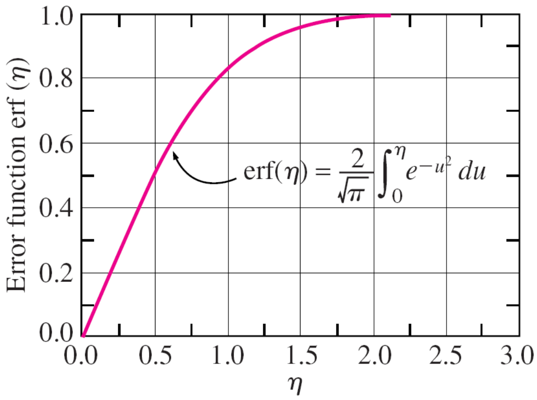
- Ekuazio Diferentziala $\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta}$
- Mugalde-baldintzak $T(0) = T_s$, $T(\eta \to \infty) = T_i$

Ekuazio eraldatua nahiz mugalde-baldintzak, η-ren menpekoak baino ez dira, eta x-rekiko nahiz t-rekiko independenteak dira.

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

Tenperatura-ren aldaketa

$$\frac{T-T_s}{T_i-T_s}=\underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-u^2}du}_{\text{Gauss-en ekuazioa}}=\underbrace{erf\,(\eta)}_{\text{Errore funtzioa: numerikoki ebaluatzen da}}=1-erfc\,(\eta)$$



$$\eta=\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA

Tenperatura-banaketa jakinda, gainazaleko bero-fluxua Fourierren legearekin

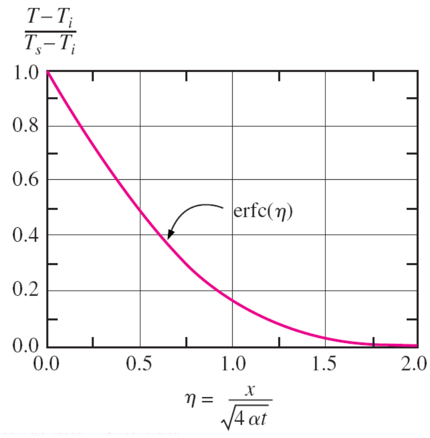
$$\dot{q}_s(t)=-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=-k\left.\frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{\eta=0}=-k\cdot C_1\cdot e^{-\eta^2}\left.\frac{1}{\sqrt{4\cdot\alpha\cdot t}}\right|_{\eta=0}=\frac{k(T_s-T_i)}{\sqrt{\pi\cdot\alpha\cdot t}}$$

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

1. kasua Gainazal-tenperatura zehaztua, T_s = konstantea

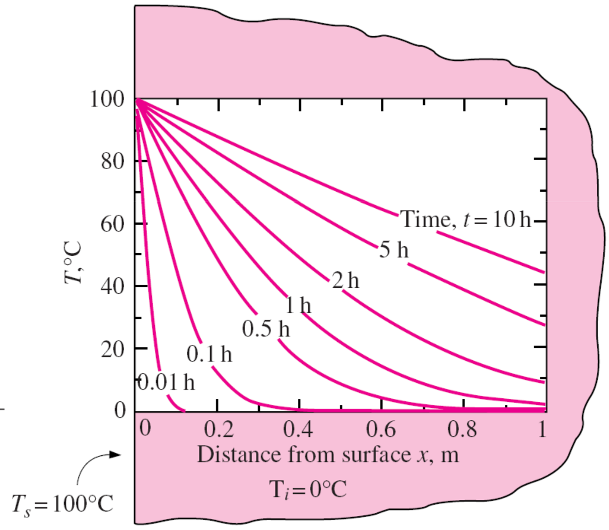
$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_s-T_i}=erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$\dot{q}_s(t)=\frac{k(T_s-T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$



4-4 Taula

η	erfc (η)
0.00	1.00000
0.02	0.9774
0.04	0.9549
0.06	0.9324

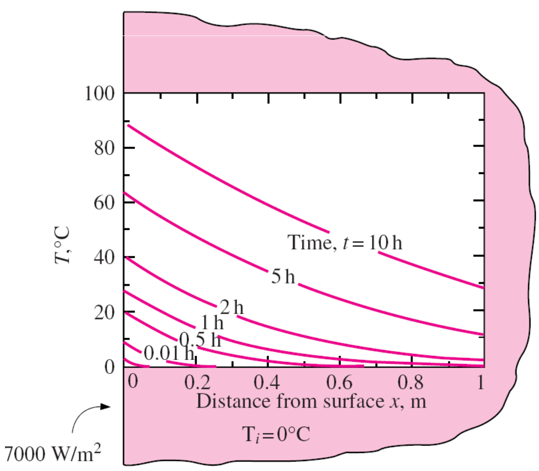


(a) Specified surface temperature, T_s = constant.

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

2. Kasua Gainazaleko bero-fluxu zehaztua q =cte

$$T(x,t)-T_i=\frac{\dot{q}_s}{k}\left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)-x\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$



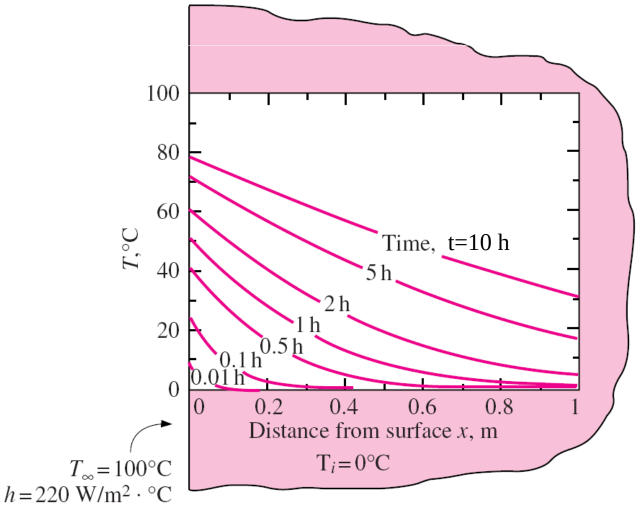
(b) Specified surface heat flux, $\dot{q}_s$ = constant.

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

3. Kasua Konbekzioa gainazalean

$$\dot{q}_s(t) = h\left[T_\infty - T(0,t)\right]$$

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_\infty - T_i} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

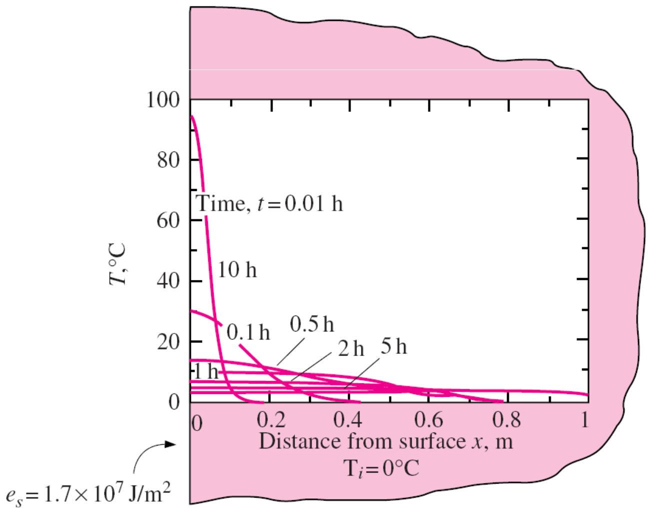


(c) Convection at the surface

BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SOLIDO ERDIINFINITUETAKO EBAZPIDEA BESTE MUGALDE BALDINTZETARAKO

4. Kasua Energia-pultsua gainazalean, e_s = kte

$$T(x,t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t / \alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$



(d) Energy pulse at the surface, e_s = constant

4.4 – IRAKATSIKO EZ DIREN ATALAK

- 4.3ko azpiatala: BI SOLIDO ERDIINFINITUREN ARTEKO KONTAKTUA
- 4.4 atala: BERO-EROAPEN IRAGANKORRA SISTEMA MULTIDIMENTSIONALETAN