

## 2. GAIA

# BERO EROAPENAREN EKUAZIOA

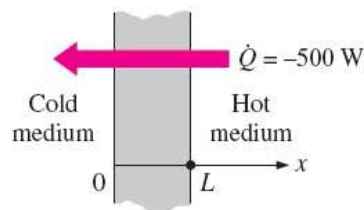
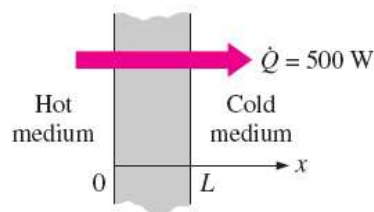
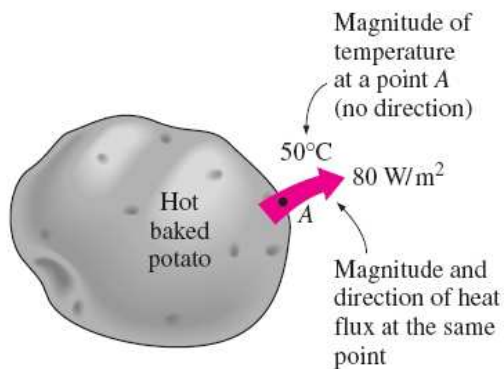
### 2.0 - HELBURUAK

2/28

- Bero-transferentziaren **multidimentsionaltasuna** eta denborarekiko menpekotasuna ulertu, eta orobat zer balditzen pean trata daitezkeen bero-transferentziaren problemak dimentsio bakarrekoak balira bezala.
- **Bero-eroapenaren ekuazio diferentzialak** zenbait koordinatu-sistematan lortu, eta dimentsio bakarreko kasu geldikorretarako sinplifikatu.
- Gainazalen baldintza termikoak identifikatu, eta matematikoki adierazi, **mugalde (edo inguruko) baldintza eta hasierako baldintza** gisa.
- Dimentsio bakarreko bero-eroapenaren problemak ebatzi, eta ingurune bateko **temperatura-banaketa** eta **bero-fluxua** kalkulatu.
- **Beroa sorrera** duten solidoetako dimentsio bakarreko bero-eroapena aztertu.

## TENPERATURA ETA BERO TRANSFERENTZIA

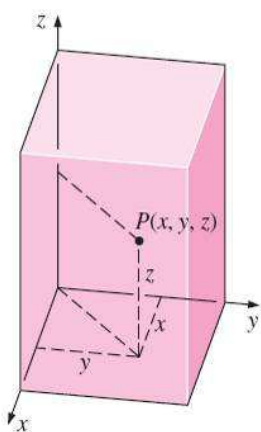
- Eskalar magnitudea vs. Bektorial magnitudea



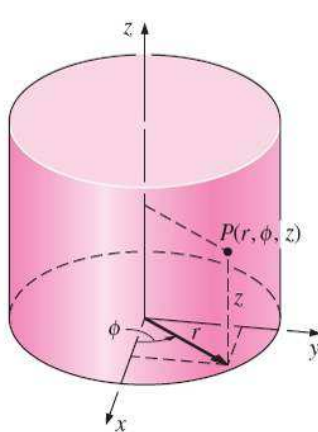
## BERO FLUXUAREN NORANTZA

## TENPERATUREN BANAKETA

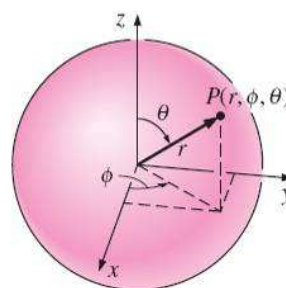
Koordenatu-sistema → angeluzuzenak, zilindrikoak, esferikoak.



$$T = T(x, y, z, t)$$



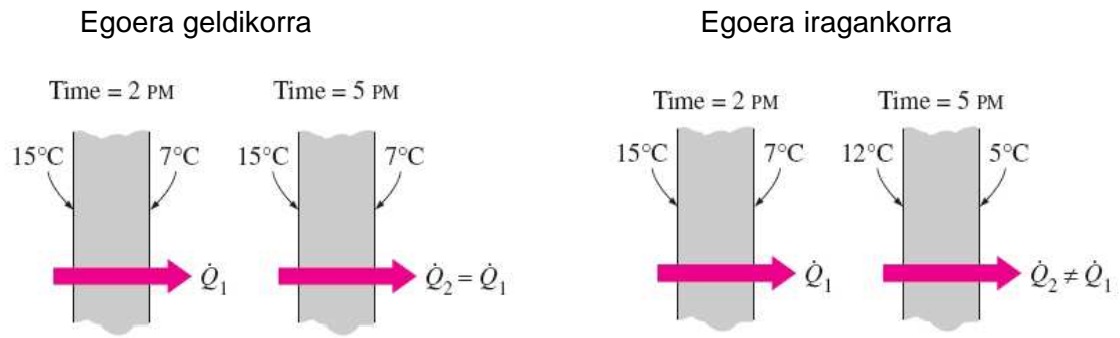
$$T = T(r, \phi, z, t)$$



$$T = T(r, \phi, \theta, t)$$

Kasu berezia:  $T = T(x)$  → **Dimentsio bakar eta Geldikorra**

**BERO-TRANSFERENTZIA GELDIKORRA VS. IRAGANKORRA**



\* Kasu berezia: **Parametro kontzentratuen sistemak.**

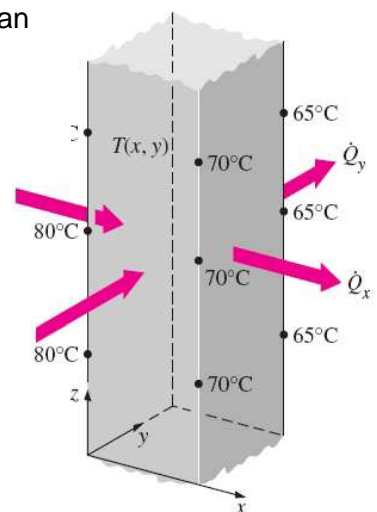
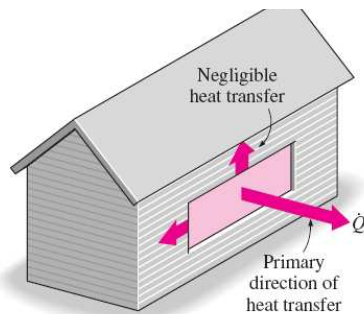


Naturan ematen diren prozesuak iragankorrak badira, **nola aztertzen dira?**

**BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENSIONALA**

Dimentsio bakarreko, bi dimentsioko edo hiru dimentsiokoa izan daiteke.

Temperatura-aldakuntzaren araberakoa izango da.



Zer motako transferentzia gertatzen da...  
... ur beroa daraman hodi batean?

eta lapiko baten barnean ura irakiten dagoen arraultz batean?

## BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENSIONALA



ZER DA EROAPEN PROBLEMA BAT EBAZTEA?

Helburua:

- Punto jakin bateko tenperatura  $T = T(x, y, z, t)$  [°C]

- Bero fluxua  $\dot{Q}_n = -k \cdot A \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$  [W]

## 2.1 – SARRERA

## BERO-TRANSFERENTZIA-MULTIDIMENSIONALA

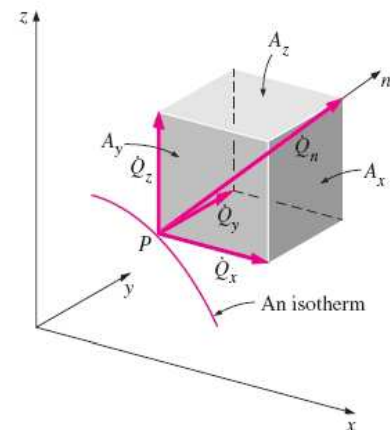
Fourier legearen adierazpen orokorra:

$$\dot{Q}_n = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -k \cdot A \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad [\text{W}]$$

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \cdot \vec{i} + \dot{Q}_y \cdot \vec{j} + \dot{Q}_z \cdot \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -k \cdot A_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dot{Q}_y = -k \cdot A_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad \dot{Q}_z = -k \cdot A_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

Material isotropoak – anisotropoak



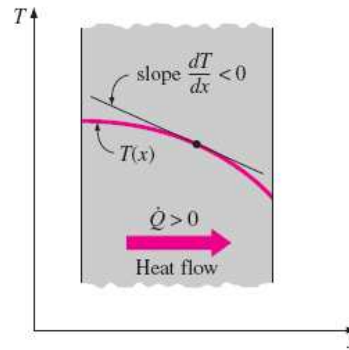
## BERO-TRANSFERENTZIA MULTIDIMENTSIONALA

$$\text{FOURIERREN LEGEA } \dot{Q}_{cond} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (\text{W})$$

Bero-eroapenaren abiadura ingurunean zeharreko temperatura-diferentziarekiko eta bero-transferentziaren norabidearekiko elkarzuta den azalerarekiko proportzionala da, baina norabide horretako distantziarekiko alderantziz proportzionala.

$k$  eroankortasun termikoa da.

$\frac{dT}{dx}$  tenperaturaren gradientea da.



## 2.1 – SARRERA

## BERO-SORRERA

Beste energia mota bat (mekanikoa, elektrikoa, nuklearra, kimikoa) bero energian bihurtzean sortzen da.

Adibidez: Zirkuito elektrikoak, erregai nuklearra, eguzkia, etc.

**Fenomeno bolumetrikoa** da.

Bero-sorrera abiadura:  $\dot{e}_{gen}$  [W/m<sup>3</sup>] o [Btu/h·ft<sup>3</sup>]

Orokorrean posizio eta denborarekin aldatzen da:  $\dot{E}_{gen} = \int_V \dot{e}_{gen} \cdot dV$

Bero-sorrera konstantea bada:  $E_{gen} = \dot{e}_{gen} \cdot V$

Bero-transferentzian norabide nagusi bat dagoenenan erabiltzen da, beste bi norabideak mesprezagarriak izanik.

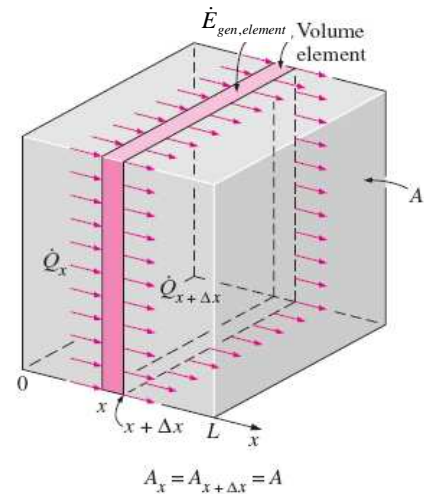
### HORMA LAU HANDI BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Energia-balatzea aplikatuz:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [W]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} \cdot V_{element} = \dot{e}_{gen} \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m \cdot c \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot c \cdot A \cdot \Delta x \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t)$$



## 2.2 – DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

### HORMA LAU HANDI BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Ordezkatuz,  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$  limitea hartuz eta Fourierren legea aplikatuz:

Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Eroankortasun konstantea:

Difusibitate termikoa:  $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra  $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$

- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

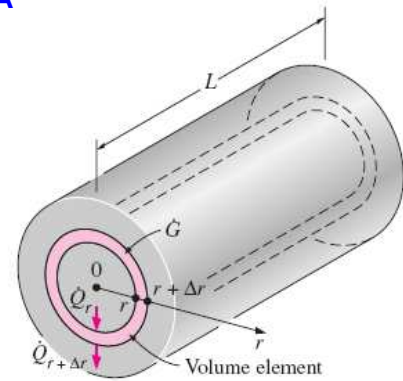
- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

## ZILINDRO LUZE BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Energia-balantzea aplikatuz:

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [\text{W}]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} \cdot V_{element} = \dot{e}_{gen} \cdot A \cdot \Delta r$$



$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m \cdot c \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot c \cdot A \cdot \Delta r \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

Ordezkatuz,  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$  limitea hartuz eta Fourierren legea aplikatuz:

Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

## ZILINDRO LUZE BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Eroankortasun konstantea

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$

- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra

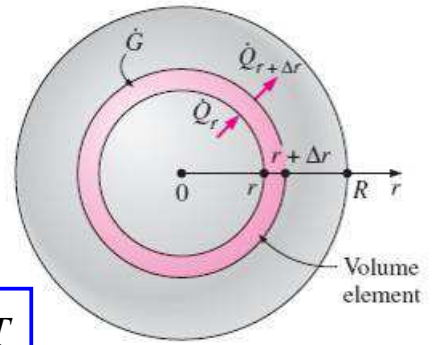
$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

ESFERA BATEKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIOA

Beste geometriekiko parekotasuna eginez:

Eroankortasun aldakorra:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$



Eroankortasun konstantea:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Kasu bereziak:

- Egoera egonkorra  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$

- Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

- Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$

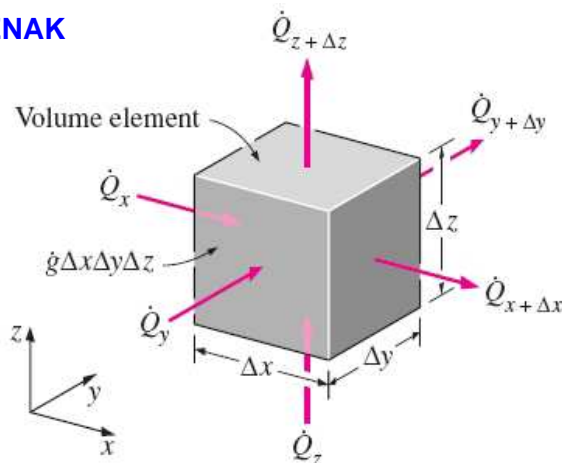
DIMENTSIO BAKARREKO BERO-EROAPENAREN EKUAZIO KONBINATUA

Hiru geometrientzako baliogarria den adierazpen trinkoa da:

$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">n = 0</td> <td>Horma laua.</td> </tr> <tr> <td>n = 1</td> <td>Horma zilindrikoa.</td> </tr> <tr> <td>n = 2</td> <td>Horma esferikoa.</td> </tr> </table>	n = 0	Horma laua.	n = 1	Horma zilindrikoa.	n = 2	Horma esferikoa.
n = 0	Horma laua.						
n = 1	Horma zilindrikoa.						
n = 2	Horma esferikoa.						



## KOORDENATU ANGELUZUZENAK



$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{gen,element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad [\text{W}]$$

$$\dot{E}_{gen,element} = \dot{e}_{gen} V_{element} = \dot{e}_{gen} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = m \cdot c \cdot (T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho \cdot c \cdot \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

## KOORDENATU ANGELUZUZENAK

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Eroankortasun konstantea:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Kasu bereziak:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0$$

Egoera egonkorra.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Bero-sorrera gabeko egoera iragankorra.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Bero-sorrera gabeko egoera egonkorra.

**MUGALDE-BALDINTZAK**

Gorputzaren mugaldean adierazpen matematikoa osatzen duten baldintza termikoak dira.

The differential equation:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

General solution:

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Arbitrary constants

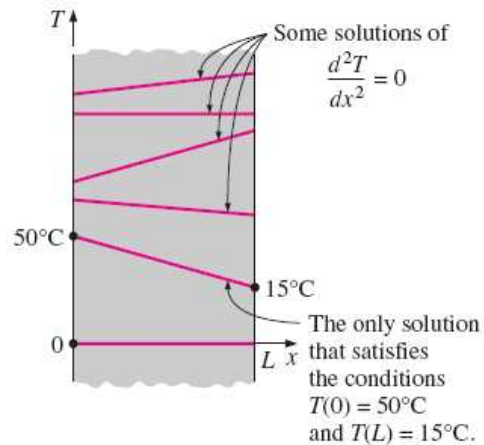
Some specific solutions:

$$T(x) = 2x + 5$$

$$T(x) = -x + 12$$

$$T(x) = -3$$

$$T(x) = 6.2x$$

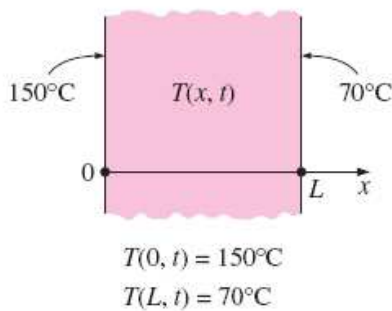
$$\vdots$$


**HASIERAKO BALDINTZAK**

Aldiune zehatz batean adierazpen matematikoa osatzen duten baldintza termikoak dira. Orokorrean  $t = 0$  aldiuneari buruzko informazioa da.

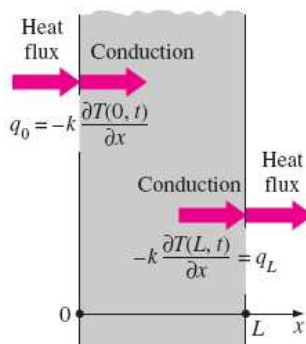
$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

**1- TEMPERATURA ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA**



$$\begin{cases} T(0, t) = T_1 \\ T(L, t) = T_2 \end{cases}$$

**2- BERO-FLUXU ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA**



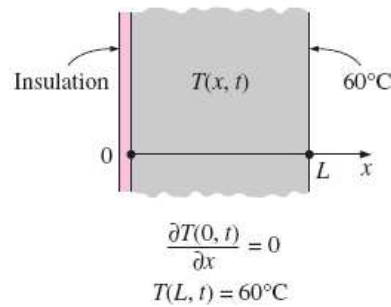
$$\begin{cases} \dot{q} = -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} & [\text{W/m}^2] \\ \dot{q} = -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} & [\text{W/m}^2] \end{cases}$$

Bero fluxua x norabide positiboan

2- BERO-FLUXU ZEHAZTUAREN MUGALDE-BALDINTZA

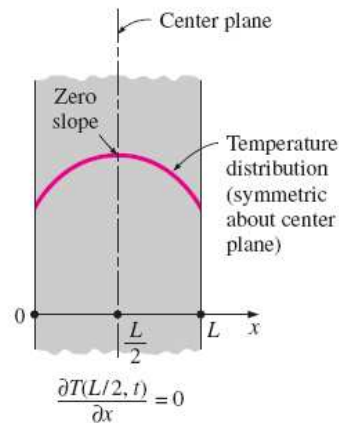
Mugalde isolatua

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$



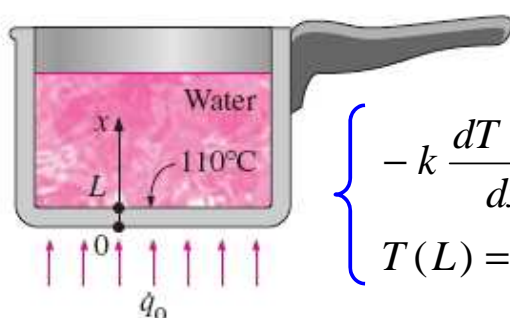
Simetri termikoa

$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$



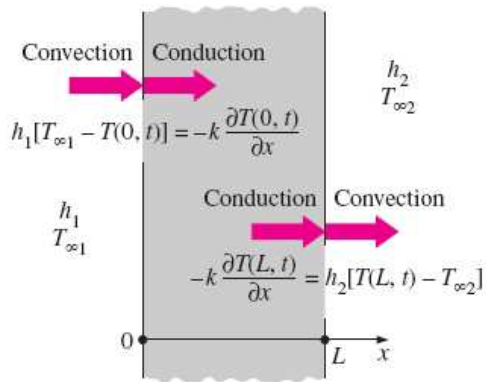
1. ADIBIDEA

Jar dezagun aluminiozko zartagin bat, haragia erregosteko erabiltzen dena, su elektrikoan. Zartagin-ipurdia  $L = 0,3$  cm lodi da, eta  $D = 20$  cm-ko diametroa du. Berogailu elektrikoak 800 W kontsumitzen du bete-betean ari denean haragia erregosten, eta berotze-elementuak sortzen duen beroaren ehuneko 90 transferitzen dio zartaginari. Operazio geldikorrean neurtu da zartaginaren barne-gainazalaren temperatura  $110^\circ\text{C}$  dela. Adierazi zartagin-ipurdiaren mugalde-baldintzak haragia erregosten ari denean.



$$\left\{ \begin{array}{l} -k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 = \frac{0,720 \text{ kW}}{\pi(0,1 \text{ m})^2} = 22,9 \text{ kW/m}^2 \\ T(L) = 110^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

3- KONBEKZIOAREN MUGALDE-BALDINTZA



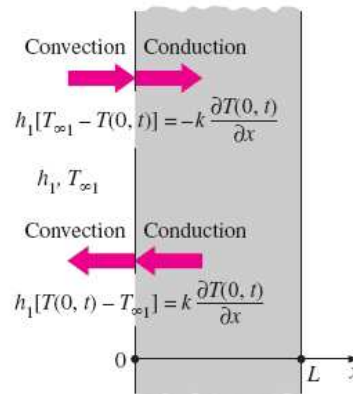
$$\left\{ \begin{aligned} -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= h_1 [T_{\infty,1} - T(0, t)] \\ -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} &= h_2 [T(L, t) - T_{\infty,2}] \end{aligned} \right.$$

Iruzkinek:

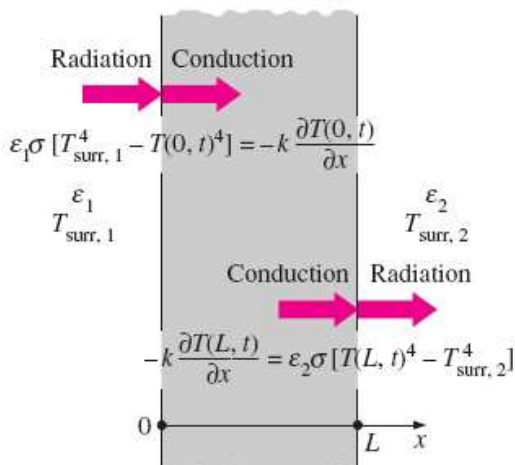
Zeinuak

Gainazaleko balantzearen esanahi fisikoa

Gainazaleko tenperatura ezezagunak



4- ERRADIAZIOAREN MUGALDE-BADINTZA



$$\left\{ \begin{aligned} -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= \epsilon_1 \sigma [T_{surr,1}^4 - T(0, t)^4] \\ -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} &= \epsilon_2 \sigma [T(L, t)^4 - T_{surr,2}^4] \end{aligned} \right.$$

Stefan-Boltzmannen

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ [W/m}^2 \cdot \text{K}^4]$$

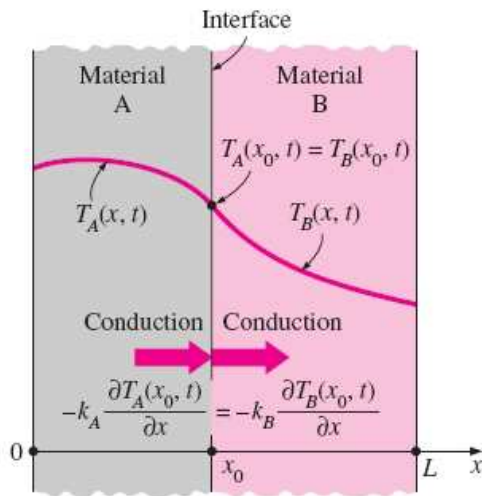
konstantea

Iruzkinek:

- Tenperaturak

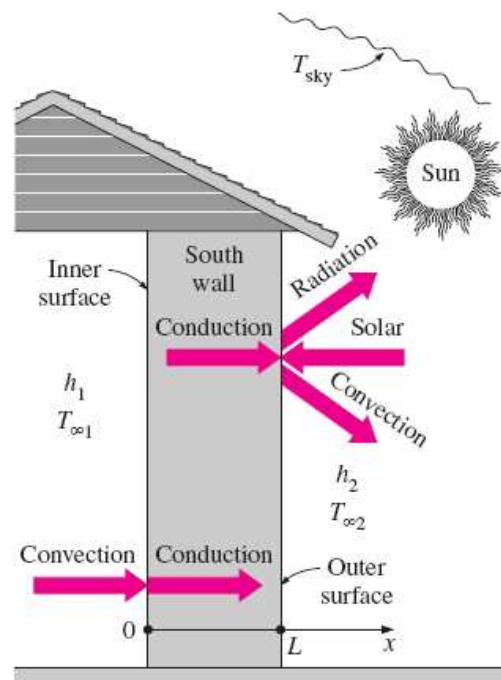
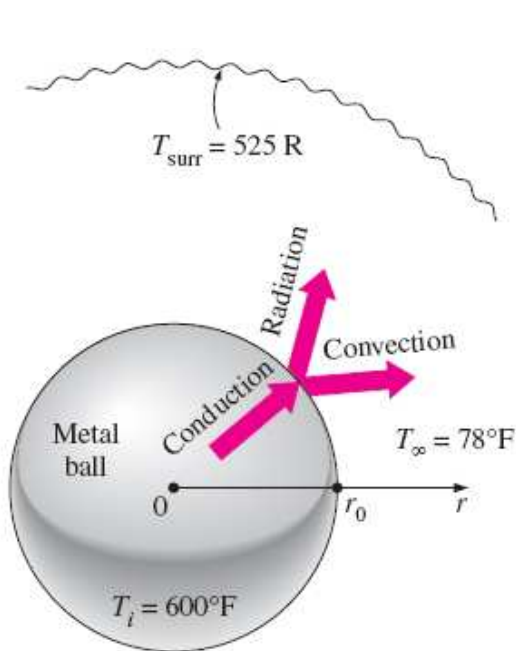
- Linealtasuna

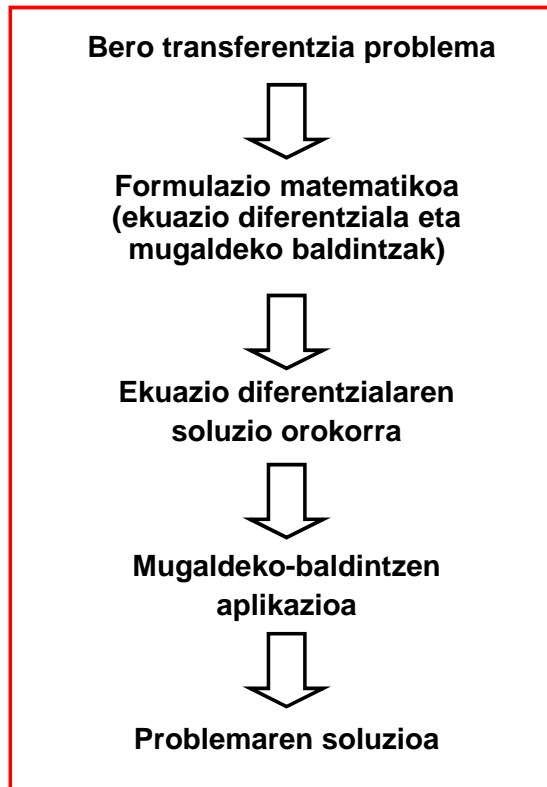
5- FASEARTEKO MUGALDE BALDINTZAK



$$\left\{ \begin{aligned} T_A(x_0, t) &= T_B(x_0, t) \\ -k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} &= -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

6- MUGALDE-BALDINTZA OROKORRAK





$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = T(x, y, z, t) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

$$\dot{Q}_n = -k \cdot A \cdot \left| \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right| \quad [\text{W}]$$

## 2.6 – IRAKATSIKO EZ DIREN ATALAK

- 2.3ko azpiatala: KOORDENATU ZILINDRIKOAK
- 2.3ko azpiatala : KOORDENATU ESFERIKOAK
- 2.6 atala: BERO-SORRERA SOLIDOETAN
- 2.7 atala: EROANKORTASUN TERMIKO ALDAKORRA  $k(T)$ .